VIỆN TOÁN HỌC
VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HOÀNG TỤY

HÀM THỰC VÀ GIẢI TÍCH HÀM

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ SÁCH TOÁN CAO CẤP – VIỆN TOÁN HỌC

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái (Chủ tịch)
Ngô Việt Trung
Phạm Huy Điển (Thư ký)

MỤC LỤC

Lời nói đầu xi

Chương 1. Tập hợp

1. Khái niệm tập hợp 1
   1.1. Tập hợp 1
   1.2. Các phép toán về tập hợp 2
   1.3. Ánh xạ 5
   1.4.Tập hợp và điều kiện 7
2. Tập hợp các số thực 9
   2.1. Các tiên đề về số thực 9
   2.2. Các tính chất cơ bản 11
   2.3. Giới hạn trên và giới hạn dưới 13
3. Lực lượng của các tập hợp 15
   3.1. Tập hợp tương đương 15
   3.2. Tập hợp đếm được 19
   3.3. Lực lượng continum 22
   3.4.* Tập hợp có lực lượng c 24
   3.5* Lực lượng 2^{α} 27
4. Đại số tập hợp 28
   4.1. Đại số 28
   4.2. σ-đại số 30

Bài tập 31

Chương 2. Không gian metric

1. Khái niệm metric và sự hội tụ 33
   1.1. Định nghĩa 33
   1.2. Ví dụ 34
   1.3. Sự hội tụ trong không gian metric 36
2. Tập mở và tập đóng 38
   2.1. Lân cận 38
   2.2. Hợp và giao của các tập mở và đóng 39

2.3. Điểm tụ 40
2.4. Phần trong và bao đóng 41
2.5. Tập mở và tập đóng trên đường thẳng 42
2.6. Tập Borel 45
3. Không gian đủ 47
3.1. Định nghĩa và ví dụ 47
3.2. Nguyên lý Cantor 49
3.3. Bổ sung không gian metric 50
4. Không gian compac 52
4.1. Tập compac 52
4.2. Đặc trưng tập compac 53
4.3. Tính chất Heine-Borel 55
4.4. Không gian compac 57
5. Ánh xạ liên tục 57
5.1. Định nghĩa và tính chất chung 57
5.2. Ánh xạ co và nguyên lý điểm bất động 59
6. Hàm số thực liên tục 62
6.1. Hàm số liên tục trên một tập compac 62
6.2. Xấp xỉ các hàm số liên tục bởi đa thức 63
7.* Fractal 68
7.1. Thang Cantor và đường cong Peano 68
7.2. Tập tự đồng dạng 70
7.3. Khoảng cách Hausdorff giữa hai tập 71
7.4. Lược đồ hàm lặp 74
7.5. Hàm fractal 77
Bài tập 80

Chương 3. Độ đo

1. Ý nghĩa vấn đề 83
2. Độ đo trên một đại số tập hợp 86
2.1. Hàm tập hợp 86
2.2. Các tính chất 87
3. Khuếch độ đo 91
3.1. Độ đo ngoài 91
3.2. Định lý khuếch 93
4. Độ đo trong $\mathbb{R}^k$ 96
4.1. Độ đo trên đường thẳng 96

4.2. Độ đo trong không gian Euclide k chiều 100
5. Hàm đo được 102
5.1. Định nghĩa 103
5.2. Các phép toán về hàm số đo được 104
5.3. Cấu trúc các hàm đo được 106
5.4. Hàm số tương đương 108
5.5. Sự hội tụ theo độ đo 109
5.6.* Hai định lý về cấu trúc hàm đo được 112
6.* Độ đo và thứ nguyên Hausdorff 114
6.1. Độ đo Hausdorff 114
6.2. Thứ nguyên Hausdorff 116
6.3. Thứ nguyên Kolmogorov 117
6.4. Thứ nguyên các tập tự đồng dạng 118
Bài tập 120

Chương 4. Tích phân
1. Sự hạn chế của tích phân Riemann 125
1.1. Tích phân Riemann trong $\mathbb{R}^k$ 125
1.2. Dao động của một hàm số 127
1.3. Tiêu chuẩn khả tích (R) 128
1.4. Tích phân Riemann trên một tập hợp 130
2. Tích phân Lebesgue 131
2.1. Tích phân các hàm đơn giản 132
2.2. Tích phân các hàm đo được bất kỳ 136
2.3. Các tính chất sơ cấp 138
3. Qua giới hạn dưới dấu tích phân 144
3.1. Hội tụ đơn điệu 144
3.2. Hội tụ chặn 146
3.3. Tích phân coi như một hàm tập hợp 149
4. Tích độ đo và tích phân lặp 151
4.1. Độ đo trong không gian tích 152
4.2. Tích phân lặp 157
5. Tích phân và đạo hàm trong $\mathbb{R}$ 159
5.1. Đạo hàm của một hàm số đơn điệu 160
5.2. Đạo hàm của tích phân bất định 163
5.3. Hàm số có biến phân bị chặn và hàm số tuyệt đối liên tục 166

5.4. Vấn đề tìm lại nguyên hàm 168
6. Tích phân Stieljès 170
6.1. Độ đo và tích phân L.S. 170
6.2. Tích phân R.S. 173
Bài tập 175

Chương 5. Không gian tuyến tính định chuẩn
1. Không gian tuyến tính định chuẩn 179
1.1. Quan điểm không gian trừu tượng và toán tử trong toán học 179
1.2. Khái niệm không gian tuyến tính 180
1.3. Vectơ độc lập tuyến tính, không gian con 183
1.4. Khái niệm không gian định chuẩn 185
1.5. Sự hội tụ trong không gian định chuẩn 188
2. Không gian các hàm có lũy thừa bậc p khả tích 190
2.1. Hai bất đẳng thức về tích phân 190
2.2. Không gian $\mathbb{L}^p$ 192
2.3. Tính tách được của $\mathbb{L}^p$ 196
3. Toán tử tuyến tính 198
3.1. Định nghĩa 198
3.2. Điều kiện liên tục 200
3.3. Toán tử nghịch đảo 202
3.4. Không gian các toán tử 204
3.5. Toán tử trên không gian tích 206
3.6. Toán tử song tuyến tính 208
4. Phiếm hàm tuyến tính 211
4.1. Định nghiã 211
4.2. Ví dụ 212
4.3. Phiếm hàm song tuyến tính 215
5. Ánh xạ khả vi 216
5.1. Vi phân của một ánh xạ 216
5.2. Đạo hàm theo phương 218
5.3. Vi phân của ánh xạ phức hợp 219
5.4. Vi phân cấp hai 221
6. Cực trị của các phiếm hàm khả vi 224
6.1. Điều kiện có cực trị 225
6.2. Cực trị ràng buộc 228

7. Bài toán biến phân cơ bản 232
7.1. Nội dung bài toán 232
7.2. Phương trình Euler 233
7.3. Điều kiện Legendre 237
7.4. Ví dụ 239
7.5. Bài toán đẳng chu 243
7.6.* Bài toán đầu mút động 246
Bài tập 249

Chương 6. Mấy định lý cơ bản của giải tích hàm
1. Định lý Hahn-Banach 255
1.1. Tiên đề Zorn 255
1.2. Định lý Hahn-Banach 256
1.3. Các tính chất sơ cấp của tập lồi 261
1.4. Định lý tách tập lồi 264
1.5. Hai biến thể khác của định lý Hahn-Banach 267
1.6. Bất đẳng thức không tương thích 269
2. Định lý ánh xạ mở và nguyên lý chặn đều 275
2.1. Định lý phạm trù 275
2.2. Định lý ánh xạ mở 276
2.3. Không gian thương 278
2.4. Định lý đồ thị đóng 280
2.5. Nguyên lý chặn đều 280
3. Định lý hàm ẩn và ánh xạ ngược địa phương 282
3.1. Công thức số gia giới nội 282
3.2. Đạo hàm riêng 284
3.3. Ánh xạ đa trị co 286
3.4. Định lý ánh xạ ngược địa phương 291
3.5. Định lý hàm ẩn 294
3.6. Ứng dụng: phương tiếp xúc của một đa tạp 297
4. Nguyên lý điểm bất động Brouwer và suy rộng 298
4.1. Đơn hình 298
4.2. Tam giác phân 299
4.3. Nguyên lý Brouwer 301
4.4. Bổ đề phân hoạch đơn vị 303
4.5. Định lý Kakutani 305
4.6. Điểm bất động trong không gian định chuẩn 308

Bài tập 309

Chương 7. Không gian Hilbert

1. Khái niệm không gian Hilbert 313
   1.1. Tích vô hướng 313
   1.2. Không gian Hilbert 315
2. Tính trực giao, hình chiếu 318
   2.1. Vectơ trực giao 318
   2.2. Hình chiếu lên một không gian con 319
3. Hệ trực chuẩn 321
   3.1. Định nghĩa, bất đẳng thức Bessel 321
   3.2. Hệ trực chuẩn đầy đủ 322
   3.3. Ứng dụng vào không gian $\mathbb{L}^2_{[0,2\pi]}$ 323
   3.4. Phương pháp trực hoá 325
4. Phiếm hàm tuyến tính và song tuyến tính trên không gian Hilbert 327
   4.1. Dạng tổng quát của phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian Hilbert 327
   4.2. Phiếm hàm song tuyến tính trên không gian Hilbert .. 329
5. Toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục 331
   5.1. Toán tử đối xứng, trị riêng và vectơ riêng 331
   5.2. Toán tử hoàn toàn liên tục 333
   5.3. Toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục 335
6. Phương trình tích phân 339
   6.1. Toán tử tích phân 340
   6.2. Phương trình tích phân với hạch đối xứng 343
   6.3. Phương trình tích phân với hạch thoái hoá 345
   6.4. Phương trình tích phân với hạch bất kỳ 351
   6.5. Phương pháp xấp xỉ dần, hạch lặp 354
7. Không gian Hilbert phức 360
   7.1. Định nghĩa 360
   7.2. Toán tử đối xứng trong không gian Hilbert phức 362
   7.3. Phương trình tích phân với tham số phức 363

Bài tập 364

Chương 8. Không gian tuyến tính tôpô

1. Không gian tôpô 371

1.1. Khái niệm cấu trúc tôpô 371
1.2. Tôpô sinh bởi một họ tập hợp 373
1.3. Lân cận 375
1.4. Tập đóng 376
1.5. Anh xạ liên tục, không gian đồng phôi 377
1.6. Tôpô yếu xác định bởi một họ hàm 379
2. Giới hạn, tính compac 380
2.1. Giới hạn, lọc 380
2.2. Không gian compac 382
3. Không gian tuyến tính tôpô 386
3.1. Khái niệm không gian tuyến tính tôpô 386
3.2. Cơ sở lân cận của một không gian tuyến tính tôpô 388
3.3. Không gian thương 391
4. Không gian lồi địa phương 392
4.1. Tôpô lồi địa phương 392
4.2. Xác định một tôpô lồi địa phương bởi một họ sơ chuẩn 394
4.3. Không gian đếm được chuẩn 397
5. Toán tử và phiếm hàm tuyến tính trên không gian tuyến tính tôpô 400
5.1. Tập bị chặn 400
5.2. Toán tử tuyến tính 401
5.3. Phiếm hàm tuyến tính 402
6. Tôpô yếu và tôpô yếu* 404
6.1. Cặp đối ngẫu 404
6.2. Đối cực và song đối cực 408
6.3. Tôpô yếu 409
6.4. Tôpô yếu* 412
6.5. M-tôpô trên không gian liên hợp 414
6.6. Tôpô phù hợp đối ngẫu 417
7.* Giới hạn xạ ảnh và giới hạn quy nạp 420
7.1. Giới hạn xạ ảnh 420
7.2. Giới hạn quy nạp 422
7.3. Không gian tích và không gian tổng 425
Bài tập 427

Lời giới thiệu

Trong những năm gần đây, nhu cầu sách tham khảo tiếng Việt về toán của sinh viên các trường Đại học, nghiên cứu sinh, cán bộ nghiên cứu và ứng dụng toán học tăng lên rõ rệt. Bộ sách "Toán cao cấp" của Viện Toán học ra đời nhằm góp phần đáp ứng yêu cầu đó, làm phong phú thêm nguồn sách tham khảo và giáo trình đại học vốn có.

Bộ sách Toán cao cấp sẽ bao gồm nhiều tập, đề cập đến hầu hết các lĩnh vực khác nhau của toán học cao cấp, đặc biệt là các lĩnh vực liên quan đến các hướng đang phát triển mạnh của toán học hiện đại, có tầm quan trọng trong sự phát triển lý thuyết và ứng dụng thực tiễn. Các tác giả của bộ sách này là những người có nhiều kinh nghiệm trong công tác giảng dạy đại học và sau đại học, đồng thời là những nhà toán học đang tích cực nghiên cứu. Vì thế, mục tiêu của các cuốn sách trong bộ sách này là, ngoài việc cung cấp cho người đọc những kiến thức cơ bản nhất, còn cố gắng hướng họ vào các vấn đề thời sự liên quan đến lĩnh vực mà cuốn sách đề cập đến.

Bộ sách Toán học cao cấp có được là nhờ sự ủng hộ quý báu của Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đặc biệt là sự cổ vũ của Giáo sư Đặng Vũ Minh và Giáo sư Nguyễn Khoa Sơn. Trong việc xuất bản Bộ sách, chúng tôi cũng nhận được sự giúp đỡ tận tình của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam. Nhiều nhà toán học trong và ngoài Viện Toán học đã tham gia viết, thẩm định, góp ý cho bộ sách. Viện Toán học xin chân thành cảm ơn các cơ quan và cá nhân kể trên.

Do nhiều nguyên nhân khác nhau, Bộ sách Toán cao cấp chắc chắn còn rất nhiều thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả để bộ sách được hoàn thiện hơn.

Chủ tịch Hội đồng biên tập

GS.TSKH. Hà Huy Khoái

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách này vốn có tựa đề "Giải tích hiện đại", trong những lần in trước là giáo trình về hàm thực và giải tích hàm đã dạy ở Đại học Tổng hợp Hà Nội những năm 1959 – 1968. Sách được xuất bản lần đầu tiên năm 1966, sau đó được sửa chữa bổ sung và in lại ba lần, lần thứ ba năm 1979 (ba tập I, II, III).

Lần in thứ tư (2003), nội dung sách cơ bản vẫn giữ như cũ, chỉ có một số sửa đổi và bổ sung mà chủ yếu là những phần liên quan fractal, và các điểm bất động (các Định lý Caristi, Ekeland, Nadler) là những vấn đề mới nhưng nay đã trở thành kinh điển. Đồng thời để giữ cho cuốn sách không quá dày, tác giả phải tạm gác lại một số phần như lý thuyết cực trị và phép biến đổi Fourier, sau này sẽ được trình bày đầy đủ hơn thành tài liệu riêng.

Trong bản in lần thứ 5 và thứ 6, tác giả có chú ý những lỗi in sai và cải tiến vài chỗ chứng minh trong bản in năm 2003.

Bản in lần này (2017), chỉ sửa thêm vài lỗi nhỏ trong bản in trước.

Một số chương hay mục được đánh dấu (*) là những vấn đề có thể bỏ qua khi đọc lần đầu.

Hà Nội, ngày 21 tháng 11 năm 2017

Tác giả

Hoàng Tụy

Chương 1

TẬP HỢP

1. KHÁI NIỆM TẬP HỢP

1.1 TẬP HỢP. Một khái niệm cơ bản của toán học hiện đại là khái niệm *tập hợp*.

Ta coi khái niệm tập hợp là một khái niệm khởi đầu, không định nghĩa mà chỉ giải thích bằng những ví dụ cụ thể xung quanh ta, trong đời sống, trong thiên nhiên, trong khoa học kỹ thuật, trong toán học, ...: tập hợp các sách trong thư viện, tập hợp các học sinh trong một trường, tập hợp các số hữu tỉ, tập hợp các đa thức bậc 5, tập hợp các điểm trên đường thẳng, v.v. .

Các vật tạo nên một tập hợp gọi là các *phần tử* của tập hợp ấy. Muốn xác định một tập hợp, có hai cách:

1. Liệt kê danh sách các phần tử của nó. Ví dụ: tập hợp bốn chữ a, b, c, d, thường viết

$$\{a, b, c, d\}.$$

2. Chỉ rõ dấu hiệu phân biệt các phần tử của tập hợp với các vật không phải là phần tử của nó. Chẳng hạn tập hợp $\{a, b, c, d\}$ cũng có thể xác định là: tập hợp bốn chữ đầu tiên trong bản chữ cái. tập hợp $\{1, 3\}$ có thể mô tả là: tập hợp hai số tự nhiên lẻ nhỏ nhất, hoặc tập hợp các nghiệm số của phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Để biểu thị rằng x là phần tử của tập hợp A, ta viết $x \in A$ (đọc: x thuộc A). Nếu x không phải là phần tử của A thì viết $x \notin A$. Chẳng hạn, nếu gọi P là tập hợp các số nguyên tố thì $43 \in P$ nhưng $34 \notin P$.

Một tập hợp có thể gồm nhiều hay ít phần tử, thậm chí có thể chỉ gồm một phần tử duy nhất. Cũng có khi ta xét một tập hợp mà không biết trước nó có phần tử nào hay không. Một tập hợp không có phần tử nào cả gọi là tập hợp *rỗng* (trống), và được ký hiệu: $\emptyset$. Ví dụ: tập hợp các nghiệm số thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập hợp rỗng; tập hợp các số tự nhiên n sao cho $2^{n+16} - 1$ là nguyên tố có phải là rỗng hay không, đến nay khoa học vẫn chưa biết được.

Một tập hợp B mà mọi phần tử đều là phần tử của một tập hợp A thì gọi là một *bộ phận* hay một *tập hợp con* của tập hợp A. Ký hiệu: $B \subset A$ (đọc B bao hàm trong A) hoặc $A \supset B$ (đọc A bao hàm B). Đương nhiên, bất kể tập hợp A như thế nào, ta cũng có $A \subset A$. Để cho tiện, ta cũng coi tập hợp rỗng là bộ phận của mọi tập hợp : $\emptyset \subset A$, bất kỳ A. Hai tập hợp A, B gọi là *bằng nhau* nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, nghĩa là mọi phần tử của tập hợp này cũng là phần tử của tập hợp kia và ngược lại. Ký hiệu $A = B$. Một bộ phận của A mà khác A (không bằng A) gọi là một bộ phận *thực sự* của A. Đôi khi, để biểu thị rằng B là một bộ phận thực sự của A, người ta viết $B \subset\subset A$.

1.2. CÁC PHÉP TOÁN VỀ TẬP HỢP. Để cho gọn, sau đây ta thường nói "tập" thay cho "tập hợp". Cho trước hai tập A và B, ta có thể thành lập những tập mới bằng các phép toán sau đây:

Hợp : Hợp của hai tập A và B là tập T gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập nói trên. Ký hiệu:

$$T = A \cup B \text{ (đọc } A \text{ hợp } B).$$

Ví dụ: nếu $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$ thì $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.

Giao : Giao của hai tập A và B là tập G gồm tất cả các phần tử chung cho A và B (tức là vừa thuộc A vừa thuộc B). Ký hiệu:

$$G = A \cap B \text{ (đọc } A \text{ giao } B).$$

Trong ví dụ trước, $A \cap B = \{c, d\}$.

Nếu giao của hai tập A và B là rỗng : $A \cap B = \emptyset$ thì ta nói hai tập ấy *rời nhau* (không có phần tử chung).

Hai phép hợp và giao có thể thực hiện trên nhiều tập: hợp của một số tập nào đó là tập gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong các tập ấy; giao của một số tập nào đó là tập gồm tất cả các phần tử chung cho mọi tập ấy.

Nếu ta có n tập : $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thì hợp của chúng có thể ký hiệu

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \text{ hoặc } \cup_{i=1}^{n} A_i ;$$

giao của chúng có thể ký hiệu

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \text{ hoặc } \cap_{i=1}^{n} A_i.$$

Nhiều khi ta phải xét cả một dãy vô hạn những tập : $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Lúc đó hợp và giao của chúng được ký hiệu: $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$. Tổng quát hơn nữa, khi ta xét một họ [1] tập $\{A_\alpha\}$ trong đó chỉ số α chạy trên một tập M cho trước thì hợp và giao của chúng sẽ được ký hiệu: $\cup_{\alpha \in M} A_\alpha$, $\cap_{\alpha \in M} A_\alpha$ (hoặc $\cup_\alpha A_\alpha$, $\cap_\alpha A_\alpha$ nếu tập M đã rõ).

Hiệu : Hiệu của tập A với tập B là tập H gồm tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B. Ký hiệu

$$H = A \setminus B \text{ (đọc } A \text{ trừ } B).$$

Chẳng hạn, nếu $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$ thì $A \setminus B = \{a, b\}$. Để ý rằng $B \setminus A = \{e\}$, thành thử nói chung $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Hiệu đối xứng của hai tập A và B là tập $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Ký hiệu

$$A \triangle B.$$

Sở dĩ nói đối xứng là vì rõ ràng $A \triangle B = B \triangle A$. Trong ví dụ trước $A \triangle B = \{a, b, e\}$.

Các phép hợp và giao có những tính chất sau đây:

a) Tính giao hoán

$$A \cup B = B \cup A; \; A \cap B = B \cap A;$$

[1] Ở đây cũng như sau này, danh từ "họ" (hay "lớp") đồng nghĩa với "tập". Một "họ tập" là một tập mà các phần tử là những tập.

b) Tính kết hợp

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

c) Tính phân phối

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Ta hãy chứng minh chẳng hạn công thức sau cùng (tính phân phối của phép hợp đối với phép giao). Xét một phần tử bất kỳ $x \in A \cup (B \cap C)$, tức là $x \in A$ hay $x \in B \cap C$. Nếu $x \in A$ thì đương nhiên $x \in A \cup B$ và $x \in A \cup C$, còn nếu $x \in B \cap C$ thì tức là $x \in B$ và $x \in C$, cho nên lại cũng có $x \in A \cup B$ và $x \in A \cup C$. Vậy đằng nào cũng có $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, tức là mọi phần tử của tập ở vế trái đều thuộc tập ở vế phải. Ngược lại, xét một phần tử bất kỳ $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, tức là $x \in A \cup B$ và $x \in A \cup C$. Nếu $x \in A$ thì dĩ nhiên $x \in A \cup (B \cap C)$. Còn nếu $x \notin A$ thì do $x \in A \cup B$ nên $x \in B$ và do $x \in A \cup C$ nên $x \in C$. Vậy $x \in B \cap C$, tức là $x \in A \cup (B \cap C)$, và mọi phần tử của tập ở vế phải đều thuộc tập ở vế trái. Tóm lại, hai tập bằng nhau. □

Các tính chất a), b), c) cho thấy rằng phép hợp giống phép cộng số học, phép giao giống phép nhân. Dựa trên nhận xét đó, nếu ta có một biểu thức về tập mà trong đó *chỉ có* các phép hợp và giao thì có thể áp dụng cho nó các qui tắc số học thông thường về khai triển dấu ngoặc, đưa vào dấu ngoặc, đặt thành nhân tử (coi dấu $\cup$ như +, dấu $\cap$ như $\times$). Ví dụ:

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D).$$

Do sự đối xứng cũng có thể nói rằng phép giao giống phép cộng, phép hợp giống phép nhân, cho nên cũng có thể coi dấu $\cap$ như +, dấu $\cup$ như $\times$. Chẳng hạn

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D).$$

Tuy nhiên, sự tương tự với số học không phải là hoàn toàn. Khác với trong số học, ở đây ta có

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A.$$

Về phép trừ tập, ta có công thức sau đây giống như trong số học:

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

(chứng minh dễ dàng). Tuy nhiên, cần chú ý: công thức $(A \setminus B) \cup B = A$ chỉ đúng khi $B \subset A$, công thức $(A \cup B) \setminus B = A$ chỉ đúng khi $A \cap B = \emptyset$.

Thường các tập được xét tới trong cùng một vấn đề đều là các bộ phận của một tập X cố định nào đó. Khi ấy, tập X này gọi là "vũ trụ" hay "không gian". Hiệu $X \setminus A$ sẽ gọi là *phần bù* của tập A và ký hiệu A^c. Dễ thấy rằng

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Các công thức sau đây (gọi là công thức *De Morgan*)

$$\left(\cup_\alpha A_\alpha \right)^c = \cap_\alpha (A_\alpha)^c \tag{1}$$

$$\left(\cap_\alpha A_\alpha \right)^c = \cup_\alpha (A_\alpha)^c \tag{2}$$

rất thường dùng và có thể phát biểu vắn tắt như sau: *phần bù của một hợp bằng giao của các phần bù; phần bù của một giao bằng hợp của các phần bù.*

Ta hãy chứng minh, chẳng hạn công thức (1). Muốn thế, xét một phần tử bất kỳ x của tập ở vế trái, tức là không thuộc $\cup_\alpha A_\alpha$. Khi ấy, với mọi α ta phải có $x \notin A_\alpha$, tức là $x \in (A_\alpha)^c$, chứng tỏ rằng $x \in \cap_\alpha (A_\alpha)^c$. Ngược lại, lấy một phần tử bất kỳ x của tập ở vế phải, thì với mọi α ta có $x \in (A_\alpha)^c$, tức là $x \notin A_\alpha$, cho nên $x \notin \cup_\alpha A_\alpha$, có nghĩa là $x \in \left(\cup_\alpha A_\alpha \right)^c$. Do đó các tập ở hai vế của (1) là bằng nhau. □

1.3. ÁNH XẠ. Bên cạnh khái niệm tập hợp, một khái niệm cơ bản của toán học hiện đại là khái niệm *ánh xạ*, suy rộng khái niệm hàm số cổ điển.

Cho X và Y là hai tập bất kỳ. Nếu với mỗi phần tử của X ta cho ứng một phần tử xác định của Y, thì ta nói rằng có một *ánh xạ* từ tập X vào tập Y, hay một *hàm* xác định trên tập X và lấy giá trị trong tập Y, hay một *toán tử* biến X vào Y.

Một ánh xạ thường được chỉ bằng một trong các ký hiệu $f, g, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$. Nếu f là một ánh xạ từ X vào Y ta thường ghi $f : X \to Y$.

Khi ấy nếu $x \in X$ thì $f(x)$ chỉ phần tử của Y ứng với phần tử x đó và ta viết $x \mapsto f(x)$ (nên phân biệt $\to$ và $\mapsto$). Phần tử $f(x)$ gọi là *ảnh* của phần tử x trong ánh xạ f, hay là *giá trị* (hay là *trị*) của hàm f tại x. Cho trước một tập $A \subset X$ thì tập các phần tử $y \in Y$ sao cho có ít nhất một phần tử $x \in A$ với $f(x) = y$, gọi là *ảnh* của tập A qua ánh xạ f, và được ký hiệu là $f(A)$. Tập $f(X)$, tức là ảnh của *miền xác định* X, gọi là *phạm vi* hay *miền giá trị*, hay *miền trị*, của ánh xạ, và được ký hiệu $\mathrm{Im}f$ (tiếng Anh Image, nghĩa là ảnh). Nói chung $\mathrm{Im}f$ chỉ là một bộ phận của Y. Nếu $\mathrm{Im}f = Y$ ta nói f là một ánh xạ từ tập X lên tập Y, hay f là một *toàn ánh*.

Cho trước một tập $B \subset Y$ thì tập các phần tử $x \in X$ có ảnh $f(x) \in B$, gọi là *nghịch ảnh* của tập B trong ánh xạ f, và được ký hiệu là $f^{-1}(B)$. Đương nhiên $f^{-1}(Y) = X$. Như vậy f^{-1} là một ánh xạ từ họ các tập con của Y vào họ các tập con của X. Nó có các tính chất quan trọng sau đây :

$$f^{-1}\Big(\cup_\alpha B_\alpha\Big) = \cup_\alpha f^{-1}(B_\alpha), \tag{3}$$

$$f^{-1}\Big(\cap_\alpha B_\alpha\Big) = \cap_\alpha f^{-1}(B_\alpha), \tag{4}$$

$$f^{-1}(B \setminus C) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C). \tag{5}$$

Nói cách khác : toán tử f^{-1} bảo toàn các phép toán về tập.

Cách chứng minh ba công thức trên tương tự như nhau. Ta hãy chứng minh (3) chẳng hạn. Giả sử $x \in f^{-1}\Big(\cup_\alpha B_\alpha\Big)$. Thế thì $f(x) \in \cup_\alpha B_\alpha$, cho nên có một α sao cho $f(x) \in B_\alpha$, hay $x \in f^{-1}(B_\alpha)$, do đó $x \in \cup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$. Ngược lại, nếu $x \in \cup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$ thì có một α sao cho $x \in f^{-1}(B_\alpha)$, tức là $f(x) \in B_\alpha$, do đó $f(x) \in \cup_\alpha B_\alpha$, và $x \in f^{-1}\Big(\cup_\alpha B_\alpha\Big)$. □

Một ánh xạ f từ tập X vào tập Y được gọi là *ánh xạ 1-1* hay *đơn ánh* nếu hai phần tử phân biệt của X bao giờ cũng có hai ảnh phân biệt, tức là nếu $x \neq x'$ luôn luôn kéo theo $f(x) \neq f(x')$.

Một ánh xạ 1-1 từ X lên Y cũng gọi là một *phép tương ứng 1-1* hay *song ánh* giữa hai tập X và Y. Nói cách khác giữa hai tập X và Y có một *phép tương ứng 1-1* nếu: với mỗi phần tử $x \in X$ ứng một phần tử duy nhất $y \in Y$ và ngược lại với mỗi phần tử $y \in Y$ ứng một phần tử

duy nhất $x \in X$. Khi f là một ánh xạ 1-1 từ X lên Y thì toán tử f^{-1} xác định ở trên cũng là một ánh xạ 1-1 từ Y lên X, đó là *ánh xạ ngược* của f.

1.4. TẬP HỢP VÀ ĐIỀU KIỆN. Cho X là một tập, $\alpha(x)$ là một điều kiện buộc cho phần tử $x \in X$ sao cho đối với mỗi phần tử x_0 cho trước chỉ xảy ra một trong hai khả năng: hoặc x_0 thỏa mãn điều kiện đó, hoặc x_0 không thỏa mãn điều kiện đó. (Một điều kiện như thế cũng có khi gọi là một *vị từ* hoặc *tân từ một ngôi*). Tập các phần tử $x \in X$ thỏa mãn điều kiện $\alpha(x)$ thường được ký hiệu

$$\{x : \alpha(x)\}$$

(đọc: tập các x sao cho $\alpha(x)$). Nếu cần nhấn mạnh rằng x là một phần tử của X thì ta viết

$$\{x \in X : \alpha(x)\}.$$

Chẳng hạn, nếu X là tập các số thực thì $\{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$ là tập $\{2, 3\}$, $\{x : x^2 \geq 0\}$ là chính X.

Cho trước một điều kiện $\alpha(x)$, vấn đề thường đặt ra là: có chăng một phần tử x thỏa mãn điều kiện $\alpha(x)$? Trả lời câu hỏi này, ta thường gặp những trường hợp quan trọng sau đây:

1. Có ít nhất một phần tử x thỏa mãn $\alpha(x)$. Khi ấy ta ký hiệu

$$(\exists x)\ \alpha(x)$$

(đọc : tồn tại x sao cho $\alpha(x)$).

2. Mọi phần tử x đều thỏa mãn $\alpha(x)$. Khi ấy ta ký hiệu

$$(\forall x)\ \alpha(x)$$

(đọc: với mọi x đều có $\alpha(x)$).

Các ký hiệu $\exists, \forall$ gọi là những lượng hóa, $\exists$ là *lượng hóa tồn tại*, $\forall$ là *lượng hóa phổ cập*. Khi đặt một lượng hóa trước một điều kiện, ta có một mệnh đề đúng hoặc sai.

Chẳng hạn, nếu X là tập các số thực thì $(\exists x)\ 2x > 2^x$ là đúng, nhưng $(\forall x)\ 2x > 2^x$ là sai.

Rõ ràng giữa các lượng hóa có liên hệ sau đây:

1. Không $(\exists x)\ \alpha(x) \Leftrightarrow (\forall x)$ không $\alpha(x)$. Tức là phủ định của mệnh đề: "tồn tại một x sao cho có $\alpha(x)$" là: "với mọi x đều không có $\alpha(x)$".

2. Không $(\forall x)\ \alpha(x) \Leftrightarrow (\exists x)$ không $\alpha(x)$. Tức là: phủ định của mệnh đề: "với mọi x đều có $\alpha(x)$" là: "tồn tại một x sao cho không có $\alpha(x)$)".

Bây giờ ta hãy xét trường hợp nhiều biến. Chẳng hạn, cho X, Y, Z là ba tập, cho $\alpha(x, y, z)$ là một điều kiện về các phần tử $x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z$ sao cho đối với mỗi bộ ba (x_0, y_0, z_0) cho trước chỉ xảy ra một trong hai khả năng: hoặc (x_0, y_0, z_0) thỏa mãn điều kiện đó, hoặc (x_0, y_0, z_0) không thỏa mãn điều kiện đó. (Một điều kiện như thế có khi gọi là một *vị từ hoặc tân từ ba ngôi*). Dĩ nhiên

$$(\exists x)\ \alpha(x, y, z)$$

là một điều kiện về hai biến y, z vì khi thay y, z bởi những phần tử cụ thể $y_0 \in Y,\ z_0 \in Z$ thì ta được mệnh đề $(\exists x)\ \alpha(x, y_0, z_0)$ đúng hay sai. Cũng như thế,

$$(\forall x)\ \alpha(x, y, z)$$

là một điều kiện về hai biến y, z. Nếu đặt hai lượng hóa, về hai biến x, y chẳng hạn,

$$(\exists x)\ (\forall y)\ \alpha(x, y, z)$$

("tồn tại một x sao cho với mọi y đều có $\alpha(x, y, z)$" thì sẽ có một điều kiện về một biến z. Và nếu lại thêm một lượng hoá nữa về biến z, chẳng hạn

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)\ \alpha(x, y, z) \tag{6}$$

("tồn tại một x sao cho với mọi y và với mọi z đều có $\alpha(x, y, z)$") thì ta thu được một mệnh đề, đúng hay sai. Ví dụ, nếu X, Y, Z đều là tập các số thực, thì mệnh đề sau đây là đúng:

$$(\exists x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ yxz + y^2 + z^2 \geq 0.$$

Sự tiện lợi của các ký hiệu lượng hóa là giúp ta có một quy tắc đơn giản để phủ định các mệnh đề phức tạp. Chẳng hạn, dễ thấy rằng phủ định của mệnh đề (6) là

$$(\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z) \text{ không } \alpha(x, y, z)$$

("với mọi x đều tồn tại một y và tồn tại một z sao cho không có $\alpha(x, y, z)$"). Thật vậy

$$\begin{aligned}
&\text{không } (\exists x)(\forall y)(\forall z)\ \alpha(x,y,z) \quad \Leftrightarrow\\
&(\forall x) \text{ không } (\forall y)(\forall z)\ \alpha(x,y,z) \quad \Leftrightarrow\\
&(\forall x)(\exists y) \text{ không } (\forall z)\ \alpha(x,y,z) \quad \Leftrightarrow\\
&(\forall x)(\exists y)\ (\exists z) \text{ không } \alpha(x,y,z).
\end{aligned}$$

Nói chung: *Muốn phủ định một mệnh đề có nhiều lượng hóa, ta thay mỗi lượng hóa $\exists$ bằng lượng hóa $\forall$ và ngược lại, đồng thời ta phủ định điều kiện buộc cho các biến.*

Sau đây, vì ta sẽ thường gặp những mệnh đề có nhiều lượng hóa, nên việc vận dụng qui tắc trên có thể giúp ta rút gọn các lập luận. Ví dụ, để chứng minh công thức De Morgan (1), chỉ cần viết tập ở vế trái của (1) dưới dạng

$$\{x : \text{ không } (\exists\alpha)\ x \in A_\alpha\}$$

là thấy ngay nó bằng

$$\{x : (\forall\alpha)\ x \notin A_\alpha\} = \cap_\alpha (A_\alpha)^c.$$

2. TẬP HỢP CÁC SỐ THỰC

2.1. CÁC TIÊN ĐỀ VỀ SỐ THỰC. Tập hợp giữ vai trò cơ bản trong giải tích là tập các số thực. Do định nghĩa, đó là một tập $\mathbb{R}$ thỏa mãn các tiên đề sau đây:

I. $\mathbb{R}$ là một *trường*, nghĩa là trong $\mathbb{R}$ có xác định hai phép toán đại số là phép cộng (+) và phép nhân ($\cdot$) sao cho:

1. Phép cộng và phép nhân đều có tính giao hoán và tính kết hợp:

$$a + b = b + a; \qquad a \cdot b = b \cdot a,$$

$$(a + b) + c = a + (b + c); \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

2. Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

3. Phép cộng có phép toán ngược, là phép trừ, nghĩa là: với mỗi cặp $a, b \in \mathbb{R}$ có một phần tử duy nhất $d \in \mathbb{R}$ sao cho $a + d = b$ (viết $d = b - a$). Do đó có một phần tử $0 \in \mathbb{R}$ sao cho $a + 0 = a$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

4. Phép nhân có phép toán ngược, là phép chia, nghĩa là: với mỗi cặp $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, có một phần tử duy nhất q sao cho $aq = b$ (viết $q = \frac{b}{a}$ hay b/a). Do đó có một phần tử $1 \in \mathbb{R}$ sao cho $a \cdot 1 = a$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

II. $\mathbb{R}$ là một trường *được sắp*, nghĩa là trong $\mathbb{R}$ có xác định một liên hệ $a \leq b$ (cũng viết $b \geq a$) sao cho

1. $a \leq b,\ b \leq c \quad \Rightarrow \quad a \leq c$,
2. $a \leq b,\ b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b$,
3. Với mỗi cặp $a, b \in \mathbb{R}$ ta đều có $a \leq b$ hoặc $b \leq a$,
4. $a \leq b \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + c$,
5. $0 \leq a,\ 0 \leq b \Rightarrow \quad 0 \leq a \cdot b$.

Khi $a \leq b$ và $a \neq b$ ta cũng viết $a < b$ (hay $b > a$) và nói: *a nhỏ hơn b* (hay *b lớn hơn a*). Ta gọi *lát cắt* (A, B) trong $\mathbb{R}$ là một sự phân hoạch tập $\mathbb{R}$ thành hai tập không rỗng rời nhau, A và B, sao cho với mọi $a \in A$, $b \in B$ đều có $a < b$.

III. $\mathbb{R}$ là một trường được sắp *liên tục (đủ)* nghĩa là nó thỏa mãn tiên đề Dedekind:

Với mỗi lát cắt (A, B) đều có: hoặc một phần tử lớn nhất trong A, hoặc một phần tử nhỏ nhất trong B, và không thể vừa có một phần tử lớn nhất trong A vừa có một phần tử nhỏ nhất trong B.

Phần tử lớn nhất của A hay nhỏ nhất của B nói trên gọi là *biên* của lát cắt.

Tập các số thực cũng gọi là *đường thẳng số*, và mỗi số thực cũng gọi là một *điểm* của đường thẳng ấy. Nếu $a < b$ thì ta cũng nói điểm a đứng "bên trái" điểm b (hay b đứng "bên phải" a).

2.2. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN. Từ các tiên đề trên, có thể suy ra dễ dàng tất cả các tính chất đã biết về số thực. Sau đây ta chỉ chứng minh một số tính chất cơ bản.

I. Cho một tập $M \subset \mathbb{R}$. Một phần tử $x \in \mathbb{R}$, gọi là một *cận trên* của M nếu $y \leq x$ với mọi $y \in M$; một *cận dưới* của M nếu $x \leq y$ với mọi $y \in M$. Một tập M có thể có nhiều cận trên cũng như có thể có nhiều cận dưới: cận trên nhỏ nhất, nếu có, cũng gọi là *supremum* của M (ký hiệu: sup M); cận dưới lớn nhất, nếu có, là *infimum* của M (ký hiệu: inf M). Theo định nghĩa đó, $m = \sup M$ khi và chỉ khi

1. $(\forall x \in M)\ x \leq m$,
2. $(\forall m' < m)\ \ (\exists x \in M)\ m' < x$,

và $m = \inf M$ khi và chỉ khi

1. $(\forall x \in M)\ m \leq x$,
2. $(\forall m' > m)\ \ (\exists x \in M)\ x < m'$.

Nguyên lý supremum. *Mỗi tập con không rỗng $M \subset \mathbb{R}$ mà có một cận trên thì phải có supremum. Mỗi tập con không rỗng $M \subset \mathbb{R}$ mà có một cận dưới thì phải có infimum.*

Chứng minh. Giả sử $M \neq \emptyset$ và có một cận trên c. Ta hãy xét các tập :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : (\exists a \in M)\ x \leq a\}, \\ B &= \{y \in \mathbb{R} : (\forall a \in M)\ a < y\}. \end{aligned}$$

Rõ ràng A, B đều không rỗng , $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$, và nếu $x \in A$, $y \in B$ thì $x < y$. Vậy (A, B) là một lát cắt. Gọi m là biên của nó, có thể kiểm tra lại dễ dàng m chính là supremum của M. Phần thứ hai của định lý cũng chứng minh tương tự. □

II. Ta gọi *số dương* là những phần tử $a > 0$; *số âm* là những phần tử $a < 0$, và đặt $|x| = x$ nếu $0 \leq x$, $|x| = -x$ nếu $x < 0$. Một số $a \in \mathbb{R}$ gọi là *giới hạn* của một dãy số $x_n \in \mathbb{R}$ (viết $\lim x_n = a$) nếu

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0)\ (\forall n \geq n_0)\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Một dãy x_n gọi là *đơn điệu tăng (giảm)* nếu $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$ với mọi n; *bị chặn trên (dưới)* nếu nó có một cận trên (dưới); *hội tụ* nếu nó có một giới hạn.

Nguyên lý Weierstrass. *Mọi dãy đơn điệu tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) đều hội tụ.*

Chứng minh. Cho $\{x_n\}$ là một dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên. Theo nguyên lý supremum, tập $\{x_n\}$ có một supremum m: theo định nghĩa supremum, với mọi số dương ε có một n_ε sao cho $m - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$, và do tính đơn điệu tăng của dãy x_n ta có $x_{n_\varepsilon} \leq x_n$ với mọi $n \geq n_\varepsilon$. Vậy $m - x_n < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_\varepsilon$, có nghĩa rằng $m = \lim x_n$. □

III. Các phần tử của $\mathbb{R}$: $0, 1, 2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1, \ldots$, và $-1, -2, -3, \ldots$ gọi là các số nguyên. Dễ thấy rằng tập $\mathbb{N}$ các số nguyên không có cận trên và không có cận dưới, vì nếu chẳng hạn $\mathbb{N}$ có cận trên thì dãy $1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ phải có một giới hạn m; lúc đó $m - 1 < p$ với một $p \in \mathbb{N}$ và ta sẽ có $m < p + 1$: vô lý. Do đó:

Nguyên lý Archimède. *Bất kỳ a dương và b thế nào cũng có một số nguyên dương n sao cho $b < na$.*

Thật vậy, theo trên phải có một số nguyên dương n sao cho $\dfrac{b}{a} < n$.

Nguyên lý Archimède cho thấy rằng, với mọi $b \in \mathbb{R}$, ta có $\lim \dfrac{|b|}{n} = 0$, vì cho trước $\varepsilon > 0$, bao giờ cũng có n_ε để $|b| < n_\varepsilon \varepsilon$, do đó với mọi $n \geq n_\varepsilon$ thì $|b| < n\varepsilon$ hay $\dfrac{|b|}{n} < \varepsilon$.

IV. Tập $\{x : a < x < b\}$ gọi là *khoảng* (a, b); tập $\{x : a \leq x \leq b\}$ gọi là *đoạn* $[a, b]$. Một dãy đoạn $[a_n, b_n]$ gọi là *thắt lại* nếu $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ và $\lim(b_n - a_n) = 0$.

Nguyên lý Cantor. *Mỗi dãy đoạn thắt lại có một phần tử duy nhất chung cho tất cả các đoạn ấy.*

Chứng minh. Cho $\{[a_n, b_n]\}$ là một dãy đoạn thắt lại. Dãy $\{a_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên (bởi b_1 chẳng hạn) nên có một giới hạn ξ (nguyên lý Weierstrass). Dễ thấy rằng $\xi \in [a_n, b_n]$ với mọi n. Thật vậy, rõ ràng $a_n \leq \xi$ với mọi n; nếu $\xi \notin [a_{n_0}, b_{n_0}]$ với một n_0 nào đó thì ta có $b_{n_0} < \xi$; vì ξ là giới hạn của dãy tăng a_n, nên với n đủ lớn $\xi - a_n < \xi - b_{n_0}$, tức $b_{n_0} < a_n$: vô lý. Mặt khác, nếu có một phần tử khác, ξ', cũng chung cho mọi đoạn $[a_n, b_n]$ thì $|\xi - \xi'| < b_n - a_n$ với mọi n, do đó $\xi = \xi'$ vì $\lim(b_n - a_n) = 0$. □

V. Một dãy $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ gọi là *cơ bản* nếu

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0)\ (\forall n \geq n_0)\ (\forall m \geq n_0)\ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Nguyên lý Cauchy. *Mọi dãy cơ bản hội tụ.*

Chứng minh. Xét một dãy cơ bản $\{x_n\}$. Theo định nghĩa, có một n_1 sao cho $|x_n - x_{n_1}| < \frac{1}{2}$ với mọi $n \geq n_1$. Đặt $a_1 = x_{n_1} - 1$, $b_1 = x_{n_1} + 1$. Sau đó, lấy $n_2 > n_1$ sao cho $|x_n - x_{n_2}| < \frac{1}{4}$ với mọi $n \geq n_2$. Đặt $a_2 = x_{n_2} - \frac{1}{2}$, $b_2 = x_{n_2} - \frac{1}{2}$. Vì $|x_{n_2} - x_{n_1}| < \frac{1}{2}$ nên $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. Lấy $n_3 > n_2$ sao cho $|x_n - x_{n_3} < \frac{1}{8}$ với mọi $n \geq n_3$ và đặt $a_3 = x_{n_3} - \frac{1}{4}$, $b_3 = x_{n_3} + \frac{1}{4}$, v.v. . Tiếp tục mãi, ta được một dãy đoạn $[a_k, b_k]$ thắt lại vì $b_k - a_k < \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{k-1} \to 0$ (nguyên lý Archimede). Theo nguyên lý Cantor, dãy đoạn ấy có một phần tử chung ξ. Với $n \geq n_k$ ta có $x_n \in [a_k, b_k]$, vậy $|\xi - x_k| < b_k - a_k$, từ đó suy ra $\lim x_n = \xi$. □

Ngoài những tính chất kể trên, còn định lý quan trọng sau đây cũng rất thường dùng trong giải tích.

Ta nói một dãy $\{x_n\}$ là *bị chặn* (hay *giới nội)* nếu nó vừa bị chặn trên và bị chặn dưới, tức là

$$(\exists a)\ (\forall n)\ |x_n| \leq a.$$

Nguyên lý Bolzano-Weierstrass. *Mọi dãy vô hạn bị chặn $\{x_n\}$ phải chứa một dãy con $\{x_n\}$ hội tụ.*

Chứng minh. Theo giả thiết $(\forall n) - a \leq x_n \leq a$. Trong hai đoạn $[-a, 0]$ và $[0, a]$ ắt phải có một đoạn chứa vô số các phần tử x_n (nếu không thì dãy x_n chỉ có một số hữu hạn phần tử). Ta gọi đoạn này là $[a_1, b_1]$, và đặt $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. Trong hai đoạn $[a_1, c_1]$ và $[c_1, b_1]$ ắt phải có một đoạn chứa vô số phần tử x_n (lý do như trước). Ta gọi đoạn này là $[a_2, b_2]$ và đặt $c_2 = (a_2 + b_2)/2$ v.v. . Tiếp tục quá trình đó ta được một dãy đoạn thắt lại $[a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ vì $b_k - a_k = a/2^k \to 0$. Theo nguyên lý Cantor, chúng có một phần tử chung ξ. Vì mỗi đoạn $[a_k, b_k]$ chứa vô số phần tử x_n nên ta có thể chọn một $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$, rồi một $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ với $n_2 \neq n_1$, một $x_{n_3} \in [a_3, b_3]$ với $n_3 \neq n_2$, $n_3 \neq n_1$, v.v. . Ta có $|x_{x_k} - \xi| \leq b_k - a_k \to 0$, vậy $\xi = \lim x_n$. □

2.3. GIỚI HẠN TRÊN VÀ GIỚI HẠN DƯỚI. Để tiện trong nhiều vấn đề, người ta thường thêm vào $\mathbb{R}$ hai phần tử mới: $+\infty$ và $-\infty$, gọi là

các *số vô cực*, và qui ước thứ tự và các phép tính đại số như sau giữa hai số vô cực và các số hữu hạn a:

$$-\infty < a < +\infty, \ |\pm\infty| = +\infty,$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty,$$

$$a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \begin{cases} \pm\infty & \text{nếu} \quad a > 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad a = 0 \\ \mp\infty & \text{nếu} \quad a < 0, \end{cases}$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty, (\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty,$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0, \ \infty^r = \infty \text{ với } r > 0.$$

Ngoài ra: $\lim x_n = +\infty$ chẳng hạn, có nghĩa là

$$(\forall a > 0)\ (\exists n_0)\ (\forall n \geq n_0)\ x_n > a.$$

Tập các số thực, có thêm $+\infty$ và $-\infty$, với những qui ước trên, sẽ gọi là *tập các số thực mở rộng* và ký hiệu là $\overline{\mathbb{R}}$.

Bây giờ cho một dãy vô hạn $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$. Với mỗi n, đặt

$$u_n = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \sup_k a_{n+k},$$

$$v_n = \inf\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \inf_k a_{n+k}.$$

Rõ ràng dãy $\{u_n\}$ giảm đơn điệu, còn dãy $\{v_n\}$ tăng đơn điệu cho nên mỗi dãy có một giới hạn (hữu hạn hay vô cực). Dĩ nhiên $\lim u_n = \inf_n u_n$ và $\lim v_n = \sup_n v_n$. Các giới hạn đó gọi là *giới hạn trên* và *giới hạn dưới* của dãy $\{a_n\}$ và được ký hiệu $\overline{\lim}\, a_n$, $\underline{\lim}\, a_n$. Như vậy

$$\overline{\lim}\ a_n = \inf_n (\sup_k a_{n+k}),$$

$$\underline{\lim}\, a_n = \sup_n (\inf_k a_{n+k}).$$

Định lý 1. *Một số α là $\overline{\lim}\ a_n$ khi và chỉ khi với mọi $\alpha' < \alpha$ đều có vô số $a_n > \alpha'$ và với mọi $\alpha'' > \alpha$ chỉ có một số hữu hạn $a_n > \alpha''$. Một số β là $\underline{\lim}\, a_n$ khi và chỉ khi với mọi $\beta' > \beta$, đều có vô số $a_n < \beta'$ và với mọi $\beta'' < \beta$ chỉ có một số hữu hạn $a_n < \beta''$.*

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh cho $\overline{\lim}\ a_n$. Giả sử $\alpha = \overline{\lim}\ a_n$ và $\alpha' < \alpha < \alpha''$. Ta có $\alpha' < \inf\limits_n(\sup\limits_k a_{n+k})$ nên theo tính chất của infimum: $(\forall n)\ \alpha' < \sup\limits_k a_{n+k}$, và theo tính chất của supremum: $(\forall n)\ (\exists k)\ \alpha' < a_{n+k}$, chứng tỏ rằng có vô số $a_n > \alpha'$. Mặt khác, $\alpha'' > \inf\limits_n(\sup\limits_k a_{n+k})$, nên $(\exists n_0)\ \alpha'' > \sup\limits_k a_{n_0+k}$, do đó $(\exists n_0)\ (\forall k)\ \alpha'' > a_{n_0+k}$ tức là chỉ có những a_n với $n \leq n_0$ là có thể $> \alpha''$.

Ngược lại, giả sử một số α có những điều kiện nêu trong định lý, và cho $\bar{\alpha} = \overline{\lim}\ a_n$. Nếu $\bar{\alpha} < \alpha$ thì phải có một số α' sao cho $\bar{\alpha} < \alpha' < \alpha$: khi đó, vì $\alpha' < \alpha$ nên theo giả thiết có vô số $a_n > \alpha'$, nhưng $\alpha' > \bar{\alpha}$ nên theo phần đã chứng minh chỉ có một số hữu hạn $a_n > \alpha'$. Vậy không thể có $\bar{\alpha} < \alpha$. Tương tự như thế, ta cũng chứng minh rằng không thể có $\bar{\alpha} > \alpha$. Vậy $\alpha = \bar{\alpha}$. □

Định lý 2. *Một số l là giới hạn của dãy $\{a_n\}$ khi và chỉ khi* $\overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n = l$.

Chứng minh. Giả sử $l = \lim\ a_n$ tức là với mọi $\alpha' < l$ đều có một n_1 sao cho $a_n > \alpha'$ với mọi $n \geq n_1$, và với mọi $\alpha'' > l$ đều có một n_2 sao cho $a_n < \alpha''$ với mọi $n > n_2$. Như vậy, theo định lý trước, $l = \overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n$.

Ngược lại, giả sử $\overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n = l$. Khi ấy $\inf\limits_k a_{n+k} \leq a_{n+1} \leq \sup\limits_k a_{n+k}$ cho nên $\lim\ (\inf\limits_k a_{n+k}) \leq \lim\ a_{n+1} \leq \lim\ (\sup\limits_k a_{n+k})$, nghĩa là $\underline{\lim}\ a_n \leq \lim\ a_n \leq \overline{\lim}\ a_n$, từ đó $l = \lim\ a_n$. □

3. LỰC LƯỢNG CỦA CÁC TẬP HỢP

3.1. TẬP HỢP TƯƠNG ĐƯƠNG. Khi ta đếm lần lượt các phần tử của một tập A, có thể xảy ra hai trường hợp:

1) Tới một lúc nào đó, ta đếm được hết các phần tử của A. Trong trường hợp này, tập A là *hữu hạn* và số cuối cùng đã đếm tới cho ta biết số lượng phần tử của A.

2) Mãi mãi vẫn còn những phần tử của A chưa đếm tới. Trong trường hợp này, tập A là vô hạn.

Toán học hiện đại thường phải xét nhiều tập vô hạn: tập các số tự nhiên $\{1, 2, 3, \ldots\}$, tập các điểm trên đường thẳng (tập các số thực), tập các hàm số liên tục xác định trên một đoạn, v.v. . Một vấn đề quan trọng là so sánh số lượng các tập đó với nhau: tập nào nhiều phần tử hơn, tập nào ít phần tử hơn, những tập nào tương đương nhau về mặt số lượng.

Đối với các tập hữu hạn thì cách đếm giúp ta giải quyết dễ dàng vấn đề đặt ra. Đối với các tập vô hạn cách đếm không thể dùng để so sánh số lượng được. Nhưng ta nhận xét rằng: thực chất cách đếm chẳng qua là một ánh xạ 1-1 từ tập mà ta đếm vào tập các số tự nhiên. Mặt khác, muốn biết hai tập hữu hạn có cùng số lượng không, thật ra không nhất thiết phải trực tiếp đếm mỗi tập hợp, mà chỉ cần xem có thể làm một ánh xạ 1-1 từ tập này lên tập kia không. Dựa trên các nhận xét đó, người ta giải quyết vấn đề đối với các tập bất kỳ (hữu hạn hay vô hạn) như sau:

Ta nói hai tập A và B là *tương đương* (về số lượng) nếu giữa hai tập ấy có thể thiết lập một phép tương ứng 1-1 (tức là có thể ánh xạ 1-1 tập này lên tập kia).

Ví dụ: 1) Hai tập hữu hạn cùng số lượng thì tương đương.

2) Hai tập $A = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ và $B = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ tương đương vì có thể lập phép tương ứng:

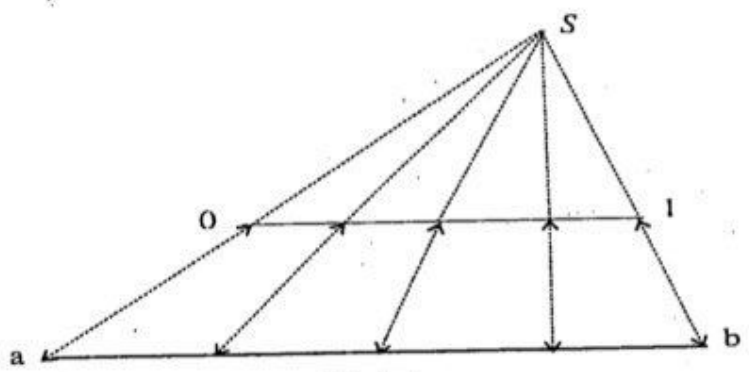
$$n \longleftrightarrow 2n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Điều đáng chú ý ở đây là $B \subset\subset A$: vậy *một tập vô hạn có thể tương đương với một bộ phận thực sự của nó* (điều không thể xảy ra đối với tập hữu hạn).

3) Tập các điểm trong khoảng (0,1) tương đương với tập các điểm trong một khoảng (a, b) bất kỳ: sự tương ứng có thể thực hiện bằng phép vị tự (Hình 1).

4) Tập các điểm trong khoảng (0,1) tương đương với tập các điểm trên toàn đường thẳng, vì có thể cho mỗi điểm x trên đường thẳng ứng với $y = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$ trong khoảng (0,1).

Hai tập cùng tương đương với một tập thứ ba thì dĩ nhiên là tương đương nhau. Do đó, từ hai ví dụ 3) và 4), ta suy ra rằng tập các điểm trong một khoảng bất kỳ là tương đương với tập các điểm trên toàn đường thẳng.



Hình 1

Khi hai tập tương đương nhau, ta bảo rằng chúng cùng một *lực lượng* hay cùng một *bản số*. Nói cách khác lực lượng (hay bản số) của một tập biểu thị một tính chất chung cho nó và tất cả các tập tương đương với nó. Đối với tập hữu hạn, thì lực lượng (bản số) chính là số phần tử của nó. Thành thử, lực lượng (bản số) là khái niệm trực tiếp mở rộng khái niệm số tự nhiên. Lực lượng của một tập A thường được ký hiệu $\bar{\bar{A}}$ (hay card$A$).

Nếu một tập A tương đương với một bộ phận của một tập B, nhưng không tương đương với B, thì ta nói lực lượng của A *nhỏ hơn* lực lượng của B, hay lực lượng của B *lớn hơn* lực lượng của A và viết $\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{B}}$, hay $\bar{\bar{B}} > \bar{\bar{A}}$.

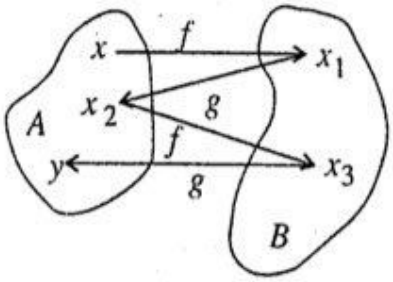
Một vấn đề tự nhiên nảy ra: nếu một tập A tương đương với một bộ phận của tập B và ngược lại tập B cũng tương đương với một bộ phận của A, thì có thể nói gì về hai tập ấy ? Định lý sau đây giải đáp vấn đề này.

Định lý 3 (Cantor-Bernstein). *Nếu tập A tương đương với một bộ phận của tập B và ngược lại tập B cũng tương đương với một bộ phận của tập A thì hai tập tương đương nhau.*

Như vậy, nếu tập A tương đương với một bộ phận của tập B thì chỉ có thể $\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{B}}$ hoặc $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$ (ta viết $\bar{\bar{A}} \leq \bar{\bar{B}}$) . Nói cách khác,

$$\bar{\bar{A}} \leq \bar{\bar{B}},\ \bar{\bar{B}} \leq \bar{\bar{A}} \Rightarrow \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}.$$

Chứng minh*. Theo giả thiết có một phép tương ứng 1-1 f giữa các phần tử của A với các phần tử của một bộ phận của B, và ngược lại cũng có một phép tương ứng 1-1 g giữa các phần tử của B với các phần tử của một bộ phận của A.



Hình 2

Ta qui ước gọi một phần tử x là "bố" của phần tử y hay y là "con" của x, nếu $x \in A$, $y \in B$ và $y = f(x)$ (y ứng với x trong phép tương ứng f) hoặc nếu $x \in B$, $y \in A$ và $y = g(x)$ (y ứng với x trong phép tương ứng g). Một phần tử x (thuộc A hay B) gọi là "tổ tiên" của một phần tử y, nếu có một dãy $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sao cho x là bố của x_1, x_1 là bố của x_2, x_2 là bố của $x_3, \ldots, x_k$ là bố của y. Chẳng hạn trong Hình 2, x là tổ tiên của y đồng thời x cũng là tổ tiên của x_1, x_2, x_3; x_1 là tổ tiên của x_2, x_3, y, v.v. . Bây giờ ta hãy chia A ra làm ba tập con: A_c gồm tất cả các phần tử của A có một số chẵn tổ tiên, A_l gồm tất cả các phần tử của A có một số lẻ tổ tiên và A_∞ gồm tất cả các phần tử của A có vô số tổ tiên. Đồng thời ta cũng theo cách đó chia B ra làm ba tập : B_c, B_l và B_∞. Sau đó ta xác định một phép tương ứng φ như sau giữa các phần tử của A với các phần tử của B: với mỗi phần tử thuộc A_c hay A_∞ thì cho ứng con của nó, với mỗi phần tử thuộc A_l thì cho ứng bố của nó.

Dễ thấy rằng φ là một phép tương ứng 1-1 giữa A và B. Thật vậy, trong phép tương ứng đó, với mỗi $x \in A$ dĩ nhiên ứng một phần tử duy nhất $y \in B$. Ngược lại lấy một phần tử bất kỳ $y \in B$: nếu $y \in B_c$ thì con của nó thuộc A_l, nghĩa là y là bố của một phần tử x nào đó thuộc A_l; nếu $y \in B_l$ thì bố của nó thuộc A_c, nghĩa là y là con của một phần tử x nào đó thuộc A_c; còn nếu $y \in B_\infty$ thì bố của nó thuộc A_∞, nghĩa là y là con của một phần tử x nào đó thuộc A_∞. Thành thử mỗi phần tử $y \in B$ ứng với một phần tử duy nhất $x \in A$ trong phép tương ứng φ. Vậy φ là một phép tương ứng 1-1 giữa A và B. □

Từ định lý này ta suy ra rằng cho trước hai tập A, B, chỉ có thể xảy ra một trong 4 trường hợp:

1. $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$,

2. $\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{B}}$,

3. $\bar{\bar{B}} < \bar{\bar{A}}$,

4. A không tương đương với B, hoặc bộ phận nào của B, và B cũng không tương đương với bộ phận nào của A.

Tuy nhiên, dùng "tiên đề chọn" của Zermelo, có thể chứng minh rằng trường hợp 4 không thể xảy ra. [2] Do đó chỉ xảy ra một trong ba trường hợp trên và vấn đề so sánh lực lượng các tập được giải quyết trọn vẹn.

3.2. TẬP ĐẾM ĐƯỢC. Trong tất cả các tập vô hạn thì tập "bé nhất" (có lực lượng kém nhất) là tập các số tự nhiên: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Lực lượng của tập này gọi là *lực lượng đếm được*, và mọi tập tương đương với nó gọi là *tập đếm được*. Đương nhiên, cũng có thể nói: một tập đếm được là một tập mà ta có thể đánh số được các phần tử của nó thành dãy vô hạn:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_n,\ \ldots$$

Ví dụ: 1) Theo ví dụ 1) ở mục trước, tập $\{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ là đếm được. Ta cũng thấy ngay rằng các tập $\{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$, $\{1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots\}$, v.v... đều đếm được; tập các số nguyên (bao gồm cả số nguyên dương, âm, và số không) cũng là đếm được vì có thể viết dưới dạng:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots, n, -n, \ldots$$

2) *Tập các số hữu tỉ là đếm được.* Thật vậy, một số hữu tỉ có thể viết dưới dạng một phân số tối giản $\frac{p}{q}, q > 0$. Ta hãy tạm gọi tổng $|p| + q$ là "hạng" của số hữu tỉ $\frac{p}{q}$. Rõ ràng số phân số có một hạng cho trước là hữu hạn. Chẳng hạn các phân số có hạng 1 là $\frac{0}{1} = 0$, hạng 2 là $\frac{1}{1}$ và $\frac{-1}{1}$, hạng 3 là $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}$, v.v. . Vậy ta có thể đánh số các số hữu tỉ theo thứ tự hạng tăng dần, tức là: bắt đầu đánh số các số hạng 1, rồi đánh số tiếp các số hạng 2, các số hạng 3, v.v. .

[2] Tiên đề này phát biểu như sau: Cho một họ những tập không rỗng X_α, $\alpha \in A$, bao giờ cũng có một hàm x trên A (gọi là *hàm chọn*) sao cho $x(\alpha) \in X_\alpha$ với mọi $\alpha \in A$. Một dạng tương đương khác của nó là tiên đề Zorn (Chương 6, mục 1.1).

Về mặt trực quan ta có cảm giác như tập các số hữu tỉ nhiều vô kể, vì cho trước hai số thực tùy ý, dù sát nhau bao nhiêu, cũng có một số hữu tỉ xen giữa hai số thực ấy. Thế nhưng như ta vừa chứng minh, cái "vô số" của tập các số hữu tỉ cũng chỉ ngang với cái vô số của tập các số tự nhiên!

Việc lực lượng đếm được là lực lượng bé nhất của các tập vô hạn được xác nhận bởi hai mệnh đề sau đây:

Định lý 4. *Bất cứ tập vô hạn nào cũng có một bộ phận là tập đếm được.*

Chứng minh. Thật vậy, cho M là một tập vô hạn. Ta hãy lấy một phần tử bất kỳ $a_1 \in M$, rồi một phần tử $a_2 \in M \setminus \{a_1\}$, rồi một phần tử $a_3 \in M \setminus \{a_1, a_2\}$, v.v. . Vì M vô hạn, nên điều đó có thể tiếp tục mãi và ta thu được tập đếm được $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset M$. □

Định lý 5. *Một bộ phận của một tập đếm được thì phải là hữu hạn hay đếm được.*

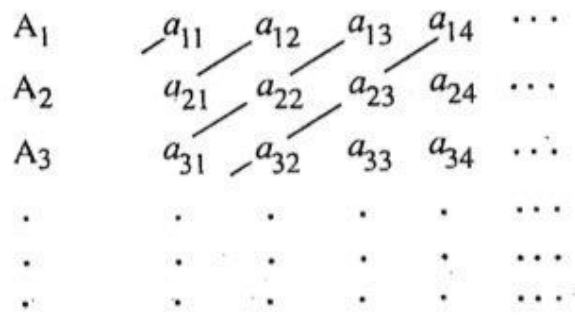
Chứng minh. Thật vậy, cho B là một bộ phận của tập đếm được $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Gọi a_{i_1} là phần tử đầu tiên của B mà ta gặp trong dãy $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, a_{i_2} là phần tử thứ hai của B trong dãy đó, v.v. . Nếu trong các số $i_1, i_2, \ldots$, có một số lớn nhất, ví dụ i_p, thì $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p}\}$ là hữu hạn. Còn nếu trái lại dãy $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$, kéo dài vô tận thì $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots\}$ là đếm được. □

Định lý 6. *Hợp của một họ hữu hạn hay đếm được tập đếm được cũng là tập đếm được.*

Chứng minh. Cho một dãy tập đếm được: $A_1, A_2, A_3 \ldots$ Ta hãy viết các phần tử của mỗi tập ấy thành một dãy và xếp đặt các dãy thành một bảng như dưới đây. Rõ ràng trên mỗi đường chéo (có mũi tên) chỉ có một số hữu hạn phần tử : trên đường chéo thứ nhất chỉ có a_{11}, trên đường chéo thứ hai chỉ có: a_{21}, a_{12}, v.v. , nói chung trên đường chéo thứ n chỉ có n phần tử (các a_{pq} mà $p + q = n + 1$).

Vậy ta có thể lần lượt đánh số các phần tử trên đường chéo thứ nhất, rồi đến đường chéo thứ hai, v.v. . □

Định lý 7. *Khi thêm một tập hữu hạn hay đếm được vào một tập vô hạn M, ta không làm thay đổi lực lượng của tập M.*



Chứng minh. Cho N là tập thu được khi thêm vào M một tập A hữu hạn hay đếm được. Theo Định lý 4, có thể lấy một tập đếm được $B \subset M$. Đặt $M' = M \setminus B$, ta có $M = M' \cup B$, $N = M' \cup B \cup A$. Theo định lý trước $B \cup A$ cũng là đếm được, cho nên có thể lập một phép tương ứng 1-1 giữa B và $B \cup A$. Sau đó chỉ cần lập một phép tương ứng 1-1 giữa M' và chính M', ta sẽ có một phép tương ứng 1-1 giữa M và N. Như vậy M và N cùng lực lượng. □

Theo định lý này, ta thấy rằng tập các điểm thuộc một khoảng (a, b) tương đương với tập các điểm thuộc đoạn $[a, b]$. Vậy tập các điểm thuộc đoạn $[a, b]$ tương đương với tập các điểm trên toàn đường thẳng (xem ví dụ 4 ở mục 1).

Định lý 8. *Tập tất cả các dãy hữu hạn có thể thành lập được với các phần tử của một tập đếm được là đếm được.*

Nói rõ hơn, cho $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ là một tập đếm được, S là tập tất cả các dãy có dạng $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m})$ trong đó m là một số tự nhiên bất kỳ, a_{i_k} $(k = 1, 2, \ldots, m)$ là những phần tử (không nhất thiết phân biệt) của A. Ta khẳng định rằng S là đếm được.

Chứng minh. Gọi S_m là tập các dãy gồm đúng m phần tử của A. Vì

$$S = \cup_{m=1}^{\infty} S_m$$

nên theo Định lý 5 chỉ cần chứng minh rằng mỗi S_m là đếm được. Với S_1 điều đó hiển nhiên vì rằng $S_1 = A$. Ta hãy giả thiết rằng điều đó đúng với S_m (tức S_m đếm được), và chứng minh cho S_{m+1}.

Cho a_k là một phần tử xác định của A, và S_{m+1}^k là tập tất cả các dãy có dạng $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}, a_k)$. Giữa S_{m+1}^k va S_m rõ ràng có sự tương

ứng 1-1:

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_m}, a_k) \longleftrightarrow (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}).$$

Mà S_m đã đếm được thì S_{m+1}^k cũng đếm được. Do đó S_{m+1} cũng đếm được, vì

$$S_{m+1} = \cup_{k=1}^{\infty} S_{m+1}^k. \qquad \square$$

Hệ quả 1. *Tập tất cả các đa thức* $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ (n *bất kỳ) với các hệ số* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *hữu tỉ, là đếm được.*

Thật vậy, các đa thức đó tương ứng 1-1 với các dãy số hữu tỉ $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Vì tập các số hữu tỉ là đếm được nên theo định lý trên, tập các đa thức đó cũng đếm được. $\square$

Hệ quả 2. *Tập các số đại số là đếm được.*

Một số đại số là nghiệm số của một đa thức với những hệ số hữu tỉ. Vì tập các đa thức này là đếm được, mà mỗi đa thức chỉ có một số hữu hạn nghiệm số, nên tập các số đại số chỉ có thể là hữu hạn hay đếm được. Nhưng nó không thể hữu hạn vì nó bao hàm tập các số tự nhiên, vậy nó phải đếm được. $\square$

3.3. LỰC LƯỢNG CONTINUM. Qua các ví dụ trên kia, ta đã đi từ tập các số tự nhiên đến tập các số hữu tỉ, rồi đến tập các đại số, mỗi tập bao gồm vô số phần tử mới so với các tập đã xét trước, thế mà lúc nào ta cũng chỉ có những tập đếm được. Vậy thì có tập nào không đếm được không ?

Định lý 9. *Tập các số thực là không đếm được.*

Chứng minh. Vì tập các điểm thuộc đoạn [0,1] tương đương với tập các điểm trên toàn đường thẳng, ta chỉ cần chứng minh rằng tập các điểm thuộc đoạn [0,1] là không đếm được.

Giả sử trái lại rằng tập đó đếm được, nghĩa là có thể đánh số thành dãy: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Ta hãy chia đoạn [0,1] thành ba đoạn bằng nhau. Trong ba đoạn đó phải có một đoạn không chứa x_1: cho đoạn ấy là Δ_1. Ta lại chia Δ_1 ra ba đoạn bằng nhau. Trong ba đoạn đó phải có một đoạn không chứa x_2: cho đoạn ấy là Δ_2. Ta lại chia Δ_2 ra ba đoạn bằng nhau, v.v. . Tiếp tục mãi, ta sẽ có một dãy đoạn $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots$, với độ dài $|\Delta_n| = \dfrac{1}{3^n}$ và với $x_n \notin \Delta_n$. Vì $|\Delta_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ nên đó là một dãy đoạn thắt lại và theo nguyên lý Cantor, phải có một điểm ξ

chung cho tất cả các đoạn ấy. Cố nhiên $\xi \in [0,1]$, vậy ξ phải trùng với một x_{n_0} nào đó. Nhưng $\xi \in \Delta_n$ với mọi n, cho nên $x_{n_0} \in \Delta_{n_0}$. Điều này trái với cách xây dựng các đoạn Δ_n. Do đó giả thiết rằng tập các điểm thuộc [0,1] đếm được là vô lý. □

Định lý vừa chứng minh cho thấy rằng lực lượng của tập số thực lớn hơn lực lượng đếm được. Người ta gọi nó là *lực lượng continum* hay *lực lượng c*.

Ở trên ta đã biết rằng tập các số hữu tỉ là đếm được. Vậy theo Định lý 7, tập các sô vô tỉ cũng có lực lượng c.

Mặt khác, ta cũng đã thấy rằng tập các số đại số bao hàm cả số hữu tỉ và số vô tỉ đại số là đếm được. Vậy ắt có những số thực không phải là số đại số. Người ta gọi chúng là những *số siêu việt*. Chẳng hạn, các số $\pi, e, 2^{\sqrt{2}}$ đều là siêu việt.

Vì tập các số đại số là đếm được, nên theo Định lý 7, tập các số siêu việt cũng có lực lượng c. Thành thử số vô tỉ nhiều hơn số hữu tỉ, số siêu việt nhiều hơn số đại số !

Định lý 10 (Cantor). *Cho bất cứ tập A nào thì tập tất cả các bộ phận của A cũng có lực lượng lớn hơn lực lượng của A.*

Chứng minh. Gọi M là tập tất cả các bộ phận của A. Chẳng hạn nếu $A = \{a, b, c\}$, thì M gồm có: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A$. Trước hết ta hãy chứng minh rằng A không tương đương với M. Muốn thế, giả sử trái lại rằng A tương đương với M, và cho f là phép tương ứng 1-1 giữa hai tập ấy. Với mỗi phần tử $x \in A$ ứng một phần tử xác định của M mà ta sẽ ký hiệu là $f(x)$; ngược lại, mỗi phần tử của M là $f(x)$ cho một phần tử xác định $x \in A$. Vì $f(x)$ là một phần tử của M, tức là một bộ phận của A nên có thể xảy ra tình trạng $x \in f(x)$. Ta sẽ gọi một phần tử x sao cho $x \in f(x)$ là "xấu số". Còn nếu $x \notin f(x)$ thì x gọi là "tốt số". Gọi S là tập tất cả các phần tử tốt số của A. Vì rằng $S \in M$ nên $S = f(x_0)$ với một $x_0 \in A$. Ta thử xem x_0 là xấu số hay tốt số ? Nếu x_0 là xấu số thì $x_0 \in f(x_0) = S$, vô lý vì S chỉ chứa những phần tử tốt số. Còn nếu x_0 là tốt số thì $x_0 \notin f(x_0) = S$: cũng vô lý vì x_0 đã tốt số thì phải thuộc S. Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng A không thể tương đương với M.

Bây giờ ta chứng minh rằng A tương đương với một bộ phận của

M. Thật vậy, gọi M' là tập các bộ phận của A chỉ gồm một phần tử duy nhất thì $M' \subset M$ và rõ ràng M' và A tương đương nhau, vì mỗi $x \in A$ có thể cho ứng với tập $\{x\} \in M'$.

Tóm lại, $\bar{\bar{M}} > \bar{\bar{A}}$, và định lý đã được chứng minh. □

Như vậy, cho trước một tập bất kỳ, bao giờ cũng có thể thành lập một tập có lực lượng lớn hơn. Do đó, không có lực lượng (bản số) nào là lớn nhất cả.

Một câu hỏi nảy ra: lực lượng c phải chăng là bé nhất trong tất cả các lực lượng của những tập không đếm được ? Nói khác đi, có chăng một lực lượng trung gian giữa lực lượng đếm được và lực lượng c ? Trong suốt mấy chục năm ở nửa đầu thế kỷ XX các nhà toán học không trả lời được câu hỏi đó, mà chỉ đưa ra giả thuyết không có lực lượng nào như thế cả ("giả thuyết continum"). Năm 1959 Gödel chứng minh được rằng giả thuyết continum không mâu thuẫn với các tiên đề thường được thừa nhận trong lý thuyết tập hợp, trừ khi các tiên đề này vốn đã chứa mâu thuẫn rồi. Năm 1963, Cohen khép lại vấn đề bằng cách chứng minh rằng giả thuyết continum không thể chứng minh cũng không thể bác bỏ được, mà chỉ có thể nhận nó hay nhận phủ định của nó làm một tiên đề.

3.4*. TẬP HỢP CÓ LỰC LƯỢNG c. Từ sự kiện tập $\mathbb{R}$ có lực lượng c có thể suy ra hàng loạt tập khác có lực lượng c.

Định lý 11. *Tập tất cả các dãy vô tận*

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \tag{7}$$

trong đó $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *là những số thực tùy ý, có lực lượng* c.

Chứng minh. Ta hãy lập một phép tương ứng 1-1 giữa tập tất cả các số thực và tập các số thực trong khoảng (0,1) (điều này làm được vì hai tập đó tương đương). Với mỗi số thực trong khoảng (0,1) lại có thể cho ứng một phân số thập phân vô tận, và cách tương ứng đó là 1-1, nếu ta qui ước không dùng những phân số tuần hoàn với chu kỳ 9 (chẳng hạn số $1/2$ ứng với 0,500..., chứ không ứng với 0,499...). Như vậy, với mỗi số thực ξ_n ứng một phân số thập phân $t_n = 0, a_{1n}\, a_{2n}\, a_{3n} \ldots a_{nn} \ldots$ Ta hãy viết các số $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ thành bảng

$$
\begin{array}{llllllll}
t_1 = 0, & a_{11} \to & a_{21} & a_{31} \to & \dots & a_{n1} & \dots \\
t_2 = 0, & a_{12} \swarrow & a_{22} \nearrow & a_{32} & \dots & a_{n2} & \dots \\
t_3 = 0, & \downarrow a_{13} \nearrow & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
t_n = 0, & a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

và cho ứng với dãy $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ số thực

$$\xi = 0,\ a_{11}\ a_{21}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{22}\ a_{31}\ a_{41}\ a_{32}\ a_{23}\ a_{14}\ \dots$$

trong đó ở phần thập phân ta viết liên tiếp các chữ số theo thứ tự chỉ rõ bằng các mũi tên. Rõ ràng với hai dãy x, x' khác nhau thì ứng hai số ξ, ξ' khác nhau. Vậy tập các dãy (7) tương đương với một bộ phận của tập các số thực. Ngược lại, tập các số thực cũng tương đương với một bộ phận của tập các dãy (1) vì có thể cho ứng với mỗi số thực ξ dãy $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$. Do đó theo Định lý 3, tập các dãy (7) tương đương với tập các số thực. □

Bằng cách tương tự (có phần đơn giản hơn) ta cũng chứng minh được rằng: tập các dãy k số thực

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \tag{8}$$

(k bất kỳ nhưng cố định) có lực lượng c.

Mỗi dãy (8) thường gọi là một điểm (vectơ) của không gian k chiều ($\mathbb{R}^k$). Vậy: *tập các điểm trong không gian k chiều (k bất kỳ) có lực lượng c.* Nói riêng *tập các điểm trong mặt phẳng (hay tập các số phức) có lực lượng c.*

Định lý 12. *Tập tất cả các dãy vô tận*

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \tag{9}$$

trong đó các ξ_i lấy tùy ý hai giá trị 0 và 1, có lực lượng c.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh rằng tập các số thực trong đoạn [0,1] tương đương với một bộ phận của tập các dãy (9): khi ấy, vì tập các dãy (9) chỉ là một bộ phận của tập các dãy (7), nên theo các định lý trên, tập các dãy (9) sẽ có lực lượng c.

Cho một số tùy ý $t \in [0,1]$. Ta hãy cho ứng với nó một dãy (9) như sau. Chia đoạn $D_0 = [0,1]$ ra hai đoạn nhỏ bằng nhau: nếu t thuộc đoạn nhỏ bên trái thì đặt $\xi_1 = 0$, và gọi D_1 là đoạn nhỏ ấy, nếu trái lại thì đặt $\xi_1 = 1$ và gọi D_1 là đoạn nhỏ bên phải. Chia D_1 ra hai đoạn nhỏ bằng nhau: nếu t thuộc đoạn nhỏ bên trái thì đặt $\xi_2 = 0$ và gọi D_2 là đoạn nhỏ ấy, nếu trái lại thì đặt $\xi_2 = 1$ và gọi D_2 là đoạn nhỏ bên phải. Chia D_2 ra hai đoạn nhỏ bằng nhau, v.v. và cứ tiếp tục theo cách đó. Như thế ứng với mỗi $t \in [0,1]$ có một dãy $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ hoàn toàn xác định và ứng với hai t, t' khác nhau dĩ nhiên có hai dãy x, x' khác nhau. Vậy tập [0, 1] tương đương với một bộ phận của tập các dãy (9). □

Dĩ nhiên Định lý 12 vẫn đúng nếu thay các giá trị 0 và 1 bằng hai số bất kỳ.

Hệ quả. *Tập tất cả các dãy vô tận*

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots,) \tag{10}$$

trong đó các ξ_1 là những phần tử tùy ý của một tập P, với $2 \leq \bar{\bar{P}} \leq c$, có lực lượng c.

Thật vậy, bao giờ cũng có thể giả thiết rằng P là một bộ phận của tập số thực, bao gồm 0 và 1. Khi đó tập các dãy (10) chứa tập các dãy (9) và là một bộ phận của tập các dãy (7). Do đó theo ba định lý trước, tập các dãy (10) có lực lượng c. □

Nói riêng, nếu $P = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ thì ta có sự kiện: *tập tất cả các dãy vô tận số tự nhiên : $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ có lực lượng c.*

Định lý 13. *Tập các hàm số thực liên tục xác định trên một đoạn $[p,q]$ có lực lượng c.*

Chứng minh. Vì tập các điểm hữu tỉ trên $[p,q]$ là đếm được nên nó có thể xếp thành dãy $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ Cho $x(t)$ là một hàm số liên tục trên $[p,q]$. Đặt

$$\xi = x(r_1),\ \xi_2 = x(r_2), \ldots, \xi_n = x(r_n), \ldots$$

ta thấy rằng hàm số $x(t)$ là hoàn toàn xác định bởi dãy số $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, vì nếu biết dãy số này thì giá trị của hàm số tại một điểm bất kỳ $t \in [p,q]$ sẽ bằng $x(t) = \lim\limits_{k\to\infty} x(r_{n_k})$, trong đó r_{n_k} là một dãy

điểm hữu tỉ dần tới t. Vậy tập các hàm số liên tục trên $[p, q]$ tương đương với một bộ phận của tập các dãy (1) và do đó theo Định lý 13 tương đương với một bộ phận của tập các số thực. Mặt khác mỗi số thực a ứng với một hàm số liên tục $x(t) \equiv a$, nên tập các số thực lại tương đương với một bộ phận của tập các hàm số liên tục trên $[p, q]$. Vậy theo Định lý 3, tập các hàm số liên tục tương đương với tập các số thực. □

3.5*. LỰC LƯỢNG 2^α. Để kết thúc vấn đề lực lượng các tập, ta hãy tìm hiểu thêm về thứ bậc trên tập các bản số.

Cho A là một tập bất kỳ, S là tập tất cả các tập con (bộ phận) của A.

Nếu A là hữu hạn và gồm n phần tử : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thì với mỗi bộ phận M của A ta có thể cho ứng dãy $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ trong đó $\xi_i = 0$ nếu $a_i \notin M$ và $\xi_i = 1$ nếu $a_i \in M$. Phép tương ứng đó rõ ràng là 1-1 cho nên tập S tương đương với tập tất cả các dãy $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ có thể thành lập được bằng những số 0 và 1. Nhưng dễ thấy rằng số dãy này bằng 2^n, vì mỗi dãy gồm n số mà mỗi số có thể lấy hai giá trị. Vậy S gồm 2^n phần tử: $\bar{\bar{S}} = 2^n$.

Mở rộng ký hiệu đó, ta qui ước một cách tổng quát rằng : nếu lực lượng của A là α thì lực lượng của S (tập các bộ phận của A) sẽ được ký hiệu 2^α.

Theo Định lý 10, ta đã biết $2^\alpha > \alpha$, và dựa vào định lý đó ta có thể xây dựng những lực lượng lớn dần: $\alpha, 2^\alpha, 2^{2^\alpha}$, v.v. . Điều này tất nhiên đưa đến câu hỏi: thế thì giữa α và 2^α có những lực lượng trung gian gì ? Nếu α bằng một số tự nhiên n thì các lực lượng trung gian ấy là $n + 1, \ldots, 2^n - 1$, cho nên câu hỏi chỉ đặt ra với α siêu hạn (không hữu hạn). Khi α là lực lượng đếm được, đây chính là vấn đề đã nêu ra ở mục 3.3, cho nên giả thuyết cho rằng không có lực lượng trung gian nào giữa α và 2^α (α siêu hạn bất kỳ) thường được gọi là *giả thuyết continum rộng*. Năm 1963 Cohen chứng minh được rằng, cũng như giả thuyết continum hẹp, giả thuyết continum rộng không thể chứng minh hay bác bỏ được trong phạm vi toán học hiện đại.

Sau đây là hai sự kiện đơn giản.

Định lý 14. *Ta có* $c = 2^a$ (a: lực lượng đếm được).

Chứng minh. Giả sử tập A đếm được và gồm những phần tử a_1, $a_2,\ldots, a_n, \ldots$ Bằng lập luận tương tự như đối với trường hợp A hữu hạn đã xét ở trên, có thể chứng minh rằng tập S (tập các bộ phận A) tương đương với tập các dãy vô tận $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ có thể thành lập được với hai số 0 và 1. Do đó theo Định lý 12, $S = c$ hay $2^{\alpha} = c$.

Định lý 15. *Tập tất cả các hàm số thực xác định trên một đoạn* $[p, q]$ *có lực lượng* $f = 2^c$.

Chứng minh. Với mỗi tập $M \subset [p, q]$ ta hãy cho ứng hàm số $x(t)$ xác định trên $[p, q]$ như sau: $x(t) = 0$ nếu $t \notin M$, $x(t) = 1$ nếu $t \in M$. Phép tương ứng đó là 1-1, chứng tỏ rằng tập S các bộ phận của $[p, q]$ tương đương với tập các hàm số $x(t)$ xác định trên $[p, q]$ và lấy giá trị trong tập $\{0, 1\}$. Do đó $2^c \leq f$. Mặt khác, với mỗi hàm số thực $x(t)$ xác định trên $[p, q]$ ta có thể cho ứng tập $\{(t, x) : p \leq t \leq q,\ x = x(t)\}$ là một bộ phận của mặt phẳng. Phép tương ứng đó cũng là 1-1, cho nên tập các hàm số thực trên $[p, q]$ tương đương với một bộ phận của tập các bộ phận của mặt phẳng. Nhưng tập các bộ phận của mặt phẳng có lực lượng 2^c, vậy $f \leq 2^c$, và do đó $f = 2^c$. □

Để ý rằng mỗi điểm $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ trong không gian k chiều có thể xem như một hàm số $x(t)$ xác định trên tập $\{1, 2, \ldots, k\}$ $(x(1) = \xi_1,\ x(2) = \xi_2, \ldots, x(k) = \xi_n)$: mỗi dãy $x = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ có thể xem như một hàm số $x(t)$ xác định trên tập $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Các kết quả trên cho thấy rằng: *tập các hàm số thực xác định trên một tập hữu hạn hay đếm được thì có lực lượng c; tập các hàm số thực xác định trên một continum thì có lực lượng* 2^c.

4. ĐẠI SỐ TẬP HỢP

4.1. ĐẠI SỐ. Trong phần này ta giả thiết các tập nói đến đều là bộ phận của một tập cho trước X (không gian).

Một lớp tập gọi là *kín* đối với một phép toán nếu kết quả thực hiện phép toán ấy trên những tập của lớp bao giờ cũng cho một tập của lớp. Một *đại số* (hay *trường*) là một lớp chứa X và $\emptyset$ và kín đối với mọi

phép toán hữu hạn về tập (phép hợp và phép giao một số hữu hạn tập, phép trừ và phép trừ đối xứng hai tập).

Định lý 16. *Một lớp $\mathcal{C}$ là một đại số khi và chỉ khi $\mathcal{C}$ không rỗng và thỏa mãn các điều kiện*

a) $A \in \mathcal{C},\ B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C},$

b) $A \in \mathcal{C} \Rightarrow (A)^c = X \setminus A \in \mathcal{C}.$

Nói cách khác, có thể định nghĩa một đại số tập là một lớp không rỗng và kín đối với phép hợp hai tập và đối với phép lấy phần bù.

Chứng minh. Dĩ nhiên một đại số $\mathcal{C}$ bao giờ cũng không rỗng và thỏa mãn các điều kiện nêu ra. Ngược lại, giả sử một lớp $\mathcal{C} \neq \emptyset$ thỏa mãn hai điều kiện a) và b). Với mọi $A \in \mathcal{C},\ B \in \mathcal{C}$ ta có, theo b), $A^c \in \mathcal{C},\ B^c \in \mathcal{C}$, rồi theo a) $A^c \cup B^c \in \mathcal{C}$, do đó theo b) $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{C}$, chứng tỏ rằng $\mathcal{C}$ kín đối với phép giao hai tập. Do đó và do điều kiện a), ta suy ra bằng qui nạp rằng $\mathcal{C}$ kín đối với phép hợp hoặc giao một số hữu hạn tập. Mặt khác, vì $A \setminus B = A \cap B^c$ nên theo b), nếu $A \in \mathcal{C},\ B \in \mathcal{C}$ thì $A \setminus B \in \mathcal{C}$, và do đó, theo a) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{C}$. Cuối cùng, vì $\mathcal{C}$ không rỗng nên có một tập $A \in \mathcal{C}$, và ta có $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{C}$, do đó $X = \emptyset^c \in \mathcal{C}$. Vậy $\mathcal{C}$ đúng là một đại số tập. □

Ví dụ: 1) Lớp tất cả các tập con của X là một đại số.

2) Nếu $A \subset X$ thì $\mathcal{C} = \{X, A, A^c, \emptyset\}$ là một đại số.

Định lý 17. *Cho trước một lớp tập $\mathcal{M} \neq \emptyset$, bao giờ cũng tồn tại một đại số duy nhất $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ bao hàm $\mathcal{M}$ và chứa trong tất cả các đại số khác bao hàm $\mathcal{M}$.*

Đại số $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ gọi là *đại số nhỏ nhất bao hàm* $\mathcal{M}$ hay *đại số sinh bởi* $\mathcal{M}$.

Chứng minh. Bao giờ cũng tồn tại ít nhất một đại số bao hàm $\mathcal{M}$; đó là lớp tất cả các tập con của X. Ta hãy xét tất cả các đại số bao hàm $\mathcal{M}$ và gọi $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ là tương giao của chúng. Rõ ràng $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ cũng là một đại số bao hàm $\mathcal{M}$ vì nếu $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ thì A, B và do đó $A \cup B$ và A^c phải thuộc mọi đại số bao hàm $\mathcal{M}$, tức là $A \cup B \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$, và $A^c \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$. Hơn nữa, $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ là nhỏ nhất vì nó chứa trong tất cả các đại số bao hàm $\mathcal{M}$, và nó là duy nhất vì nếu có một đại số $\mathcal{C}'(\mathcal{M})$ cũng có tính chất như $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ thì một mặt $\mathcal{C}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{C}'(\mathcal{M})$, một mặt $\mathcal{C}'(\mathcal{M}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{M})$ nên

$\mathcal{C}'(\mathcal{M}) = \mathcal{C}(\mathcal{M})$. □

Chú ý. Một lớp tập, chứa ít nhất một tập, và kín đối với phép giao và phép trừ đối xứng cũng được gọi là một *vành*. Nếu ta coi phép giao là phép nhân, phép trừ đối xứng là phép cộng, thì một vành tập là một vành theo nghĩa đại số thông thường. Một vành bao giờ cũng chứa tập $\emptyset$ (vì ít nhất nó chứa một tập A, và do đó phải chứa $A \setminus A = \emptyset$), và một đại số tập chẳng qua là một vành chứa tập X (đóng vai trò đơn vị).

4.2. σ-ĐẠI SỐ. Một *σ-đại số* (hay *σ-trường*) là một lớp tập chứa $X, \emptyset$ và kín đối với mọi phép toán hữu hạn hay đếm được về tập. Dĩ nhiên một σ-đại số cũng là một đại số.

Ngược lại, một đại số kín đối với phép hợp đếm được thì sẽ là một σ-đại số. Nói rõ hơn:

Định lý 18. *Một lớp $\mathcal{F}$ là một σ-đại số khi và chỉ khi $\mathcal{F}$ không rỗng và thỏa mãn các điều kiện*

a) $$A_i \in \mathcal{F}\ (i = 1, 2, 3, \ldots) \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

b) $$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{F}.$$

Thật vậy, $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c$, cho nên nếu $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ thì từ a) và b) ta suy ra ngay $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. □

Ta cũng chứng minh dễ dàng:

Định lý 19. *Cho trước một lớp tập $\mathcal{M} \neq \emptyset$, bao giờ cũng tồn tại một σ-đại số duy nhất $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ bao hàm $\mathcal{M}$ và chứa trong tất cả các σ-đại số khác bao hàm $\mathcal{M}$.* □

$\mathcal{F}(\mathcal{M})$ gọi là *σ-đại số nhỏ nhất bao hàm $\mathcal{M}$*, hay *σ-đại số sinh ra bởi $\mathcal{M}$*. Dĩ nhiên, nếu $\mathcal{C} \supset \mathcal{M}$ mà $\mathcal{C}$ là một σ-đại số thì $\mathcal{C} \supset \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

BÀI TẬP

Khái niệm tập hợp

1. Cho G_α, F_α $(\alpha \in A)$ là những tập con của X sao cho $F_\alpha = X \setminus G_\alpha$. Chứng minh rằng hợp của tất cả G_α bằng X khi và chỉ khi giao của tất cả các F_α rỗng .

2. Chứng minh rằng nếu $A \Delta C = B$ thì $C = A \Delta B$.

3. *Giới hạn trên và giới hạn dưới* của một dãy tập $\{A_n\}$ là các tập (theo thứ tự)

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Chứng minh rằng giới hạn trên là tập các phần tử thuộc vô số các A_n, còn giới hạn dưới là tập các phần tử thuộc mọi A_n, chỉ trừ một số hữu hạn.

Tập hợp các số thực

4. Chứng minh: $\overline{\lim_{n\to\infty}} (-a_n) = - \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$;

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n.$$

5. Chứng minh $\inf\limits_{t\in T} \sup\limits_{s\in S} a_{s,t} \ge \sup\limits_{s\in S} \inf\limits_{t\in T} a_{s,t}$,

(S, T là hai tập bất kỳ cho trước, với mỗi $s \in S$, $t \in T$, $a_{s,t}$ là một số thực cho trước).

Lực lượng của các tập hợp

6. Chứng minh rằng tập các đoạn thẳng trên đường thẳng số thực mà có hai đầu mút hữu tỉ là đếm được.

7. Chứng minh rằng tập các vectơ n chiều có mọi thành phần hữu tỉ là đếm được.

8. Chứng minh rằng một tập những khoảng rời nhau trên đường thẳng thì cùng lắm là đếm được (nghĩa là hữu hạn hoặc đếm được).

Chỉ dẫn: Lấy trong mỗi khoảng một điểm hữu tỉ .

9. Chứng minh rằng tập các điểm gián đoạn của một hàm số đơn điệu thì cùng lắm là đếm được.

Chỉ dẫn: Các khoảng $[f(c-0),\ f(c+0)]$ (c là một điểm gián đoạn) đối với một hàm đơn điệu thì phải rời nhau.

Đại số tập hợp

10. Chứng minh rằng một lớp $\mathcal{C}$ (những tập con của X) là một đại số khi và chỉ khi $\mathcal{C}$ không rỗng và

a) $A \in \mathcal{C},\ B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$,

b) $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$.

11. Một *vành tập* là một lớp $\mathcal{R}$ không rỗng, kín đối với phép hợp và phép trừ hai tập. Chứng minh rằng nếu $\mathcal{R}$ là một vành tập và $\mathcal{C}$ là lớp tất cả các tập A sao cho: hoặc $A \in \mathcal{R}$ hoặc $A^c \in \mathcal{R}$, thì $\mathcal{C}$ là một đại số.

12. Chứng minh rằng họ tất cả các tập $A \subset X$ sao cho A hoặc A^c hữu hạn, làm thành một đại số. Họ tất cả các tập $A \subset X$ sao cho A hoặc A^c cùng lắm là đếm được, làm thành một σ-đại số.

13. Cho $\mathcal{M}$ là họ tất cả các tập con chỉ gồm một phần tử của X. Tìm $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ (đại số nhỏ nhất bao hàm $\mathcal{M}$). Tìm $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ (σ-đại số nhỏ nhất bao hàm $\mathcal{M}$). (Xem bài tập 11).

14. Cho A là một tập con của X. Tìm $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ khi $\mathcal{M} = \{A\}$, khi $\mathcal{M} = \{M \subset X : M \supset A\}$. Tìm $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ khi $\mathcal{M}$ là họ tất cả các tập con của X gồm vừa đúng hai phần tử.

Chương 2

KHÔNG GIAN METRIC

1. KHÁI NIỆM METRIC VÀ SỰ HỘI TỤ

1.1. ĐỊNH NGHĨA. Phép toán cơ bản của giải tích là tiến qua giới hạn. Nhưng muốn định nghĩa giới hạn ta dựa vào khái niệm khoảng cách: chẳng hạn ta nói dãy điểm $\{x_n\}$ dần tới giới hạn là điểm x khi nào khoảng cách giữa x_n và x nhỏ dần và có thể trở thành nhỏ hơn bất kỳ số $\varepsilon > 0$ nào cho trước.

Nhiều sự kiện quan trọng của giải tích thật ra chỉ dựa trên các tính chất của khoảng cách, mà không có liên quan gì tới những tính chất khác của đường thẳng, mặt phẳng hoặc không gian ba chiều thông thường. Vì vậy, muốn khảo sát bản chất các sự kiện đó, người ta trừu xuất khái niệm khoảng cách để đi tới khái niệm *không gian metric*.

Đại thể, một không gian metric là một tập trong đó có xác định "khoảng cách" giữa từng cặp phần tử, với những tính chất thông thường của khoảng cách hình học.

Chính xác hơn, một tập X (mà các phần tử có thể là những đối tượng bất kỳ) được gọi là một *không gian metric* nếu: a) với mỗi cặp phần tử x, y của X đều có xác định, theo một qui tắc nào đó, một số thực $\rho(x, y)$, gọi là "khoảng cách giữa x và y"; b) qui tắc nói trên thỏa mãn các điều kiện (tiên đề) sau đây:

1. $\rho(x,y) > 0$ nếu $x \neq y$;

   $\rho(x,y) = 0$ nếu $x = y$.

2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ với mọi x, y (tính đối xứng).

3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ với mọi x, y, z (bất đẳng thức tam giác).

Hàm số $\rho(x,y)$ gọi là *metric* của không gian. Các phần tử của X, dù là những đối tượng gì, cũng thường gọi là điểm của không gian theo cách nói trong hình học.

1.2. VÍ DỤ. 1) Một tập M bất kỳ của đường thẳng $\mathbb{R}$, với khoảng cách thông thường $\rho(x,y) = |x-y|$ (độ dài đoạn nối x và y), là một không gian metric.

2) Tổng quát hơn, trong không gian k chiều $\mathbb{R}^k$, có thể xác định khoảng cách giữa hai điểm $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ và $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ là:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - \eta_i)^2}. \tag{1}$$

là không gian metric, vì rõ ràng hai tiên đề 1 và 2 được thỏa mãn, còn tiên đề 3 thì có thể chứng minh dễ dàng như sau. Với mọi số thực a_i, b_i, ta có hằng đẳng thức:

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\Big)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(a_i b_j - a_j b_i)^2,$$

Cauchy

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\Big).$$

$x = (\xi_1, .., \xi_k)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$, $z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$. Đặt $\xi_i - \zeta_i =$

a_i, $\zeta_i - \eta_i = b_i$, ta được :

$$\begin{aligned}
\rho^2(x,y) &= \sum_{i=1}^{k}(\xi_i - \eta_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k}(a_i + b_i)^2 \\
&= \sum a_i^2 + 2\sum a_i b_i + \sum b_i^2 \\
&\leq \sum a_i^2 + 2\sqrt{(\sum a_i^2)\,(\sum b_i^2)} + \sum b_i^2 \\
&= \left(\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}\,\right)^2 \\
&= [\rho(x,z) + \rho(z,y)]^2 ,
\end{aligned}$$

chứng tỏ bất đẳng thức tam giác được nghiệm đúng.

3) Trong tập các hàm số thực liên tục trên một đoạn $[a,b]$, nếu lấy khoảng cách giữa hai phần tử $x(t), y(t)$ bằng:

$$\rho(x,y) = \max_{a\leq t\leq b} |x(t) - y(t)| \tag{2}$$

thì các tiên đề của metric cũng được thỏa mãn. Tập các hàm số thực liên tục trên $[a,b]$, với metric ấy, sẽ kí hiệu bằng $\mathbb{C}_{[a,b]}$. Không gian $\mathbb{C}_{[0,1]}$ thường được gọi tắt là không gian $\mathbb{C}$.

4) Trong tập vừa nói trên cũng có thể lấy khoảng cách bằng

$$\rho(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|dt. \tag{3}$$

Dễ thấy rằng đó cũng là một metric. Tập hợp các hàm số liên tục trên $[a,b]$, với metric (3), sẽ được kí hiệu $\mathbb{C}^L_{[a,b]}$.

5) Trên một tập bất kỳ X nếu ta định nghĩa $\rho(x,y) = 1$ khi $x \neq y$ và $\rho(x,x) = 0$ thì cũng được một metric gọi là *metric rời rạc*.

Hai ví dụ 3) và 4) cho thấy rằng trên cùng một tập có thể chọn những metric khác nhau để có những không gian metric khác nhau. Khi cần phân biệt, thì tập X với metric ρ được gọi là không gian metric (X,ρ).

Hai không gian metric, metric (X, ρ_X) và (Y, ρ_Y) gọi là *đẳng cự* nếu có một ánh xạ 1-1 f từ X lên Y sao cho với mọi cặp điểm $x_1, x_2 \in X$ ta đều có

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2).$$

Chẳng hạn hai không gian metric $\mathbb{C}_{[0,1]}$ và $C_{[0,2]}$ đẳng cự theo phép tương ứng

$$\mathbb{C}_{[0,1]} \ni x(t) \leftrightarrow y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) \in \mathbb{C}_{[0,2]}.$$

Sự đẳng cự giữa hai không gian metric nói lên rằng các quan hệ giữa các phần tử của chúng về mặt metric là đồng nhất, vì vậy đứng về mặt này, ta không cần phân biệt chúng với nhau.

1.3. SỰ HỘI TỤ TRONG KHÔNG GIAN METRIC. Trong không gian metric, nhờ có khoảng cách, nên có thể định nghĩa khái niệm giới hạn.

Ta nói một dãy điểm $x_1, x_2, x_3, \ldots$ của một không gian metric X *hội tụ* tới điểm x của không gian đó nếu $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, x) = 0$. Ta viết

$$x_n \to x \quad \text{hoặc} \quad \lim\, x_n = x\,,$$

và điểm x gọi là *giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

Dĩ nhiên, nếu một dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới x thì mọi dãy con $\{x_{n_k}\}$ của nó cũng hội tụ tới x, đồng thời ta cũng thấy rõ hai tính chất quan trọng sau đây :

I. Nếu $x_n \to x$ và $x_n \to x'$ thì $x = x'$, nghĩa là *giới hạn của một dãy điểm, nếu có, là duy nhất.*

Thật vậy, tiên đề tam giác cho phép viết

$$0 \le \rho(x, x') \le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, x'),$$

mà $\rho(x_n, x) \to 0$, $\rho(x_n, x') \to 0$, cho nên $\rho(x, x') = 0$ từ đó theo tiên đề 1 : $x = x'$.

II. Nếu $x_n \to x$, và $y_n \to y$ thì $\rho(x_n, y_n \to \rho(x, y)$ nghĩa là *khoảng cách $\rho(x, y)$ là một hàm số liên tục đối với x và y.*

Thật vậy, với bất kỳ các điểm x, y, z, u, tiên đề tam giác cho ta

$$\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y),$$

từ đó

$$\rho(x,y) - \rho(z,u) \leq \rho(x,z) + \rho(y,u).$$

Hoán vị x với z, và y với u, ta được :

$$\rho(z,u) - \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,u).$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên, ta có *bất đẳng thức tứ giác*:

$$|\rho(x,y) - \rho(z,u)| \leq \rho(x,z) + \rho(y,u)\ ,$$

và cho $z = x_n$, $u = y_n$ ta suy ra

$$|\rho(x,y) - \rho(x_n,y_n)| \leq \rho(x,x_n) + \rho(y,y_n)\ ,$$

chứng tỏ rằng nếu $x_n \to x$, $y_n \to y$ thì $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y)$.

Ví dụ : 1) Sự hội tụ trên đường thẳng $\mathbb{R}$ là sự hội tụ của một dãy số theo nghĩa thông thường.

2) Trong không gian $\mathbb{R}^k$, sự hội tụ của dãy $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)})$ tới $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ có nghĩa là:

$$\sum_{i=1}^{k} (\xi_i^{(n)} - \xi_i)^2 \to 0 \quad (n \to \infty)\ ,$$

điều này tương đương với $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Vậy sự hội tụ trong $\mathbb{R}^k$ là *hội tụ theo tọa độ*.

3) Trong $\mathbb{C}_{[a,b]}$, sự hội tụ của một dãy $x_n(t)$ tới $x(t)$ có nghĩa là:

$$\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \to 0.$$

Vậy sự hội tụ trong $\mathbb{C}_{[a,b]}$ chính là *hội tụ đều* trong giải tích.

4) Trong $\mathbb{C}^L_{[a,b]}$ sự hội tụ của dãy $x_n(t)$ tới $x(t)$ có nghĩa là

$$\int_a^b |x_n(t) - x(t)|dt \to 0.$$

Sự hội tụ này gọi là *"hội tụ trung bình"*.

2. TẬP MỞ VÀ TẬP ĐÓNG

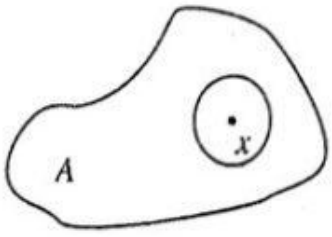
2.1. LÂN CẬN. Một hình cầu tâm a, bán kính $r(\ r > 0)$, trong một không gian metric X, là tập

$$S(a, r) = \{x : \rho(x, a) < r)\}. \tag{4}$$

Để ý rằng ta giả thiết $0 < r < +\infty$. Hình cầu tâm a, bán kính r, cũng gọi là một *r-lân cận* của điểm a và mọi tập con của X bao hàm một r-lân cận nào đó của a gọi là một *lân cận* của a. Rõ ràng lân cận của một điểm bao giờ cũng chứa điểm đó, và giao của hai (hay một số hữu hạn lân cận) của một điểm cũng là một lân cận của điểm đó.

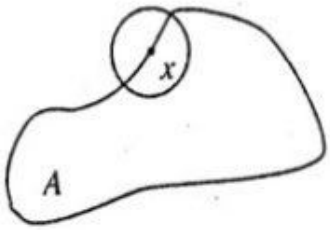
Xét một tập A bất kỳ trong không gian metric X, và một điểm $x \in X$. Có thể xảy ra ba trường hợp loại trừ nhau sau đây:

1. Có một lân cận của x nằm trọn trong tập A, nghĩa là chỉ chứa toàn những điểm của A. Khi đó x gọi là một *điểm trong* của tập A (Hình 3). Đương nhiên mọi điểm trong của A đều phải thuộc A.



Hình 3

Hình 4



Hình 5

2. Có một lân cận của x nằm trọn ngoài A, nghĩa là hoàn toàn không chứa điểm nào của A. Khi đó x là một điểm trong của phần bù của tập A (Hình 4). Đương nhiên, mọi điểm như thế đều không thuộc A.

3. Bất cứ lân cận nào của x cũng có chứa cả những điểm của A lẫn những điểm không thuộc A. Khi đó x gọi là một *điểm biên* của tập A (Hình 5). Một điểm biên của A có thể thuộc A hay không thuộc A.

Một tập gọi là *mở* nếu nó không chứa điểm biên nào của nó cả; *đóng* nếu nó chứa tất cả các điểm biên của nó. Rõ ràng cũng có thể nói:

Một tập là mở *nếu mọi điểm thuộc nó đều là điểm trong của nó;* đóng *nếu mọi điểm không thuộc nó đều là điểm trong của phần bù của nó.*

Ví dụ : Trên đường thẳng $\mathbb{R}$, mỗi khoảng (a, b) là một tập mở; mỗi đoạn $[a, b]$ là một tập đóng; tập $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ không đóng (vì điểm biên 0 không thuộc nó) mà cũng không mở (vì mỗi điểm $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ đều là điểm biên của tập) ; tập các điểm hữu tỉ (hoặc tập các điểm vô tỉ) cũng không mở, không đóng.

Chú ý: 1. Trong mọi không gian metric X, tập X và tập $\emptyset$ đều vừa mở vừa đóng. (Ngoài ra, trong trường hợp tổng quát, có thể có những tập khác cũng vừa mở vừa đóng: chẳng hạn, nếu metric rời rạc như trong ví dụ 5, mục 1.2, thì bất cứ tập con nào của X cũng đều vừa mở vừa đóng.)

2. Mỗi tập mở là lân cận của mọi điểm của nó.

3. Mỗi điểm biên của một tập A cũng đồng thời là điểm biên của phần bù, A^c, của nó và ngược lại. Vì vậy, *nếu A là mở (không chứa điểm biên nào) thì phần bù của nó, A^c, là đóng (chứa mọi điểm biên), và ngược lại.*

4. Hình cầu (4) bao giờ cũng là tập mở, còn tập

$$\overline{S}(a, r) = \{x : \rho(x, a) \leq r\} \tag{5}$$

thì bao giờ cũng là tập đóng, vì vậy tập (4) còn gọi là *hình cầu mở*, tập (5) gọi là *hình cầu đóng* (tâm a, bán kính r).

Thật vậy, xét một điểm bất kỳ $x_0 \in S(a, r)$, khi ấy $\rho(x_0, a) = \theta < r$ và dễ thấy rằng mọi r_0-lân cận của x_0 với $r_0 < r - \theta$ đều nằm trong $S(a, r)$, vì rằng nếu $\rho(x, x_0) < r_0$ thì theo bất đẳng thức tam giác ta phải có $\rho(x, a) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, a) < r_0 + \theta < r$, chứng tỏ rằng $S(x_0, r_0) \subset S(a, r)$. Vậy mọi điểm x_0 của $S(a, r)$ đều là điểm trong của nó. Do đó $S(a, r)$ là tập mở.

Hiển nhiên $\overline{S}(a, r)$ là phần bù của $S'(a, r) = \{x : \rho(a, x) > r\}$, mà $S'(a, r)$ là tập mở (chứng minh tương tự như trước), cho nên $\overline{S}(a, r)$ là tập đóng.

2.2. HỢP VÀ GIAO CỦA CÁC TẬP MỞ VÀ ĐÓNG. Trong nhiều vấn đề ta phải thực hiện các phép hợp và giao trên một họ tập mở (hay đóng). Ta có các định lý quan trọng sau đây :

Định lý 1. *Giao của một số hữu hạn tập mở cũng là mở. Hợp của một họ bất kỳ những tập mở cũng là mở.*

Chứng minh. Cho các tập mở G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và $G = \cap_{i=1}^{n} G_i$. Ta hãy xét một điểm bất kỳ $x \in G$, tức là $x \in G_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Vì $x \in G_i$ mà G_i mở cho nên x phải là điểm trong của G_i, do đó phải có một lân cận S_i của x nằm trọn trong G_i. Rõ ràng $S = \cap_{i=1}^{n} S_i$ sẽ là một lân cận của x nằm trọn trong $G = \cap_{i=1}^{n} G_i$. Vậy x là một điểm trong của G. Do đó G mở.

Bây giờ cho một họ tập mở $\{G_\alpha\}$, và $G = \cup_\alpha G_\alpha$. Ta hãy xét một điểm bất kỳ $x \in G$, tức là $x \in G_{\alpha_0}$ với một α_0 nào đó. Vì G_{α_0} mở nên x phải là điểm trong của G_{α_0}, nghĩa là có một lân cận S của x nằm trọn trong G_{α_0}. Dĩ nhiên $S \subset G$, cho nên x là điểm trong của G. Vậy G mở. □

Định lý 2. *Hợp của một số hữu hạn tập đóng cũng là đóng. Giao của một họ bất kỳ những tập đóng cũng là đóng.*

Chứng minh. Cho các tập hợp đóng F_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và $F = \cup_{i=1}^{n} F_i$. Theo công thức De Morgan ta có $F^c = \cap_{i=1}^{n} F_i^c$, mà mỗi F_i^c mở (vì (F_i đóng) nên theo trên, F^c cũng mở và do đó F đóng. Đối với giao của một họ tập đóng ta cũng chứng minh tương tự. □

2.3. ĐIỂM TỤ. Một điểm x gọi là *điểm tụ* của một tập A khi nào mọi lân cận của x đều chứa vô số điểm của A. Để ý rằng trong định nghĩa đó, x có thể thuộc A hay không thuộc A. Vả lại có thể thấy ngay rằng:

Một điểm x là điểm tụ của tập A khi và chỉ khi *mỗi lân cận của x có chứa ít nhất một điểm của A khác với x.*

Thật vậy, nếu x là điểm tụ của A thì rõ ràng nó thỏa mãn điều kiện trên. Ngược lại, giả sử một điểm x thỏa mãn điều kiện đó, và cho S_1 là một lân cận bất kỳ của x. Trong S_1 có một điểm $x_1 \in A$, $x_1 \neq x$. Dĩ nhiên ta có thể chọn một lân cận S_2 của x, đủ nhỏ để không chứa x_1 (chỉ cần lấy một r-lân cận của x có r bé hơn $\rho(x, x_1)$). Trong S_2 có một điểm $x_2 \in A$, $x_2 \neq x$ (và $x_2 \neq x_1$). Ta lại chọn một lân cận S_3 của x đủ nhỏ để không chứa x_1 và x_2. Trong S_3 có một điểm $x_3 \in A$, $x_3 \neq x$ (và $x_3 \neq x_2$, $x_3 \neq x_1$), v.v. . Cứ tiếp tục như thế mãi, ta sẽ thu được trong S_1 vô số điểm của A khác với x : $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Vậy x đúng là

điểm tụ của A.

Trong lập luận vừa rồi, ta có thể chọn các lân cận $S_1, S_2, S_3, \ldots$, là những hình cầu có bán kính dần tới 0 (chẳng hạn bán kính của S là $r_n < 1/n$). Khi đó dãy điểm thu được $x_1, x_2, x_3, \ldots$, hội tụ tới x vì $\rho(x_n, x) < r_n \to 0$. Ngược lại, nếu có một dãy điểm $x_1, x_2, x_3, \ldots$ của A phân biệt nhau và hội tụ tới x, thì với mọi r-lân cận S của x đều tìm được một n_0 đủ lớn để $\rho(x_n, x) < r$ với mọi $n > n_0$, tức là mọi điểm x_n $(n > n_0)$ đều thuộc S. Thành thử :

Một điểm x là điểm tụ của tập A khi và chỉ khi có một dãy điểm phân biệt $\{x_n\}$ của A hội tụ tới x.

Ví dụ : Trên đường thẳng, tập $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ có một điểm tụ là 0, tập $\{1, 2, 3, \ldots\}$ không có điểm tụ; tập các điểm hữu tỉ thừa nhận mọi điểm trên đường thẳng là điểm tụ.

Định lý 3. *Một tập là đóng khi và chỉ khi nó chứa mọi điểm tụ của nó.*

Chứng minh. Điểm tụ của một tập F thì rõ ràng phải là điểm trong hoặc điểm biên của F. Do đó, nếu F là đóng thì nó phải chứa mọi điểm tụ của nó. Ngược lại, giả sử F chứa mọi điểm tụ của nó, và cho $x \notin F$: khi ấy x không phải là điểm tụ của F nên phải có một lân cận của x không chứa điểm nào của F, chứng tỏ rằng x là điểm trong của phần bù của F. Vậy F đóng. □

Dựa theo tính chất của điểm tụ, định lý trên còn có thể phát biểu:

Một tập F là đóng khi và chỉ khi giới hạn của mọi dãy hội tụ $\{x_n\} \subset F$ đều thuộc về F, tức là : $x_n \in F$, $x_n \to x$ luôn luôn kéo theo $x \in F$.

2.4. PHẦN TRONG VÀ BAO ĐÓNG. Cho trước một tập A tùy ý trong không gian metric X, bao giờ cũng có ít nhất một tập mở nằm trọn trong A (đó là tập hợp rỗng) và ít nhất một tập đóng chứa A (đó là chính không gian X). Hợp của tất cả các tập mở nằm trong A gọi là *phần trong* của A và được kí hiệu $\mathring{A}$ hay $\mathrm{int}A$ (tiếng Anh interior, nghĩa là phần trong). Giao của tất cả các tập đóng chứa A gọi là *bao đóng* của A và được kí hiệu $\overline{A}$. Theo Định lý 1, $\mathring{A}$ là tập mở và hiển

nhiên đó là tập mở lớn nhất nằm trong A và nó chứa mọi tập mở nằm trong A. Theo Định lý 2, $\overline{A}$ là tập đóng và cũng hiển nhiên đó là tập đóng nhỏ nhất chứa A.

Định lý 4. *Phần trong $\mathring{A}$ của một tập A chính là tập các điểm trong của A. Bao đóng $\overline{A}$ của A bằng hợp của A và tất cả các điểm biên của A. Do đó A là mở khi và chỉ khi $A = \mathring{A}$; A là đóng khi và chỉ khi $A = \overline{A}$.*

Chứng minh. Nếu $x \in \mathring{A}$ thì vì $\mathring{A}$ mở nên x là điểm trong của $\mathring{A}$; do đó x cũng là điểm trong của A. Ngược lại nếu x là điểm trong của A thì có một hình cầu mở, tâm ở x, nằm trọn trong A và theo định nghĩa của $\mathring{A}$, hình cầu mở ấy phải nằm trọn trong $\mathring{A}$, nên $x \in \mathring{A}$. Vậy $\mathring{A}$ bằng tập các điểm trong của A.

Vì một tập đóng F chứa A khi và chỉ khi tập mở $G = X \setminus F$ nằm trọn trong $X \setminus A$, nên một điểm x thuộc mọi tập đóng chứa A (tức là $x \in \overline{A}$) khi và chỉ khi x không thuộc bất kỳ tập mở nào nằm trọn trong $X \setminus A$ (tức là $x \notin \text{int}(X \setminus A)$. Do đó $\overline{A}$ bằng tập các điểm không thuộc $\text{int}(X \setminus A)$, tức là, theo phần trên, không phải là điểm trong của $X \setminus A$. Nhưng một điểm không phải là điểm trong của $X \setminus A$ khi và chỉ khi nó thuộc A hoặc là điểm biên của A. Vậy $\overline{A}$ bằng hợp của A và tất cả các điểm biên của A.

Phần sau cùng của định lý chỉ là hệ quả của phần trên và định nghĩa của tập mở và tập đóng. □

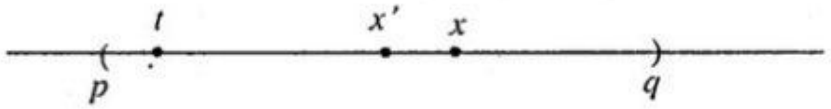
Ví dụ. Bao đóng của tập các điểm hữu tỉ trên đường thẳng là toàn đường thẳng. Trong $\mathbb{R}^k$ bao đóng của hình cầu mở (4) là hình cầu đóng (5) và phần trong của hình cầu đóng (5) là hình cầu mở (4).

Nếu bao đóng của một tập A trong một không gian metric X trùng với toàn không gian thì tập A gọi là *trù mật* trong X. Ví dụ vừa rồi cho thấy tập các điểm hữu tỉ là trù mật trên toàn đường thẳng. Rõ ràng một tập A là trù mật trong không gian metric X khi và chỉ khi: $(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)\ \rho(a, x) < \varepsilon$.

2.5. TẬP MỞ VÀ TẬP ĐÓNG TRÊN ĐƯỜNG THẲNG. Các tập mở và tập đóng trên đường thẳng có cấu trúc đặc biệt đơn giản.

Định lý 5. *Mỗi tập mở trên đường thẳng là hợp của một số hữu hạn hay đếm được khoảng rời nhau.*

Chứng minh. Cho một tập mở bất kỳ G trên đường thẳng và xét một điểm $x \in G$ (Hình 6). Vì x là điểm trong của G nên phải có một lân cận của x, tức là một khoảng Δ chứa x, nằm trọn trong G. Ta gọi Δ_x là hợp tất cả các khoảng chứa x nằm trọn trong G như thế. Có thể thấy ngay Δ_x cũng là một khoảng. Thật vậy, cho $p = \inf \Delta_x$ (p có thể bằng $-\infty$), $q = \sup \Delta_x$ (q có thể bằng $+\infty$). Cố nhiên, $\Delta_x \subset (p, q)$. Ta lấy một điểm bất kỳ $x' \in (p, q)$, chẳng hạn $p < x' < x$. Theo định nghĩa infimum, phải có một điểm $t \in \Delta_x$ với $t < x'$. Nhưng $t \in \Delta_x$ có nghĩa là t thuộc một khoảng nào đó chứa x nằm trọn trong G. Khoảng này tất nhiên phải chứa cả x' vì $t < x' < x$. Do đó, $x' \in \Delta_x$. Vì x' là điểm bất kỳ của (p, q) nên ta kết luận $(p, q) \subset \Delta_x$, và do đó $\Delta_x = (p, q)$, tức Δ_x là một khoảng.



Hình 6

Bây giờ ta xét tất cả các khoảng Δ_x ứng với mọi điểm khác nhau của G. Rõ ràng G là hợp của tất cả các khoảng ấy. Mặt khác, nếu hai khoảng Δ_x và Δ_y có một điểm chung, t chẳng hạn, thì chúng trùng nhau hoàn toàn, vì khi đó $t \in \Delta_x$ kéo theo $\Delta_t = \Delta_x$ và $t \in \Delta_y$ kéo theo $\Delta_t = \Delta_y$, do đó $\Delta_x = \Delta_y$. Vậy các khoảng Δ_x khác nhau đều rời nhau. Số khoảng ấy chỉ có thể là hữu hạn hoặc đếm được, vì trong mỗi khoảng ta có thể chọn một điểm hữu tỉ mà tập các điểm hữu tỉ là đếm được. □

Tóm lại, G là hợp của một họ hữu hạn hay đếm được khoảng rời nhau.

Các khoảng nói trên gọi là *khoảng cấu thành* của G. Các đầu mút của mỗi khoảng ấy dĩ nhiên không thuộc G.

Vì mỗi tập đóng là phần bù của một tập mở, ta suy ra :

Hệ quả. *Mỗi tập đóng trên đường thẳng là phần còn lại sau khi rút khỏi đường thẳng một số hữu hạn hay đếm được khoảng rời nhau.*

Các khoảng này (tức là các khoảng cấu thành của phần bù của tập đóng đã cho) gọi là các *khoảng kề* của tập đóng ấy.

Tập hoàn chỉnh*. Cho một tập A trong một không gian metric X. Một điểm $x \in A$ mà không phải là điểm tụ của A thì gọi là một *điểm cô lập* của A. Dĩ nhiên $x \in A$ là điểm cô lập của A khi và chỉ khi có một lân cận của x không chứa điểm nào của A khác với x. Một tập đóng mà không có điểm cô lập gọi là một *tập hoàn chỉnh*.

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}$, toàn đường thẳng, một đoạn bất kỳ là những tập hoàn chỉnh, tập $\emptyset$ cũng là hoàn chỉnh; tập $\left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ gồm toàn điểm cô lập.

Bây giờ xét một tập đóng F trên đường thẳng. Rõ ràng một điểm $x \in F$ là điểm cô lập khi và chỉ khi nó là đầu mút chung của hai khoảng kề của F. Từ đó suy ra rằng:

I. Tập các điểm cô lập của một tập đóng F trên đường thẳng là hữu hạn hoặc đếm được (vì số khoảng kề của F là hữu hạn hoặc đếm được).

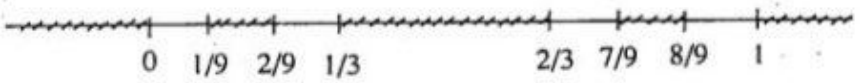
II. Một tập đóng F trên đường thẳng là hoàn chỉnh khi và chỉ khi các khoảng kề của nó từng đôi một không có đầu mút chung.

Một đoạn thẳng hay hợp một số hữu hạn đoạn thẳng dĩ nhiên là một tập hoàn chỉnh. Nhưng có những tập hoàn chỉnh không chứa trọn một đoạn thẳng nào cả, như trường hợp sau đây.

Tập Cantor*. Nghiên cứu nhiều vấn đề về lý thuyết tập và hàm thực người ta thường gặp một tập có cấu trúc đặc biệt có tên là tập Cantor. Khi mới xuất hiện vào đầu thế kỷ trước, tập này được coi là kỳ dị, nhưng từ hai thập kỷ lại đây nó có nhiều ứng dụng và giữ vai trò rất cơ bản trong một số ngành toán học hiện đại .

Tập Cantor được xây dựng như sau. Trên đường thẳng bỏ đi hai khoảng $(-\infty, 0)$ và $(1, +\infty)$, để còn lại đoạn $[0, 1]$ (Hình 7). Chia đoạn này ra ba phần bằng nhau và bỏ đi khoảng giữa, tức là khoảng $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, còn lại tập F_1 gồm hai đoạn. Lại chia mỗi đoạn này ra ba phần bằng nhau và bỏ đi phần giữa, tức là bỏ các khoảng $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ và $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, còn lại tập F_2 gồm bốn đoạn v.v. . Tiếp tục mãi như vậy, thì kết quả là ta đã bỏ đi một số đếm được những khoảng rời nhau, và còn lại tập

đóng $F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$. Vì các khoảng đã bỏ đi (tức là các khoảng kề của F) từng đôi một không có đầu mút chung, nên F là một tập hoàn chỉnh, đó là *tập Cantor*.



Hình 7

Hiển nhiên tập Cantor không chứa trọn một đoạn nào cả. Đáng chú ý nữa là các khoảng kề của nó trong đoạn $[0, 1]$ (tức là các khoảng của tập mở $G = [0, 1] \setminus F$) có độ dài tổng cộng bằng

$$\frac{1}{3} + 2(\frac{1}{3^2}) + 2^2(\frac{1}{3^3}) + \ldots = \frac{1}{3}[1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + \ldots] = 1,$$

thế nhưng *tập Cantor vẫn có lực lượng continum* (nghĩa là nó vẫn tương đương với đoạn $[0, 1]$) !

Để thấy rõ điều này, ta cho ứng với mỗi điểm $x \in F$ một dãy $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ trong đó mỗi ξ_i là 0 hay 1, xác định như sau. Tập F_n ở bước n gồm 2^n đoạn, ta gọi mỗi đoạn ấy là một đoạn cấp n, và cho D_n là đoạn cấp n chứa x. Ta sẽ có $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$ và $x = \cap_{n=1}^{\infty} D_n$. D_1 là một trong hai đoạn cấp 1: nếu D_1 là đoạn bên trái thì ta cho $\xi_1 = 0$, nếu nó là đoạn bên phải thì ta cho $\xi_1 = 1$. Sau đó D_2 là một trong hai đoạn cấp 2, nằm trong D_1 : nếu D_2 là đoạn bên trái thì ta cho $\xi_2 = 0$, nếu D_2 là đoạn bên phải thì ta cho $\xi_2 = 1$, v.v. . Như thế, dãy $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ ứng với $x \in F$ được xác định một cách duy nhất. Ngược lại điểm $x \in F$ ứng với một dãy $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ cho trước cũng là duy nhất vì $x \in \cap_{n=1}^{\infty} D_n$, trong đó $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$ và độ dài của D_n là $1/3^n \to 0$ (Định lý 6). Tóm lại tập Cantor tương đương với tập các dãy $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ viết bằng chữ số 0 và 1. Do đó (theo Định lý 12, Chương 1) lực lượng của nó bằng c.

2.6. TẬP BOREL. σ-đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các tập mở trong một không gian metric X được gọi là *σ-đại số Borel* của không gian X, và những tập thuộc σ-đại số này được gọi là *tập Borel* trong không gian X. Như vậy, các tập Borel là những tập mà ta thu được bằng cách xuất phát từ các tập mở và thực hiện một số hữu hạn hay đếm được phép toán trên các tập đó.

Theo định nghĩa của một σ-đại số, ta thấy rằng :

I. Nếu A là tập Borel, thì phần bù của nó, A^c, cũng là tập Borel. Nói riêng, vì các tập mở là tập Borel nên các tập đóng cũng là tập Borel.

II. Nếu A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ là tập Borel, thì $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ và $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ cũng là tập Borel. Nói riêng :

Hợp của một số đếm được tập đóng là một tập Borel : người ta thường gọi nó là một *tập kiểu* F_σ. Ví dụ : Tập hợp các điểm hữu tỉ là một tập kiểu F_σ trên đường thẳng, vì mỗi điểm hữu tỉ là một tập đóng, và số điểm hữu tỉ là đếm được.

Giao của một số đếm được tập mở là một tập Borel : người ta thường gọi nó là một *tập kiểu* G_δ. Ví dụ : Tập hợp các điểm vô tỉ trên đường thẳng là một tập kiểu G_δ, vì nó có dạng $\cap_{i=1}^{\infty} G_i$, trong đó mỗi G_i là tập mở tạo thành bởi đường thẳng bỏ đi một điểm hữu tỉ r_i.

Hợp của một số đếm được tập kiểu G_δ (gọi là tập kiểu $G_{\delta\sigma}$), giao của một số đếm được tập kiểu F_σ (gọi là tập kiểu $F_{\sigma\delta}$), v.v. đều là tập Borel.

Định lý sau đây cho thấy rằng các tập Borel cũng có thể xây dựng xuất phát từ các tập đóng.

Định lý 6. *σ-đại số Borel trong một không gian metric X cũng là σ-đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các tập đóng.*

Chứng minh. Trước hết, nhận xét rằng nếu $\mathcal{M}$ và $\mathcal{N}$ là hai lớp tập trong một không gian X bất kỳ, $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ là các σ-đại số nhỏ nhất bao hàm mỗi tập đó, và nếu $M \subset \mathcal{F}(\mathcal{N})$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$ thì $\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \mathcal{F}(\mathcal{N})$. Thật vậy, vì $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}(\mathcal{N})$ cho nên $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{N})$, mặt khác vì $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$ cho nên $\mathcal{F}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$, từ đó suy ra đẳng thức.

Dựa trên nhận xét này, muốn chứng minh Định lý 6, chỉ cần lấy $\mathcal{M}$ là lớp các tập mở trong X, $\mathcal{N}$ là lớp các tập đóng : theo định nghĩa, σ-đại số Borel là $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, và ở trên ta đã thấy $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$; mặt khác, vì mỗi tập mở là phần bù của một tập đóng nên $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}(\mathcal{N})$. Do đó $\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \mathcal{F}(\mathcal{N})$. □

Tập Borel trên đường thẳng. Trong trường hợp không gian metric X là đường thẳng $\mathbb{R}$ thì các tập Borel có thể xây dựng xuất phát từ những tập đơn giản hơn tập mở (hay đóng). Cụ thể là :

σ-đại số Borel của đường thẳng cũng là σ-đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các khoảng.

Thật vậy, cho $\mathcal{M}$ là lớp các tập mở trên đường thẳng $\mathbb{R}$, $\mathcal{J}$ là lớp các khoảng. Vì mỗi khoảng đều là tập mở, nên $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Ngược lại, vì mỗi tập mở trong $\mathbb{R}$, theo Định lý 4, là hợp của một số hữu hạn hay đếm được khoảng, nên $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}(\mathcal{J})$. Vậy $\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \mathcal{F}(\mathcal{J})$, đúng như khẳng định.

3. KHÔNG GIAN ĐỦ

3.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ. Một tính chất quan trọng của tập số thực là tính đủ của nó (xem Chương 1, §2) biểu hiện ở nguyên lý Cauchy : mọi dãy cơ bản đều có giới hạn.

Trong không gian metric bất kỳ X, ta cũng định nghĩa dãy cơ bản tương tự như trên đường thẳng : một dãy $\{x_n\}$ là cơ bản nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ tức là

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N)\ (\forall n \geq N)\ (\forall m \geq N)\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Dĩ nhiên một dãy hội tụ bao giờ cũng là cơ bản, vì nếu $x_n \to x$ thì theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \to 0\ (n, m \to \infty).$$

Nhưng ngược lại một dãy cơ bản trong một không gian bất kỳ không nhất thiết hội tụ. Chẳng hạn nếu coi khoảng (0,1) là một không gian metric thì dãy $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, mặc dù cơ bản, nhưng không hội tụ trong không gian ấy.

Một không gian metric X trong đó mọi dãy cơ bản đều hội tụ (tới một phần tử của X) gọi là một *không gian đủ*.

Như vậy, đường thẳng số thực là một không gian metric đủ.

Sau đây là những ví dụ quan trọng khác.

I. *Không gian $\mathbb{R}^k$ là đủ* : Thật vậy, nếu $\{x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)})\}$ là một dãy cơ bản trong $\mathbb{R}^k$ thì với mỗi $i = 1, 2, \ldots, k$, dãy số $\{\xi_i^{(n)}\}$

là cơ bản trong $\mathbb{R}$, vì rằng $|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^2} = \rho(x_n, x_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Vậy mỗi dãy số $\{\xi_i^{(n)}\}$ có một giới hạn ξ_i nào đó. Đặt $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ ta sẽ có $x \in \mathbb{R}^k$ và vì các tọa độ của x_n hội tụ tới các tọa độ tương ứng của x nên $x_n \to x$.

II. *Không gian* $\mathbb{C}_{[a,b]}$ *là đủ.* Thật vậy, giả sử $x_n(t)$ là một dãy cơ bản trong $\mathbb{C}_{[a,b]}$, tức là $\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_m(t)| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Với mỗi t cố định, dãy số $x_n(t)$ là cơ bản trong $\mathbb{R}$, cho nên phải có một giới hạn $x(t)$ nào đó. Mặt khác, với $\varepsilon > 0$ cho trước, có thể tìm được N_ε sao cho với mọi $n \geq N_\varepsilon$, $m \geq N_\varepsilon$ và với mọi t, ta có $|x_n(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon$. Cho $m \to \infty$ ta sẽ được, với mọi $n \geq N_\varepsilon$ và với mọi t : $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$ tức là dãy $x_n(t)$ hội tụ đều tới $x(t)$. Vậy $x(t)$ là liên tục và $x(t) \in \mathbb{C}_{[a,b]}$, đồng thời $x_n(t)$ hội tụ tới $x(t)$ trong $\mathbb{C}[a, b]$.

III. *Không gian* $\mathbb{C}^L_{[a,b]}$ *không đủ.* Chẳng hạn, cho $[a, b] = [0, 1]$ và xét dãy $x_n(t)$ như sau :

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{với} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{với} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq t \leq 1 \\ n + 1 - 2nt & \text{với} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \end{cases}$$

Ta có với mọi $m > n$:

$$\rho(x_n, x_m) = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)| dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}} |x_n(t) - x_m(t)| dt.$$

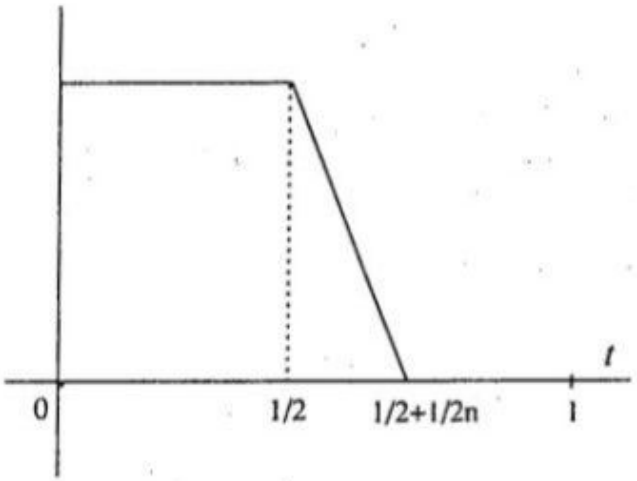
Vì $|x_n(t) - x_m(t)| \leq 1$ nên $\rho(x_n, x_m) \leq 1/(2n) \to 0$, do đó $\{x_n(t)\}$ là một dãy cơ bản. Dễ thấy rằng dãy cơ bản này không hội tụ.

Thật vậy, giả sử $x_n(t)$ hội tụ tới một $x(t)$ nào đó trong $\mathbb{C}^L_{[a,b]}$, tức là $\int_0^1 |x_n(t) - x(t)| dt \to 0$. Tích phân này có thể viết

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |x_n(t) - x(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |x_n(t) - x(t)| dt,$$

cho nên ta phải có

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |x_n(t) - x(t)| dt \to 0, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 |x_n(t) - x(t)| dt \to 0.$$



Hình 8

Nhưng rõ ràng

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |x_n(t) - 1|dt \to 0, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 |x_n(t) - 0|dt \to 0.$$

Vậy $x(t)$ và 1 cùng là giới hạn của $x_n(t)$ trong $\mathbb{C}^L_{[1,\frac{1}{2}]}$; $x(t)$ và 0 cùng là giới hạn của $x_n(t)$ trong $\mathbb{C}^L_{[\frac{1}{2},1]}$. Do tính duy nhất của giới hạn ta suy ra

$$x(t) = 1 \quad (0 \le t \le \frac{1}{2}), \qquad x(t) = 0 \quad (\frac{1}{2} \le t \le 1).$$

Nhưng như thế thì $x(t)$ không liên tục, và không thuộc $\mathbb{C}^L_{[0,1]}$. Do đó, dãy $x_n(t)$ không thể có giới hạn nào cả trong không gian $\mathbb{C}^L_{[0,1]}$.

3.2. NGUYÊN LÝ CANTOR. Tính đủ của đường thẳng biểu hiện dưới nhiều hình thức tương đương nhau, thường gọi là các *nguyên lý liên tục* (xem Chương 1, §2), mà nguyên lý Cantor về dãy đoạn thẳng thắt dần là một. Với không gian metric tổng quát, nguyên lý Cantor được mở rộng như sau :

Một dãy hình cầu $S_1, S_2, S_3, \ldots$ gọi là thắt dần nếu $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots$ và bán kính r_n của S_n dần tới 0 khi $n \to \infty$.

Định lý 7. *Trong một không gian metric đủ, mỗi dãy hình cầu đóng thắt dần đều có một điểm chung duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử X là một không gian metric đủ và $S_1, S_2, S_3, \ldots$ là một dãy hình cầu đóng thắt dần. Cho x_n và r_n là tâm và bán kính của S_n. Nếu $m > n$ thì $S_m \subset S_n$ cho nên $\rho(x_n, x_m) < r_n \to 0$, vậy $\{x_n\}$ là một dãy cơ bản trong X, và do đó phải có một giới hạn x. Với mỗi n ta có $x = \lim_{k\to\infty} x_{n+k}$, nhưng $x_{n+k} \in S_n$ $(k = 1, 2, \ldots)$ và S_n đóng nên $x \in S_n$, do đó $x \in \cap_{n=1}^{\infty} S_n$. Nếu có một điểm chung thứ hai, $x' \in \cap_{n=1}^{\infty} S_n$, thì với mọi n, cả x, x' cùng thuộc S_n, cho nên $\rho(x, x') \leq r_n \to 0$, do đó $x = x'$. Vậy điểm chung là duy nhất. □

Chú ý rằng các hình cầu nói trên phải là đóng thì định lý mới đúng. Chẳng hạn, trên đường thẳng, nếu lấy dãy các khoảng $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ thì tuy chúng thắt dần nhưng không có điểm chung nào cả.

3.3. BỔ SUNG KHÔNG GIAN METRIC. Tập các số hữu tỉ làm thành một không gian metric không đủ. Để biến nó thành không gian đủ, ta bổ sung nó bằng những phần tử mới là số vô tỉ : cứ mỗi dãy cơ bản số hữu tỉ mà không hội tụ trong tập các số hữu tỉ thì coi như xác định một số mới. Phương pháp đó của Cantor có thể khái quát để áp dụng cho không gian metric X bất kỳ không đủ : mỗi dãy cơ bản mà không hội tụ trong X thì coi như xác định một phần tử mới làm giới hạn cho dãy đó. Sau khi thêm những phần tử mới này, người ta có thể định nghĩa một metric thích hợp để không gian đã bổ sung là đủ trong metric đó và X trở thành một không gian metric con của không gian đã bổ sung. Nói chính xác hơn:

Định lý 8 (Hausdorff). *Cho trước một không gian metric X bất kỳ, bao giờ cũng tồn tại một không gian metric $\widehat{X}$ đủ, thỏa mãn hai điều kiện sau:*

1) X đẳng cự với một bộ phận của $\widehat{X}$;
2) X trù mật trong $\widehat{X}$.

Không gian $\widehat{X}$ gọi là *bổ sung* của không gian X.

Chứng minh*. Gọi $\widehat{X}$ là tập tất cả các dãy cơ bản

$$\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \; x_n \in X.$$

Trong $\widehat{X}$ ta coi hai phần tử

$$\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \; \hat{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$$

là bằng nhau:

$$\hat{x} = \hat{y} \ .$$

nếu và chỉ nếu $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ và ta xác định một metric như sau:

$$\rho(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \qquad (*)$$

Giới hạn này tồn tại vì $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m)$ (bất đẳng thức tứ giác), chứng tỏ rằng dãy số $\rho(x_n, y_n)$ là cơ bản, do đó phải hội tụ.

Dễ thấy rằng hàm (*) thỏa mãn ba điều kiện của một metric. Thật vậy:

1. Nếu $\hat{x} \neq \hat{y}$ thì $\lim \rho(x_n, y_n) > 0$ nên $\rho(\hat{x}, \hat{y}) > 0$. Nếu $\hat{x} = \hat{y}$ thì do định nghĩa $\rho(\hat{x}, \hat{y}) = 0$;

2. $\rho(\hat{x}, \hat{y}) = \rho(\hat{y}, \hat{x})$ (hiển nhiên);

3. $\rho(\hat{x}, \hat{y}) \leq \rho(\hat{x}, \hat{z}) + \rho(\hat{z}, \hat{y})$ do qua giới hạn trong bất đẳng thức $\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$.

Vậy $\widehat{X}$ là một không gian metric. Dĩ nhiên X chứa tất cả các dãy dừng $\hat{x} = (x, x, \ldots, x, \ldots)$ và phép tương ứng $x \leftrightarrow (x, \ldots, x, \ldots, x, \ldots)$ là một ánh xạ đẳng cự từ X vào $\widehat{X}$, nói khác đi, X đẳng cự với một bộ phận của $\widehat{X}$. Do đó ta có thể cho x đồng nhất với $(x, x, \ldots, x, \ldots)$ và coi X là một không gian con của $\widehat{X}$ khiến cho ta có thể nói đến khoảng cách $\rho(x, \hat{y})$ giữa một phần tử $x \in X$ với một phần tử $y \in \widehat{X}$:

$$\rho(x, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x, y_n).$$

Nếu $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \widehat{X}$ thì $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N)$ $(\forall n \geq N)$ $(\forall m \geq N)$ $\rho(x_n, x_m) \leq \varepsilon$, và ta có với mọi $n \geq N$

$$\rho(x_n, \hat{x}) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

chứng tỏ $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, \hat{x}) = 0$. Thành thử bất kể $\varepsilon > 0$ nhỏ thế nào cũng tìm được một điểm $x_n \in X$ cách $\hat{x}$ không quá ε. Vậy X là trù mật trong $\hat{x}$.

Cuối cùng chỉ còn xét đến tính đủ của $\widehat{X}$. Muốn thế, lấy một dãy cơ bản bất kỳ trong $\widehat{X}$: $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \ldots$ Do sự trù mật của X trong $\widehat{X}$

nên $(\forall n)\ (\exists x_n)\ \rho(x_n, \hat{x}_n) < 1/n$. Rõ ràng dãy $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ là cơ bản vì $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, \hat{x}_n) + \rho(\hat{x}_n, \hat{x}_m) + \rho(\hat{x}_m, x_m) < 1/n + 1/m + \rho(\hat{x}_n, \hat{x}_m) \to 0$ khi $n, m \to \infty$. Vậy $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \widehat{X}$. Ta có

$$\rho(\hat{x}, \hat{x}_n) \leq \rho(\hat{x}, x_n) + \rho(x_n, \hat{x}_n) \to 0,$$

cho nên $\hat{x}$ chính là giới hạn của dãy $\{\hat{x}_n\}$. Tóm lại, mọi dãy cơ bản trong $\widehat{X}$ đều hội tụ, nghĩa là không gian $\widehat{X}$ là đủ. Định lý đã được chứng minh. □

Ví dụ: Không gian $\mathbb{C}^L_{[a,b]}$ (ví dụ 4, mục 1.2) không đủ. Theo định lý trên có thể bổ sung nó thành không gian đủ. Cách bổ sung đó là cứ mỗi dãy cơ bản mà không có giới hạn trong $\mathbb{C}^L_{[a,b]}$ thì coi như xác định một phần tử mới cần thêm vào làm giới hạn cho dãy đó. Sau này, trong Chương 4, ta sẽ thấy rằng những phần tử mới chính là các hàm số "khả tích theo nghĩa Lebesgue" trên đoạn $[a, b]$.

4. KHÔNG GIAN COMPAC

4.1. TẬP COMPAC. Trên đường thẳng, một tập bị chặn (giới nội) là một tập chứa trong một đoạn thẳng nào đó; nói cách khác, tập M trên đường thẳng bị chặn nếu có một số $C > 0$ sao cho $|x| \leq C$ với mọi $x \in M$.

Mở rộng khái niệm này, ta nói một tập M trong một không gian metric X *bị chặn (giới nội)* nếu nó nằm trọn trong một hình cầu nào đó, nghĩa là nếu có một điểm $a \in X$ và một số $C > 0$ sao cho $\rho(x, a) \leq C$ với mọi $x \in M$.

Một tính chất quan trọng của tập bị chặn trên đường thẳng $\mathbb{R}$ là: nếu $\{x_n\}$ là một dãy vô hạn những phần tử của một tập bị chặn trong $\mathbb{R}$ thì dãy đó bao giờ cũng có chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ tới một giới hạn hữu hạn (nguyên lý Bolzano-Weierstrass). Ngược lại, những tập không bị chặn trong $\mathbb{R}$ thì không có tính chất ấy: vì nếu M không bị chặn thì với mỗi số tự nhiên n đều có ít nhất một $x_n \in M$ với $|x_n| > n$, và dãy $\{x_n\}$ rõ ràng không thể chứa dãy con nào hội tụ trong $\mathbb{R}$.

Vậy trong không gian $\mathbb{R}$ tính chất Bolzano-Weierstrass là một đặc trưng của các tập bị chặn.

Nhưng trong không gian metric tổng quát điều đó nói chung không còn đúng nữa. Vì thế mà có khái niệm mới sau đây :

Một tập M trong không gian metric X được gọi là compac nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset M$ đều có chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ tới một điểm thuộc M.

Theo định nghĩa đó một tập compac M bao giờ cũng là đóng. Thật vậy, nếu $x_n \subset M$ và $x_n \to x$ thì do tính compac phải có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ, với $\lim x_{n_k} \in M$, nhưng $\lim x_{n_k} = \lim x_n = x$, vậy $x \in M$.

Một tập bất kỳ mà có bao đóng compac thì gọi là một tập *compac tương đối*. Nói cách khác, một tập M trong một không gian metric X compac tương đối nếu : mọi dãy $\{x_n\} \subset M$ đều có chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ trong X (nhưng không đòi hỏi $\lim x_{n_k} \in M$).

Như trên đã thấy, đối với các tập đóng trong không gian $\mathbb{R}$, "compac" có nghĩa là "bị chặn" và ngược lại. Nhưng trong không gian metric tổng quát, ta sẽ thấy rằng "bị chặn" chỉ là điều kiện cần nhưng chưa đủ để cho một tập đóng là compac. Muốn có một điều kiện cần và đủ để cho một tập đóng là compac người ta đưa vào một khái niệm mạnh hơn khái niệm "bị chặn" : đó là khái niệm "hoàn toàn bị chặn" (hoàn toàn giới nội) mà sau đây ta sẽ định nghĩa.

4.2. ĐẶC TRƯNG TẬP COMPAC. Một tập M trong một không gian metric X gọi là *hoàn toàn bị chặn* nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tập M có thể phủ được bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính ε ; tức là, cho trước $\varepsilon > 0$ tùy ý, bao giờ cũng tìm được một số hữu hạn hình cầu $S_1, S_2, \ldots, S_k$, với bán kính ε, để cho

$$M \subset \cup_{i=1}^{k} S_i$$

Một tập hoàn toàn bị chặn thì phải bị chặn. Thật vậy, nếu M là một tập hoàn toàn bị chặn thì nó có thể phủ được bằng một số hữu hạn hình cầu $S_1, S_2, \ldots, S_k$, với bán kính 1. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_k$ là tâm các hình cầu đó và đặt $r = \max_i \rho(a_i, a_1)$, ta sẽ có với mọi $x \in S_i$: $\rho(x, a_1) \leq \rho(x, a_i) + \rho(a_i, a_1) < 1 + r$, và vì điều này đúng với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$ nên tập M sẽ nằm trọn trong hình cầu tâm a_1, bán kính $1 + r$, tức là M bị chặn.

Định lý 9. (Hausdorff). *Một tập compac thì đóng và hoàn toàn bị chặn. Ngược lại một tập đóng và hoàn toàn bị chặn trong một không gian metric đủ thì compac.*

Chứng minh. 1) Ở trên ta đã thấy rằng một tập compac thì phải đóng. Bây giờ giả sử tập M compac nhưng không hoàn toàn bị chặn. Thế thì có một $\varepsilon > 0$ nào đó sao cho không thể nào phủ được M bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính ε. Lấy một điểm bất kỳ $x_1 \in M$. Hình cầu tâm x_1 bán kính ε không phủ được M, cho nên có ít nhất một điểm $x_2 \in M$ với $\rho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. Hai hình cầu tâm x_1, x_2 và bán kính ε cũng không phủ được M, cho nên có ít nhất một điểm $x_3 \in M$ với $\rho(x_3, x_1) \geq \varepsilon$, $\rho(x_3, x_2) \geq \varepsilon$, v.v. . Tiếp tục cách đó, ta sẽ được một dãy $x_n \in M$ với $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ $(n \neq m;\ n, m = 1, 2, \ldots)$. Rõ ràng, bất cứ dãy con nào của $\{x_n\}$ cũng không thể là dãy cơ bản, do đó không thể hội tụ. Như vậy là mâu thuẫn với giả thiết M compac. Cho nên M đã compac, thì phải đóng và hoàn toàn bị chặn.

2) Ngược lại, giả sử tập M đóng và hoàn toàn bị chặn trong một không gian đủ X, và xét một dãy vô hạn bất kỳ $\sigma = \{x_n\} \subset M$. Vì tập M có thể phủ được bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính 1, nên một trong các hình cầu này, chẳng hạn S_1, phải chứa vô số phần tử của dãy σ. Gọi dãy con của σ chứa trong S_1 là σ_1. Tập hợp M cũng có thể phủ được bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính $1/2$, nên một trong các hình cầu này, chẳng hạn S_2, phải chứa vô số phần tử của dãy σ_1. Gọi dãy con của σ_1 chứa trong S_2 là σ_2, v.v. . Tiếp tục theo cách đó mãi thì sẽ có những dãy $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ với $\sigma \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \ldots$ và $\sigma_k \subset S_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ trong đó S_k chỉ hình cầu bán kính $1/k$. Vì mỗi dãy σ_k có vô số phần tử nên có thể chọn trong σ_1 một phần tử x_{n_1}, rồi trong σ_2 một phần tử x_{n_2} với $n_2 > n_1$, trong σ_3 một phần tử x_{n_3} với $n_3 > n_2$, v.v...Dãy x_{n_k} là một dãy con của $\sigma = \{x_n\}$, và có thể thấy rằng đó là một dãy hội tụ (trong X). Thật vậy, với $k < l$ thì $\sigma_l \subset \sigma_k \subset S_k$ nên x_{n_l}, x_{n_k} cùng thuộc hình cầu S_k do đó $\rho(x_{n_l}, x_{n_k}) < 2/k \to 0$ khi $k, l \to \infty$, chứng tỏ rằng $\{x_n\}$ là một dãy cơ bản, tức hội tụ, vì theo giả thiết X là không gian đủ. Tóm lại, mọi dãy $\{x_n\} \subset M$ đều chứa một dãy con hội tụ. Vì M là tập đóng nên giới hạn của dãy con này thuộc M. Vậy M là tập compac. □

Hệ quả. (i) *Mọi tập compac đều bị chặn.*

(ii) *Một tập con đóng của một tập compac là compac.*

(iii) *Đối với các tập đóng trong $\mathbb{R}^k$, các khái niệm: bị chặn, hoàn toàn bị chặn, compac tương đương nhau.*

Thật vậy, một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^k$ bao giờ cũng phủ được bởi một số hữu hạn hình cầu có bán kính $\varepsilon > 0$ cho trước tùy ý.

Tính hoàn toàn bị chặn thường cũng được mô tả qua khái niệm ε-lưới như sau :

Cho một tập M trong một không gian metric X và một số $\varepsilon > 0$ tùy ý. Một tập $A \subset X$ gọi là một *ε-lưới* cho M nếu với mỗi điểm $x \in M$ đều có ít nhất một điểm $a \in A$ đứng cách x chưa tới ε, tức là $(\forall x \in M)\,(\exists a \in A)\ \rho(x, a) < \varepsilon$. Dễ thấy rằng nếu tập M có một ε-lưới thì nó có thể phủ được bằng một họ hình cầu $\{S_\alpha\}$ với bán kính ε, và có tâm tại các điểm trong ε-lưới đó. Vì vậy

Một tập M là hoàn toàn bị chặn nếu với mọi $\varepsilon > 0$ đều có thể tìm được cho nó một ε-lưới hữu hạn (tức là gồm một số hữu hạn điểm).

Từ định lý Hausdorff cũng có thể suy ra:

Trong một không gian metric đủ, một tập đóng M là compac nếu với mọi $\varepsilon > 0$ đều có thể tìm chò nó một ε-lưới compac. Thật vậy, với $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có thể lấy một $(\varepsilon/2)$-lưới compac B cho M, rồi lại lấy một $(\varepsilon/2)$-lưới hữu hạn A cho B (điều này có thể làm được vì B compac). Tập A chính là một ε-lưới hữu hạn cho M, vì với mỗi $x \in M$ có một $b \in B$ sao cho $\rho(x, b) < \varepsilon/2$, rồi với b ấy lại tìm được $a \in A$ sao cho $\rho(a, b) < \varepsilon/2$. Lúc đó $\rho(x, a) \leq \rho(x, b) + \rho(b, a) < \varepsilon$. Vậy theo định lý Hausdorff, M compac.

4.3. TÍNH CHẤT HEINE-BOREL. Bên cạnh tính chất Bolzano-Weierstrass, còn có một tính chất quan trọng khác của các đoạn thẳng là : nếu có một họ khoảng mở phủ lên một doạn thẳng thì phải có một số hữu hạn những khoảng mở ấy vẫn phủ được đoạn thẳng.

Suy rộng tính chất này cho tập compac, ta có:

Định lý 10 (Heine-Borel). *Một tập M là compac khi và chỉ khi mọi họ tập mở $\{G_\alpha\}$ phủ lên M : $\cup_\alpha G_\alpha \supset M$, đều có chứa một họ con hữu hạn: $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_m}$ vẫn phủ được M:*

$$\cup_{i=1}^{m} G_{\alpha_i} \supset M.$$

(Nói vắn tắt : mọi phủ mở của M đều có một phủ con hữu hạn).

Chứng minh. Giả sử M có tính chất Heine-Borel. Xét một dãy bất kỳ $\{x_n\} \subset M$. Với mỗi $k = 1, 2, \ldots$ ký hiệu $A_k = \{x_n : n \geq k\}$. Cho $\bar{A}_k$ là bao đóng của A_k, và $G_k = X \setminus \bar{A}_k$. Với mỗi tập hữu hạn $I \subset \{1, 2, \ldots\}$ rõ ràng $\cap_{k\in I} A_k \neq \emptyset$, cho nên $\cap_{k\in I} \bar{A}_k \neq \emptyset$, và do đó $X \setminus \cup_{k\in I}(X \setminus \bar{A}_k) = X \setminus \cup_{k\in I} G_k \neq \emptyset$, tức là hợp các tập mở $G_k, k \in I$, không phủ được X. Vì điều này đúng với mọi họ hữu hạn $\{G_k, k \in I\}$ nên theo tính chất Heine-Borel cả họ cũng không thể phủ được M. Vậy phải có một $\bar{x} \notin G_k = X \setminus \bar{A}_k$, tức là $\bar{x} \in \bar{A}_k \; \forall k = 1, 2, \ldots$. Từ đây dễ dàng suy ra một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ. Thật vậy, với mỗi k, vì $\bar{x} \in \bar{A}_k$, nên hình cầu tâm $\bar{x}$ bán kính $1/k$ phải chứa một $x_{n_k} \in \{x_n\}$. Ta có $\rho(x_{n_k}, \bar{x}) \leq 1/k \to 0$ khi $k \to +\infty$, vậy M compact.

Để chứng minh phần đảo, giả sử M compac nhưng có một phủ mở $\{G_\alpha\}$ của M không chứa một phủ con hữu hạn nào. Ta lấy một dãy bất kỳ số dương $\varepsilon_n \to 0$. Vì M compac nên theo Định lý 8 nó có thể phủ bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính ε_1. Trong số các hình cầu này ắt phải có một cái, S_1 chẳng hạn, sao cho $M_1 = M \cap \overline{S}_1$ không thể phủ được bằng một số hữu hạn tập G_α (nếu không thì M sẽ phủ được bằng một số hữu hạn tập G_α). Tập M_1 cũng compac (vì là tập con đóng của một tập compac) nên có thể phủ được bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính ε_2, trong số đó có một cái, S_2 chẳng hạn, sao cho $M_2 = M_1 \cap \overline{S}_2$ không thể phủ được bằng một số hữu hạn tập G_α. Tập M_2 cũng là compac nên có thể phủ được bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính ε_3, v.v. . Tiếp tục như thế, ta sẽ thu được một dãy hình cầu S_n và tập $M_n = M_{n-1} \cap \overline{S}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ta hãy lấy trong mỗi tập M_n một điểm x_n. Dĩ nhiên $M_n \subset M_{n-1} \subset \ldots \subset M$ nên $x_n \in M$ và vì M compac nên có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ tới một điểm $x_0 \in M$. Ta có $x_0 \in G_{\alpha_0}$ nào đó, và do G_{α_0} mở, nên có một hình cầu K tâm ở x_0 và nằm trọn trong G_{α_0}. Cho r là bán kính của K. Ta hãy chọn k_0 đủ lớn để $\rho(x_0, x_{n_{k_0}}) < r/2$ và $\varepsilon_{n_{k_0}} < r/4$: khi đó $(\forall x \in M_{n_{k_0}})\rho(x, x_0) \leq \rho(x, x_{n_{k_0}}) + \rho(x_{n_{k_0}}, x_0) < 2\varepsilon_{n_{k_0}} + r/2 < r$ chứng tỏ $M_{n_{k_0}} \subset K \subset G_{\alpha_0}$, nghĩa là $M_{n_{k_0}}$ có thể phủ bằng một tập G_{α_0}, trái với cách xây dựng của nó. Mâu thuẫn này chứng tỏ mọi phủ của M phải có một phủ con hữu hạn. □

4.4. KHÔNG GIAN COMPAC. Một không gian metric X được gọi là *không gian compac* nếu nó là một tập compac trong chính nó, nghĩa là mọi dãy $\{x_n\}$ trong X đều có chứa một dãy con hội tụ. Dĩ nhiên các Định lý 9 và 10 đều áp dụng cho không gian compac. Ngoài ra Định lý 10 có hệ quả sau đây.

Hệ quả. *Một không gian metric X là compac khi và chỉ khi mọi họ tập đóng, $\{F_\alpha\}$, trong X mà có giao rỗng : $\cap_\alpha F_\alpha = \emptyset$, thì đều có chứa một họ con hữu hạn: $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_m}$ cũng có giao rỗng : $\cap_{i=1}^m F_{\alpha_i} = \emptyset$.*

Thật vậy, chỉ việc áp dụng Định lý 10 cho họ tập mở $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$ và chú ý rằng các F_α có giao rỗng khi và chỉ khi các G_α phủ X. Tính chất trên thường cũng được gọi vắn tắt là tính "tương giao hữu hạn".

Một không gian metric X gọi là *tách được* (hay *khả ly*) nếu có một tập đếm được trù mật trong X.

Định lý 11. *Mọi không gian metric compac là đủ và tách được.*

Chứng minh. Cho $\{x_n\}$ là một dãy cơ bản của X. Theo giả thiết compac, dãy đó có chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ tới một $x_0 \in X$ nào đó. Với mọi k, ta có

$$\rho(x_k, x_0) \leq \rho(x_k, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$$

mà $\rho(x_k, x_{n_k}) \to 0$ vì dãy $\{x_n\}$ là cơ bản, và $\rho(x_{n_k}, x_0) \to 0$ theo trên, cho nên $\rho(x_k, x_0) \to 0$, chứng tỏ rằng x_0 chính là giới hạn của cả dãy $\{x_n\}$. Vậy X đủ.

Để chứng minh X tách được, ta lấy, với mỗi $k = 1, 2, \ldots$, một $(1/k)$-lưới hữu hạn A_k cho X. Tập $A = \cup_{i=1}^\infty A_k$ là đếm được và dễ thấy rằng nó trù mật trong X, vì cho trước một phần tử $x \in X$ và một $\varepsilon > 0$ tùy ý, trong ε-lân cận của x sẽ có ít nhất một phần tử của $A_k \subset A$, với $1/k < \varepsilon$. □

5. ÁNH XẠ LIÊN TỤC

5.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CHUNG. Cho hai không gian metric X và Y (metric trên X kí hiệu bằng ρ_X, metric trên Y bằng

ρ_Y). Một ánh xạ f từ X vào Y gọi là *liên tục tại điểm* $x_0 \in X$ nếu

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in X):$$
$$\rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Cũng như trong giải tích cổ điển, điều này tương đương với: $f(x_n) \to f(x_0)$ cho mọi dãy $x_n \to x_0$.

Ánh xạ f gọi là liên tục nếu nó liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

Định lý 12. *Đối với một ánh xạ f từ một không gian metric X vào một không gian metric Y thì ba mệnh đề sau đây tương đương:*

(i) *f liên tục ;*
(ii) *Nghịch ảnh của mọi tập đóng (trong Y) đều là tập đóng (trong X) ;*
(iii) *Nghịch ảnh của mọi tập mở (trong Y) đều là tập mở (trong X).*

Chứng minh.. (i) $\Rightarrow$ (ii) . Cho F là một tập đóng bất kỳ của Y, $f^{-1}(F)$ là nghịch ảnh của nó bởi f. Nếu $x_n \in f^{-1}(F)$, $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \in F$, và $f(x_n) \to f(x_0)$ do giả thiết f liên tục. Nhưng F là đóng trong Y nên $f(x_0) \in F$, do đó $x_0 \in f^{-1}(F)$ chứng tỏ rằng $f^{-1}(F)$ là đóng trong X.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Cho G là một tập mở bất kỳ của Y, $f^{-1}(G)$ là nghịch ảnh của nó bởi f. Vì G mở, nên $Y \setminus G$ đóng trong Y. Vậy nếu có (ii) thì $f^{-1}(Y \setminus G)$ đóng trong X. Nhưng $f^{-1}(Y \setminus G) = X \setminus f^{-1}(G)$ (Chương 1, mục 1.3), vậy $f^{-1}(G)$ mở.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Cho một điểm bất kỳ $x_0 \in X$. Vì có (iii), nên nghịch ảnh của mỗi ε-lân cận của $f(x_0)$ là một tập W mở trong X. Dĩ nhiên, $x_0 \in W$ nên theo tính chất tập mở, phải có một δ-lân cận nào đó của x_0 nằm trọn trong W. Ảnh của δ-lân cận này nằm trọn trong ε-lân cận nói trên của $f(x_0)$, do đó với mọi $x \in X$: $\rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Vì ε tùy ý, điều này có nghĩa f liên tục. □

Chú ý. Ảnh của một tập đóng (trong X) qua một ánh xạ liên tục không nhất thiết đóng (trong Y) cũng như ảnh của một tập mở (trong X) không nhất thiết mở (trong Y).

Ánh xạ đồng phôi. Một ánh xạ f từ X lên Y mà là 1-1 và liên tục cả hai chiều (nghĩa là cả f lẫn f^{-1} đều liên tục) gọi là một *phép*

đồng phôi giữa X và Y. Hai không gian X và Y lúc đó gọi là hai *không gian đồng phôi* với nhau.

Theo định lý trên, một ánh xạ f 1-1 từ X lên Y là một phép đồng phôi khi và chỉ khi các tập mở (đóng) trong không gian này ứng với các tập mở (đóng) trong không gian kia, và ngược lại.

Ví dụ: Không gian $\mathbb{R}$ đồng phôi với khoảng $(0,1)$ theo ánh xạ $y = \frac{1}{\pi}\text{arctg}x + \frac{1}{2}$, do đó cũng đồng phôi với mọi khoảng (a,b) (bằng một phép vị tự); và đồng phôi với khoảng $(0,+\infty)$ theo ánh xạ e^x, do đó cũng đồng phôi với $(-\infty,a)$ hoặc $(a,+\infty)$ (bằng một phép vị tự).

Dĩ nhiên ánh xạ đẳng cự là trường hợp riêng của ánh xạ đồng phôi.

5.2. ÁNH XẠ CO VÀ NGUYÊN LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG. Một trường hợp riêng quan trọng khác của ánh xạ liên tục là ánh xạ co từ một không gian vào chính nó.

Cho một không gian metric X bất kỳ. Một ánh xạ P từ X vào bản thân nó gọi là *ánh xạ co*, nếu có một số $\theta < 1$ sao cho, nếu Px là phần tử ứng với x trong ánh xạ P, thì với mọi $x_1, x_2 \in X$ ta có

$$\rho(Px_1, Px_2) \leq \theta\rho(x_1, x_2).$$

Trong một phép ánh xạ từ X vào chính nó có thể có những điểm mà ảnh của nó trùng với chính nó: những điểm như thế, tức là những điểm x sao cho $Px = x$ gọi là *điểm bất động* trong ánh xạ. Việc tìm điểm bất động của một ánh xạ là vấn đề có nhiều ứng dụng trong giải tích, nhất là trong lý thuyết các phương trình (vi phân, đạo hàm riêng, tích phân), vì một điểm x bất động trong ánh xạ P chính là lời giải của phương trình $Px = x$.

Định lý 13 (Banach). *Mọi ánh xạ co P từ một không gian metric đủ X vào bản thân nó đều có một điểm bất động duy nhất.*

Chứng minh. Lấy một điểm bất kỳ $x_0 \in X$ và những điểm $x_1 = Px_0$, $x_2 = Px_1, \ldots, x_n = Px_{n-1}, \ldots$ Theo định nghĩa ánh xạ co:

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(Px_{n-1}, Px_n) \leq \theta\rho(x_{n-1}, x_n),\\
\rho(x_{n-1}, x_n) &\leq \theta\rho(x_{n-2}, x_{n-1}),\\
\cdots\cdots &\ \cdots\ \cdots\cdots\\
\rho(x_1, x_2) &\leq \theta\rho(x_0, x_1),
\end{aligned}$$

từ đó suy ra với mọi n :

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \theta^n \rho(x_0, x_1).$$

Vậy khi $m > n$, ta có

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (\theta^n + \theta^{n+1} + \ldots + \theta^{m-1})\rho(x_0, x_1) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} (\theta^k)\rho(x_0, x_1) = \frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Vì $\theta < 1$ nên rõ ràng $\rho(x_n, x_m) \to 0$ khi $m, n \to \infty$, tức là $\{x_n\}$ là một dãy cơ bản trong X, và vì X đủ (theo giả thiết) nên x_n phải dần tới một giới hạn x. Ta có $x_n = Px_{n-1}$ mà $x_n \to x$, $Px_{n-1} \to Px$ vì $\rho(Px_{n-1}, Px) \leq \theta\rho(x_{n-1}, x) \to 0$. Vậy $Px = x$, nghĩa là x là điểm bất động. Đó là điểm bất động duy nhất vì nếu y cũng là điểm bất động thì

$$\rho(x, y) = \rho(Px, Py) \leq \theta\rho(x, y).$$

Với $\theta < 1$ điều này chỉ xảy ra nếu $\rho(x, y) = 0$ tức là $x = y$. □

Ứng dụng. Dựa vào định lý trên, có thể chứng minh dễ dàng sự tồn tại và duy nhất của lời giải một số bài toán. Chẳng hạn, xét phương trình vi phân

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{6}$$

với điều kiện ban đầu

$$x(t_0) = x_0 \tag{7}$$

trong đó $f(t, x)$ là một hàm số liên tục trong một miền phẳng G chứa điểm (t_0, x_0) và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo x tức là có một hằng số K sao cho

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2| \tag{8}$$

với mọi cặp điểm (t, x_1) và $(t, x_2) \in G$.

Ta hãy chứng minh *Định lý Picard:* Trên một đoạn $|t - t_0| \leq r$ nào đó phương trình (6) có một lời giải duy nhất thỏa mãn điều kiện ban đầu (7).

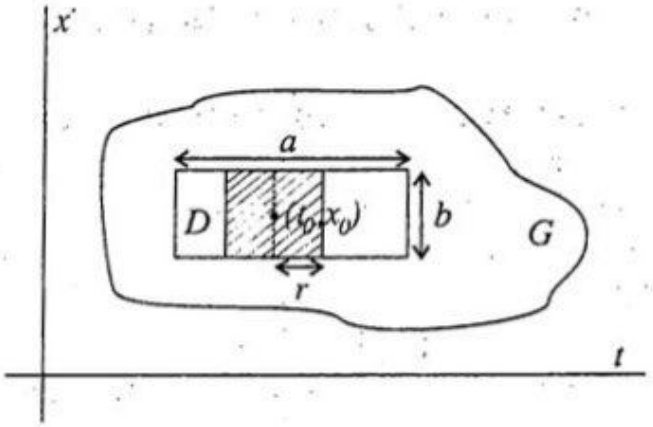
Rõ ràng phương trình (6) với điều kiện ban đầu (7) tương đương với phương trình

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{9}$$

Ta hãy xét hình chữ nhật $D(|t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b) \subset G$. Do sự liên tục của $f(t, x)$ nên trong hình chữ nhật đó $|f(t, x)| \leq L$ (L là một hằng số nào đó). Cho r là một số dương bất kỳ sao cho

$$Kr \leq 1,\quad Lr \leq b \tag{10}$$

và $\mathbb{C}'$ là không gian con cửa $\mathbb{C}_{[t_0-r,\ t_0+r]}$, gồm tất cả các hàm số $x(t)$ mà $|x(t) - x_0| \leq b$ với mọi t trong đoạn $|t - t_0| \leq r$. $\mathbb{C}'$ là một không gian đủ. Thật vậy, nếu $\{x_n(t)\}$ một dãy cơ bản trong $\mathbb{C}'$ thì nó cũng là dãy cơ bản trong $\mathbb{C}_{[t_0-r,\ t_0+r]}$ cho nên phải hội tụ tới một hàm số liên tục $x(t)$ nào đó (vì không gian này đủ). Cho $n \to \infty$ thì từ $|x_n(t) - x_0| \leq b$ ta suy ra $|x(t) - x_0| \leq b$, tức $x(t) \in \mathbb{C}'$, chứng tỏ rằng không gian $\mathbb{C}'$ đủ.



Hình 9

Bây giờ ta xét ánh xạ P xác định bởi

$$Px(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$$

với $|t - t_0| \leq r$. Nếu $x(t) \in \mathbb{C}'$ thì rõ ràng $Px(t)$ liên tục, và

$$|Px(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \right| \leq \int_{t_0}^{t} Ld\tau \leq Lr \leq b$$

cho nên $Px(t) \in \mathbb{C}'$, và P là một ánh xạ từ $\mathbb{C}'$ vào bản thân nó. Hơn nữa, theo (8) thì

$$|Px_1(t) - Px_2(t)| = \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))| d\tau$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} K.|x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \leq K \int_{t_0}^{t} \rho(x_1, x_2) d\tau,$$

cho nên

$$\rho(Px_1, Px_2) \leq \max_{|t-t_0| \leq r} K \int_{t_0}^{t} \rho(x_1, x_2) d\tau = Kr\rho(x_1, x_2)$$

và vì $Kr < 1$ nên P là ánh xạ co. Do đó theo định lý trên có một hàm số duy nhất $x(t) \in \mathbb{C}'$ sao cho $Px(t) = x(t)$ tức là trên đoạn $|t - t_0| \leq r$ phương trình vi phân (6) có một lời giải duy nhất thỏa mãn điều kiện ban đầu (7).

6. HÀM SỐ THỰC LIÊN TỤC

6.1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT TẬP COMPAC. Một ánh xạ f từ một tập X vào tập các số thực mở rộng $\overline{\mathbb{R}}$ gọi là một *hàm số thực* (hay một hàm số nếu không sợ nhầm). Nếu $f(X) \subset \mathbb{R}$, tức là $f(x)$ không lấy các trị $\pm\infty$, thì hàm số gọi là *hữu hạn*. Nếu lại tồn tại một hằng số (hữu hạn) K sao cho $|f(x)| \leq K$ với mọi $x \in M \subset X$ thì hàm số gọi là *bị chặn (giới nội)* trên tập M.

Một hàm số hữu hạn và liên tục theo nghĩa ánh xạ liên tục như đã xác định ở §5, gọi là *hàm số liên tục*. Cần chú ý rằng trong định nghĩa này, ta đòi hỏi hàm số liên tục phải hữu hạn, vì ở trên, ta chỉ định nghĩa khái niệm liên tục cho những ánh xạ từ một không gian metric vào một không gian metric khác, mà $\overline{\mathbb{R}}$ (tập hợp số thực mở rộng) thì không phải là không gian metric.

Trong giải tích, ta đã biết nhiều tính chất quan trọng của hàm số liên tục trên một đoạn thẳng. Những tính chất ấy có thể mở rộng như sau vào không gian metric tổng quát X.

Định lý 14. *Một hàm số liên tục trên một tập compac $M \subset X$ thì liên tục đều trên tập đó, tức là :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in M)\ (\forall x' \in M):$$
$$\rho(x, x') < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon.$$

Chứng minh. Nếu $f(x)$ không liên tục đều trên tập M thì

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall n)\ (\exists x_n \in M)\ (\exists x'_n \in M):$$
$$\rho(x_n, x'_n) < 1/n \text{ và } |f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon.$$

Nhưng theo giả thiết M là compac, nên dãy $\{x_n\}$ chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ tới một phần tử nào đó $x_0 \in M$. Ta có

$$\rho(x_{n_k}, x'_{n_k}) < 1/n_k,\ |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| > \varepsilon,$$

trong đó bất đẳng thức thứ nhất chứng tỏ rằng khi $k \to \infty$ thì $x'_{n_k} \to x_0$, cho nên khi tiến qua giới hạn trong bất đẳng thức thứ hai và chú ý rằng $f(x)$ liên tục tại x_0, ta đi tới điều vô lý là $|f(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Vậy $f(x)$ phải liên tục đều trên M. □

Định lý 15. *Một hàm số liên tục trên một tập compac $M \subset X$ thì bị chặn trên tập đó và đạt tới một trị cực đại và một trị cực tiểu trên tập đó.*

Chứng minh. Nếu $f(x)$ không bị chặn trên tập M thì $(\forall n)\ (\exists x_n \in M)\ |f(x_n)| > n$, và vì M là compac nên dãy $\{x_n\}$ chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ tới một phần tử $x_0 \in M$. Cho $k \to \infty$ trong bất đẳng thức $|f(x_{n_k})| > n_k$ và chú ý rằng do $f(x)$ liên tục nên $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, ta được $|f(x_0)| = \infty$, trái với giả thiết $f(x)$ liên tục (nói riêng là hữu hạn). Vậy $f(x)$ đã liên tục trên tập compac M thì bị chặn trên M.

Gọi a là cận trên đúng của $f(x)$ trên M : $a = \sup_{x \in M} f(x)$. Theo định nghĩa, phải có một dãy $x_n \in M$ sao cho $a - 1/n < f(x_n) \leq a$. Dựa vào tính compac của M, có thể chọn một dãy $\{x_{n_k}\}$ hội tụ tới $x_0 \in M$, và tiến qua giới hạn khi $k \to \infty$ trong bất đẳng thức $a - 1/n_k < f(x_{n_k}) \leq a$ ta được $a \leq f(x_0) \leq a$, chứng tỏ rằng x_0 chính là điểm cực đại của $f(x)$ trên M. Ta cũng chứng minh tương tự rằng $f(x)$ phải đạt một trị cực tiểu trên M. □

6.2. XẤP XỈ CÁC HÀM SỐ LIÊN TỤC BỞI ĐA THỨC. Cho một họ $\mathcal{R}$ gồm những hàm số (thực) trên một không gian metric compac X. Với mỗi cặp $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$ ta định nghĩa

$$(f_1 \vee f_2)(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\},\quad (f_1 \wedge f_2)(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$$

và nói $\mathcal{R}$ là một *dàn* nếu

$$f_1, f_2 \in \mathcal{R} \Rightarrow (f_1 \vee f_2)(x) \in \mathcal{R}, \quad (f_1 \wedge f_2)(x) \in \mathcal{R}.$$

Một hàm số $f(x)$ trên X được gọi là *giới hạn đều* của một dãy hàm số $\{g_n(x)\}$ khi nào dãy này hội tụ đều trên X đến $f(x)$, nghĩa là $\max_{x\in X} |f(x) - g_n(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Định lý 16. *Cho một dàn $\mathcal{R}$ những hàm số trên không gian metric compac X. Nếu*

$$(\forall a, b \in X)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\exists \tilde{f} \in \mathcal{R}) \quad \tilde{f}(a) = \alpha, \tilde{f}(b) = \beta. \tag{11}$$

thì mỗi hàm số liên tục trên X là giới hạn đều của một dãy $g_n \in \mathcal{R}$. Nói khác đi, với mỗi hàm số liên tục f trên X và mỗi số $\varepsilon > 0$ cho trước có một hàm $g \in \mathcal{R}$ sao cho

$$\max_{x\in X} |f(x) - g(x)| < \varepsilon. \tag{12}$$

Chứng minh. Cho $f_{ab} = \tilde{f} \in \mathcal{R}$ là hàm số thoả mãn (11) với $\alpha = f(a), \beta = f(b)$, tức là sao cho

$$f_{ab}(a) = f(a), \quad f_{ab}(b) = f(b).$$

Xét các tập

$$U_{ab} = \{x : \ f_{ab}(x) < f(x) + \varepsilon\}, \quad V_{ab} = \{x : \ f_{ab}(x) > f(x) - \varepsilon\}.$$

Hiển nhiên đó là những tập mở và $a \in U_{ab}, b \in V_{ab}$. Khi cố định b và cho a chạy trên X thì các tập U_{ab} làm thành một phủ mở của tập compac X, cho nên theo Định lý 10, có thể trích ra một họ con hữu hạn $\{U_{a_1b}, U_{a_2b}, \ldots, U_{a_nb}\}$ vẫn phủ được X. Đặt

$$g_b = f_{a_1b} \wedge f_{a_2b} \cdots \wedge f_{a_nb}; \quad V_b = \cap_{i=1}^n V_{a_ib}.$$

Do $\mathcal{R}$ là một dàn nên $g_b \in \mathcal{R}$. Với mỗi $x \in X$ phải có một $i \in \{1, \ldots, n\}$ để cho $x \in U_{a_ib}$, cho nên $f_{a_ib}(x) < f(x)+\varepsilon$, và do đó $g_b(x) \le f_{a_ib}(x) < f(x) + \varepsilon$. Vậy

$$g_b(x) < f(x) + \varepsilon \quad \forall x \in X. \tag{13}$$

Tương tự như thế

$$g_b(x) > f(x) - \varepsilon \quad \forall x \in V. \tag{14}$$

Khi b chạy trên X thì các tập V_b cũng làm thành một phủ mở của tập compac X nên lại có một họ con hữu hạn $\{V_{b_1}, V_{b_2}, \ldots, V_{b_m}\}$ vẫn phủ X. Vì $g_{b_i} \in \mathcal{R}, i = 1, \ldots, m$, mà $\mathcal{R}$ là một dàn nên đặt

$$g = g_{b_1} \vee g_{b_2} \cdots \vee g_{b_m}$$

ta lại có $g \in \mathcal{R}$. Với mỗi $x \in X$ phải có một j để cho $x \in V_{b_j}$ và theo (14) $g_{b_j}(x) > f(x) - \varepsilon$, do đó $g(x) \geq g_{b_j}(x) > f(x) - \varepsilon$. Vậy hàm g thỏa mãn (12). □

Ta nói một họ $\mathcal{P}$ hàm số trên X là một *vành* nếu $f_1, f_2 \in \mathcal{P} \Rightarrow f_1 + f_2 \in \mathcal{P}, f_1 f_2 \in \mathcal{P}$.

Định lý 17. (Stone) *Nếu một vành $\mathcal{P}$ những hàm số bị chặn trên một không gian metric compac X thoả mãn :*

$$(\forall a, b \in X)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\exists P \in \mathcal{P}) \quad P(a) = \alpha, P(b) = \beta, \tag{15}$$

thì mọi hàm liên tục trên X là giới hạn đều của một dãy hàm thuộc $\mathcal{P}$.

Chứng minh. Gọi $\mathcal{R}$ là bao đóng đều của $\mathcal{P}$, nghĩa là họ mà mỗi $f(x) \in \mathcal{R}$ là giới hạn đều của một dãy $\{g_n\} \subset \mathcal{P}$. Ta chứng minh $\mathcal{R}$ là một dàn. Muốn thế, xét một hàm bất kỳ $f(x) \in \mathcal{R}$. Với $\varepsilon = 1$ có một $g \in \mathcal{P}$ sao cho $|f(x) - g(x)| \leq 1 \ \forall x \in X$, cho nên $|f(x)| \leq c := \max_{x \in X} |g(x)| + 1 \ \forall x \in X$. [1] Khi ấy

$$|f(x)| = \sqrt{c^2 - [c^2 - f^2(x)]} = c\sqrt{1 - (1 - \frac{f^2(x)}{c^2})}$$

$$= c\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.1.3...(2n-3)}{2.4.6...2n}\left(1 - \frac{f^2(x)}{c^2}\right)^n\right\}$$

Chuỗi này hội tụ đều vì $0 \leq 1 - \frac{f^2(x)}{c^2} \leq 1$. Vậy nếu $f \in \mathcal{R}$ thì $|f| \in \mathcal{R}$. Chú ý rằng

$$f_1 \wedge f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|), \quad f_1 \vee f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|)$$

[1] Ký hiệu ":=" có nghĩa biểu thức bên trái được định nghĩa bằng biểu thức bên phải.

ta suy ra nếu $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$ thì $f_1 \wedge f_2 \in \mathcal{R}$ và $f_1 \vee f_2 \in \mathcal{R}$. Vậy $\mathcal{R}$ quả là một dàn. Theo giả thiết (15) $\mathcal{R}$ cũng thoả mãn điều kiện (11) nêu trong Định lý 16. Vậy theo định lý này mỗi hàm liên tục $f(x)$ trên X là giới hạn đều của một dãy $\{P_n\} \subset \mathcal{P}$. □

Hệ quả 1. (Định lý Weierstrass) *Mỗi hàm số liên tục $f(x)$ trên một tập compac $X \subset \mathbb{R}^k$ là giới hạn đều của một dãy đa thức với hệ số hữu tỉ.*

Thật vậy, họ $\mathcal{P}$ các đa thức trên X là một vành và với mọi $a, b \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ đa thức $P(x) = \alpha + \langle x - a, q\rangle$ thoả mãn $P(a) = \alpha, P(b) = \beta$ nếu chọn q để có $\langle b - a, q\rangle = \beta - \alpha$. Vậy theo Định lý Stone, với mỗi hàm liên tục $f(x)$ trên X và mỗi $\varepsilon > 0$ có một đa thức $P(x)$ sao cho $\max_{x\in X} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Hơn nữa, $P(x)$ có thể thay bằng một đa thức $Q(x)$ với hệ số hữu tỉ để cho $\max_{x\in X} |P(x) - Q(x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ và do đó $\max_{x\in X} |f(x) - Q(x)| \leq \varepsilon$. □

Thành thử tập các đa thức có hệ số hữu tỉ là trù mật trong không gian $\mathbb{C}_X$ các hàm liên tục trên X (với metric hội tụ đều), và vì tập đó đếm được (Chương 1, mục 3.2) nên *không gian $\mathbb{C}_X$ tách được.*

Khi $k = 1$ (hàm một biến) một hệ quả quan trọng khác là mệnh đề sau đây (đôi khi cũng gọi là định lý Weierstrass II) về sự xấp xỉ hàm số liên tục tuần hoàn bởi đa thức lượng giác.

Hệ quả 2. *Với mỗi hàm số $f(x)$ liên tục trên toàn đường thẳng và tuần hoàn theo chu kỳ 2π và với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước đều có một đa thức lượng giác*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{16}$$

sao cho $x : |f(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Xét các hàm số

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \sin x.$$

Dĩ nhiên, đó là những hàm số chẵn, liên tục, và tuần hoàn theo chu kỳ 2π. Cho x biến thiên trong đoạn $[0, \pi]$ và đặt $x = \arccos t$, ta thấy rằng các hàm số

$$\Phi(t) = \varphi(\arccos t), \quad \Psi(t) = \psi(\arccos t)$$

là liên tục trong đoạn $[-1,+1]$. Vậy theo Hệ quả 1 Định lý 17, tồn tại các đa thức $g(t), h(t)$ sao cho với mọi $t \in [-1,+1]$:

$$|\Phi(t) - g(t)| < \varepsilon/4\,, \quad |\Psi(t) - h(t)| < \varepsilon/4\,,$$

tức là với mọi $x \in [0,\pi]$:

$$|\varphi(x) - g(\cos x)| < \varepsilon/4\,, \quad |\psi(x) - h(\cos x)| < \varepsilon/4,$$

và vì $\varphi(x), \psi(x), \cos x$ đều là những hàm số chẵn, tuần hoàn theo chu kỳ 2π nên các bất đẳng thức trên cũng đúng với mọi x.

Theo trên, ta có $f(x)\sin x = \varphi(x)\sin x + \psi(x)$ cho nên

$$\begin{aligned} &|f(x)\sin x - g(\cos x)\sin x - h(\cos x)| \\ &\le |\varphi(x) - g(\cos x)|\sin x + |\psi(x) - h(\cos x)| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4, \end{aligned}$$

hay

$$|f(x)\sin x - u(x)| < \varepsilon/2, \tag{17}$$

trong đó $u(x) = g(\cos x)\sin x + h(\cos x)$ là một đa thức lượng giác.

Bằng cách tương tự, xuất phát từ hàm số $f(\frac{\pi}{2} - x)$ ta sẽ có

$$|f(\frac{\pi}{2} - x)\sin x - v(x)| < \varepsilon/2,$$

trong đó $v(x)$ cũng là một đa thức lượng giác. Thay $\frac{\pi}{2} - x$ bằng x ta lại có

$$|f(x)\cos x - v(\frac{\pi}{2} - x)| < \varepsilon/2, \tag{18}$$

và kết hợp (17) với (18), ta suy ra

$$\begin{aligned} &|f(x) - u(x)\sin x - v(\frac{\pi}{2} - x)\cos x| \\ &\le |f(x)\sin x - u(x)|\,|\sin x| + |f(x)\cos x - v(\frac{\pi}{2} - x)|\,|\cos x| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Vậy với mọi x

$$|f(x) - s(x)| < \varepsilon,$$

trong đó $s(x) = u(x)\sin x + v(\frac{\pi}{2} - x)\cos x$ là một đa thức lượng giác. □

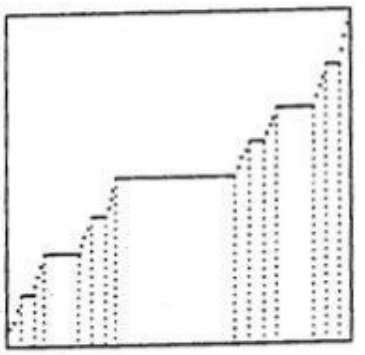
7*. FRACTAL

Ánh xạ liên tục biến những điểm gần nhau thành điểm gần nhau, nhưng cũng có khi biến những điểm xa nhau thành điểm gần nhau. Tính chất này hiện rõ trong những tập có tên là fractal, đối tượng nghiên cứu của một ngành toán học quan trọng mới ra đời không lâu.

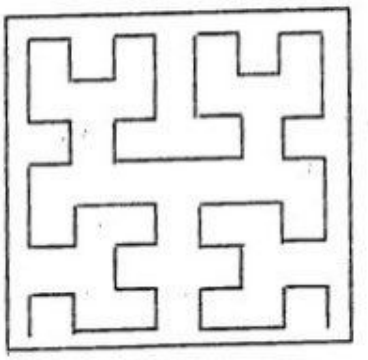
7.1. THANG CANTOR VÀ ĐƯỜNG CONG PEANO. Như đã thấy ở mục 2.5 một tính chất bất ngờ của tập Cantor là nó có thể ánh xạ 1-1 lên một đoạn thẳng bất kỳ. Nhưng điều sau đây còn kỳ lạ hơn.

Định lý 18. *Tồn tại một ánh xạ liên tục từ tập Cantor lên đoạn* $[0,1]$.

Chứng minh. Tập Cantor F là tập còn lại sau khi bỏ đi lần lượt: 1 khoảng $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ (khoảng "cấp 1"), 2 khoảng $(\frac{1}{9},\frac{2}{9}), (\frac{7}{9},\frac{8}{9})$ (khoảng "cấp 2"), 4 khoảng $(\frac{1}{27},\frac{2}{27}), (\frac{7}{27},\frac{8}{27}), (\frac{19}{27},\frac{20}{27}), (\frac{25}{27},\frac{26}{27})$ (khoảng "cấp 3"), v.v... Nếu $t \in G = [0,1] \setminus F$ thì t thuộc một khoảng cấp k nào đó, $k = 1,2,\ldots$. Có tất cả 2^{k-1} khoảng cấp k; nếu t thuộc khoảng thứ h trong số đó ($h = 1,2,\ldots,2^{k-1}$, theo thứ tự từ trái sang) thì ta đặt $\Theta(t) = \frac{2h-1}{2^k}$ (Hình 10a). Sau đó đặt $\Theta(0) = 0$, và với mỗi $t \in F \setminus \{0\}$ đặt $\Theta(t) = \sup\{\Theta(t') : t' \in G, t' < t\}$. Dễ thấy rằng $\Theta(t)$ là một hàm đơn điệu tăng, và tập các trị của nó trù mật trong đoạn $[0,1]$, do đó $\Theta(t)$ liên tục và biến tập Cantor thành cả đoạn $[0,1]$. □



Hình 10a



Hình 10b

Đồ thị của hàm $\Theta(t)$ là một đường bậc thang, gọi là *thang Cantor*.

Như vậy qua một ánh xạ liên tục một tập hoàn toàn gián đoạn như tập Cantor có thể biến thành một đoạn thẳng. Tổng quát hơn:

Định lý 19. *Bất cứ tập compac nào trong một không gian metric X cũng là ảnh của tập Cantor qua một ánh xạ liên tục.*

Chứng minh. Cho một tập compac bất kỳ $K \subset X$. Do tính compac, theo Định lý 9, có thể phủ K bằng một số hình cầu B_{r_1} ($r_1 = 1, 2, \ldots, 2^{n_1}$) có đường kính không quá $\frac{1}{2}$ và có $K_{r_1} = K \cap B_{r_1} \neq \emptyset$. (Bao giờ cũng có thể giả thiết số hình cầu đó có dạng 2^{n_1} vì nếu số đó là s thì ta lấy một số n_1 sao cho $2^{n_1} > s$ và đặt $B_{r_1} = B_s \ \forall r_1 = s+1, \ldots, 2^{n_1}$). Ta sẽ có $K = \cup_{r_1=1}^{2^{n_1}} K_{r_1}$, trong đó mỗi K_{r_1} không rỗng và có đường kính không quá $\frac{1}{2}$. Sau đó, bằng cách tương tự, mỗi tập compac K_{r_1} lại có thể biểu diễn thành hợp của 2^{n_2} tập con không rỗng $K_{r_1 r_2}, r_2 = 1, \ldots, 2^{n_2}$, có đường kính không quá $\frac{1}{2^2}$, v.v. đến bước thứ $k > 2$ ta có một họ những tập $K_{r_1 r_2 \ldots r_k} \neq \emptyset$, với $r_i = 1, \ldots, 2^{n_i}, i = 1, \ldots, k$ mà hợp của chúng bằng K, và mỗi tập có đường kính không quá $\frac{1}{2^k}$.

Song song với quá trình ấy ta để ý rằng nếu P_{n_k} là hợp tất cả 2^{n_k-1} khoảng kể cấp $n_k - 1$ của tập Cantor thì $F_{n_k} = [0,1] \setminus P_{n_k}$ là hợp của 2^{n_k} đoạn thẳng (mỗi đoạn có độ dài $\frac{1}{3^{n_k-1}}$), và tập Cantor chẳng qua là $F = \cap_{k=1}^{\infty} F_{n_k}$. Hiển nhiên mỗi đoạn của F_{n_k} nằm trong một đoạn của $F_{n_{k-1}}$, đoạn này lại nằm trong một đoạn của $F_{n_{k-2}}$, v.v., cho nên mỗi đoạn của F_{n_k} có thể ký hiệu $\Delta_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ trong đó chỉ số r_i có nghĩa $\Delta_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ nằm trong đoạn thứ r_i của F_{n_i} ($r_i \in \{1, \ldots, 2^{n_i}\}$). Vậy ứng với mỗi điểm $t \in F$ có một dãy vô hạn $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ sao cho $t = \cap_{k=1}^{\infty} \Delta_{r_1 r_2 \ldots r_k}$. Để cho gọn ta nói $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ là dãy đặc trưng của t.

Bây giờ ta xác định một ánh xạ f từ tập Cantor vào K như sau. Với mỗi t có dãy đặc trưng $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ ta cho tương ứng dãy $K_{r_1} \supset K_{r_1 r_2} \supset \cdots K_{r_1 r_2 \ldots r_k} \supset \cdots$. Vì đường kính của $K_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ dần tới 0, nên dãy đó thắt lại ở một điểm duy nhất, mà ta chọn làm $f(t)$. Nghĩa là $f(t) = \cap_{k=1}^{\infty} K_{r_1, r_2, \ldots, r_k}$. Còn lại là chứng minh sự liên tục của $f(t)$. Cho trước $\varepsilon > 0$ ta chọn k đủ nhỏ để $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$, và lấy $\delta = \frac{1}{3^{n_k}}$. Khi ấy nếu t được đặc trưng bởi dãy $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ thì mọi t' thỏa mãn $|t' - t| \leq \delta$ phải nằm trong cùng một đoạn $\Delta_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ với t, do đó $f(t')$ và $f(t)$ cùng thuộc $F_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ và $|f(t') - f(t)| \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. □

Sự tồn tại những ánh xạ liên tục từ tập Cantor lên một tập compac cũng đã được Peano và Hilbert xác lập qua việc xây dựng một đường cong liên tục đi qua mọi điểm của hình vuông, gọi là *đường cong Peano* (Hình 10b) .

Lebesgue đã đưa ra một cách gọn đẹp xây dựng đường cong Peano như sau. Như đã thấy trong chứng minh Định lý 19, tập Cantor $F = \cap_{k=1}^{\infty} F_k$ trong đó F_k là hợp của 2^k đoạn thẳng nhỏ, mỗi đoạn này lại là phần ba bên trái hay phần ba bên phải của một đoạn thuộc F_{k-1}. Do đó mỗi điểm $t \in G$ được đặc trưng bởi một dãy số $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, \ldots)$ với $\theta_k \in \{0, 2\}$ và $\theta_k = 0$ hay $\theta_k = 2$ tùy theo điểm t thuộc phần ba bên trái hay phần ba bên phải của đoạn thuộc F_{k-1} chứa nó. Đặt $\theta_k = 2t_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, ta có

$$t = 2(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \ldots + \frac{t_k}{3^k} + \ldots) \qquad t_k \in \{0, 1\}.$$

Điều này gợi ý định nghĩa ánh xạ $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ với

$$x_1(t) = \frac{t_1}{2} + \frac{t_3}{2^2} + \frac{t_5}{2^3} + \cdots + \frac{t_{2k-1}}{2^k} + \cdots$$
$$x_2(t) = \frac{t_2}{2} + \frac{t_4}{2^2} + \frac{t_6}{2^5} + \cdots + \frac{t_{2k}}{2^k} + \cdots$$

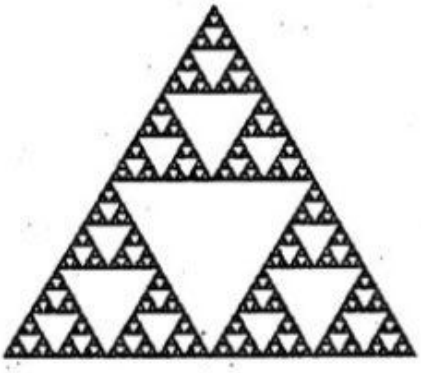
Có thể chứng minh rằng ánh xạ đó liên tục và biến tập Cantor thành hình vuông $[0, 1] \times [0, 1]$.

7.2. TẬP TỰ ĐỒNG DẠNG. Những tập "khác lạ" như tập Cantor hay đường cong Peano, khi xuất hiện lần đầu tiên cuối thế kỷ 19 sang đầu thế kỷ 20, đã gây xôn xao một thời nhưng sau đó hầu như bị lãng quên vì không thấy có ý nghiã gì sâu sắc lắm. Chỉ vài thập kỷ gần đây, quan niệm mới thay đổi. Nhờ những phát hiện của Mandelbrot (1975), người ta dần dần nhận ra tính phổ biến của những tập ấy trong thiên nhiên cũng như trong khoa học và kỹ thuật. Mandelbrot đã đặt tên cho các tập ấy và những tập có một số đặc điểm tương tự là *fractal*, hàm ý "gãy vỡ", từ chữ latinh "fractus".

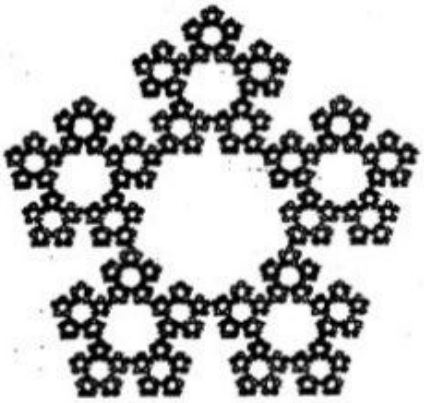
Đặc điểm chung của nhiều fractal là tính *tự đồng dạng* biểu hiện ở chỗ chúng có thể phân tích thành những bộ phận nhỏ tuỳ ý, mà mỗi bộ phận ấy lặp lại y hệt cấu trúc toàn thể. Tính tự đồng dạng ấy thể

hiện rõ ở tập Cantor hay đường cong Peano. Sau đây là một số fractal kinh điển khác.

Tập đệm Sierpinski. (Hình 11a) : tập xây dựng bằng cách xuất phát từ một tam giác đều, chia nó ra bốn tam giác đều nhỏ bởi các đường nối trung điểm của các cạnh, bỏ tam giác ở giữa, rồi lặp lại cách làm đó cho mỗi tam giác còn lại, cứ thế tiếp tục mãi. Theo phương pháp ấy có thể xây dựng đệm ngũ giác, lục giác, bát giác, v.v. (Hình 11b).



Hình 11a

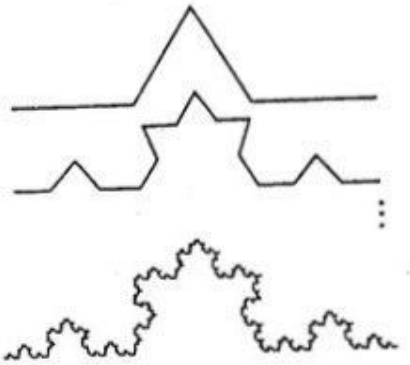


Hình 11b

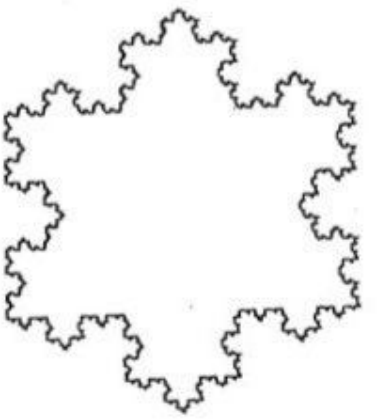
Đường von Koch (Hình 12a) : được tạo thành bằng cách lấy một đoạn thẳng bất kỳ, chia nó ra làm ba đoạn nhỏ bằng nhau, rồi thay đoạn giữa bởi hai cạnh còn lại của một tam giác đều xây dựng trên đoạn đã bỏ. Sau phép làm đó thì có bốn đoạn (mỗi đoạn bằng 1/3 đoạn gốc). Lặp lại y như thế với mỗi đoạn mới này và cứ thế tiếp tục mãi.

Ba đường von Koch xây dựng trên ba cạnh của một tam giác đều hợp lại thành một *bông tuyết von Koch* (Hình 12b). Cứ mỗi bước lặp đường chu vi tăng theo tỉ số 4/3, cho nên sau k bước lặp thì độ dài chu vi bằng $(\frac{1}{3})^k \to +\infty$ khi $k \to +\infty$, trong khi đó diện tích luôn luôn bị chặn bởi diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác xuất phát. Sự kiện này cho thấy có nhiều tính chất của các hình sơ cấp thông thường không còn đúng cho các fractal.

7.3. KHOẢNG CÁCH HAUSDORFF GIỮA HAI TẬP. Để có thể định nghĩa giới hạn của một dãy tập ta cần biết cách đánh giá mức độ gần nhau ("khoảng cách") giữa hai tập trong một không gian metric.



Hình 12a



Hình 12b

Cho một tập A trong một không gian metric (X, ρ). Với mỗi điểm $x \in X$ ta đặt $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$ và gọi $\rho(x, A)$ là *khoảng cách từ điểm x đến tập A*. Hiển nhiên $\rho(x, A) = 0$ khi và chỉ khi có một dãy $y_n \in A$ sao cho $\rho(x, y_n) \leq 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tức là sao cho $y_n \to x$. Do đó $\rho(x, A) = 0$ đồng nghĩa với $x \in \overline{A}$ (bao đóng của A).

Tập $A_\delta := \{x \in X : \rho(x, A) \leq \delta\}$, gồm những điểm cách tập A không quá δ, gọi là *δ-bao* của A. Nếu A, B là hai tập trong không gian metric (X, ρ) thì $B \subset A_\delta$ có nghĩa là mọi điểm của B đều cách A không quá δ. Khi ấy số

$$d(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset B_\delta,\ B \subset A_\delta\}.$$

gọi là *khoảng cách Hausdorff* giữa hai tập A, B.

Định lý 20. *Khoảng cách Hausdorff là một metric trong họ $\mathcal{K}$ các tập con compac không rỗng của X. Nếu X là không gian metric đủ thì với metric ấy $\mathcal{K}$ trở thành một không gian metric đủ.*

Chứng minh . Trước hết ta chứng minh $d(\cdot, \cdot)$ là một metric, tức là:

(a) $d(A, B) \geq 0$ và $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;

(b) $d(A, B) = d(B, A)$;

(c) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ ("bất đẳng thức tam giác").

Hai tính chất (a),(b) gần như hiển nhiên. Để thấy rõ (c) chú ý rằng

nếu $A \subset B_{\delta_1}, B \subset A_{\delta_1}$, và $B \subset C_{\delta_2}, C \subset B_{\delta_2}$, thì

$$A \subset C_{\delta_1+\delta_2}, \quad C \subset A_{\delta_1+\delta_2},$$

có nghĩa $d(A, C) \leq \delta_1 + \delta_2$, và do đó suy ra (c) bằng cách cho $\delta_1 \to d(A, B), \delta_2 \to d(B, C)$.

Bây giờ giả sử X là không gian metric đủ và xét một dãy cơ bản trong $\mathcal{K}$ nghĩa là một dãy $\{A_k\} \subset \mathcal{K}$ sao cho với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một $N(\varepsilon)$ để cho

$$d(A_k, A_h) \leq \varepsilon \quad \text{khi} \quad k \geq h > N(\varepsilon). \tag{19}$$

Ta sẽ chứng minh $A = \cap_h \overline{(\cup_{k \geq h} A_k)} \neq \emptyset$ và $d(A_k, A) \to 0$ khi $k \to \infty$. Thật vậy, cho $\varepsilon > 0$ và ký hiệu $N_\nu := N(2^{-\nu}\varepsilon)$, nghĩa là $d(A_k, A_h) \leq 2^{-\nu}\varepsilon$ khi $k \geq h > N_\nu$. Lấy một dãy tăng $\{k_\nu\}$ sao cho $k_\nu \geq N_\nu$. Cho $x_0 \in A_{k_0}$. Giả sử $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$ đã được chọn thỏa mãn $x_i \in A_{k_i}$, $\rho(x_i, x_{i+1}) < 2^{-i}\varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Khi ấy chọn $x_{\nu+1} \in A_{k_{\nu+1}}$ sao cho $\rho(x_\nu, x_{\nu+1}) < 2^{-\nu}\varepsilon$ (có thể được vì $\rho(x_\nu, A_{k_{\nu+1}}) \leq d(A_{k_\nu}, A_{k_{\nu+1}}) < 2^{-\nu}\varepsilon$). Vì X là không gian đủ mà $\{x_\nu\}$ là dãy cơ bản nên $x_\nu \to x \in X$. Với mọi ν ta có $A_{k_\nu} \subset \cup_{k \geq k_\nu} A_k$, nên $x \in \overline{\cup_{k \geq k_\nu} A_k}$. Do đó $x \in A$.

Thành thử với mỗi $k_0 \geq N_0$ và $x_0 \in A_{k_0}$ đều có một $x \in A$ sao cho $\rho(x_0, x) \leq 2\varepsilon$, chứng tỏ $A_{k_0} \subset A_{2\varepsilon}$ khi $k_0 \geq N_0$. Ngược lại, với mỗi $x \in A$ ta có, với mọi $k_0 \geq N_0$: $x \in \overline{\cup_{k \geq k_0} A_k}$ cho nên tìm được $h_0 \geq N(\varepsilon)$ thỏa mãn $\rho(x, A_{h_0}) \leq \varepsilon$. Khi ấy $\rho(x, A_{k_0}) \leq \rho(x, A_{h_0}) + d(A_{h_0}, A_{k_0}) \leq 2\varepsilon$ (theo (19)), chứng tỏ $A \subset (A_{k_0})_{2\varepsilon}$. Vậy $d(A_k, A) \leq 2\varepsilon$ với mọi $k \geq k_0$, nghĩa là $d(A_k, A) \to 0$ khi $k \to +\infty$.

Cuối cùng, chỉ còn phải chứng minh $A \in \mathcal{K}$. Với mỗi $\varepsilon > 0$ có k sao cho $A \subset (A_k)_\varepsilon$, mà do A_k compac nên nó có thể phủ bởi một số hữu hạn hình cầu tâm $x^1, \ldots, x^m$ bán kính ε. Khi ấy các hình cầu tâm $x^1, \ldots, x^m$ bán kính 2ε phủ A. Vậy A hoàn toàn bị chặn, do đó compac theo Định lý 9. □

Bổ đề 1. *Trong một không gian metric X một ánh xạ liên tục $S : X \to X$. biến mỗi tập $D \in \mathcal{K}$ thành $S(D) \in \mathcal{K}$. Nói cách khác, ảnh của một tập compac qua một ánh xạ liên tục là một tập compac.*

Chứng minh. Xét một họ tập mở bất kỳ $\{G_\alpha\}$ phủ $S(D)$. Do liên tục của ánh xạ S nên theo Định lý 12 các tập $S^{-1}(G_\alpha)$ mở và dĩ nhiên hợp

của chúng phủ D. Nhưng D compac nên có một số hữu hạn tập này: $S^{-1}(G_{\alpha_1}), \ldots, S^{-1}(G_{\alpha_k})$ vẫn phủ được D. Khi ấy các tập $G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_k}$ phủ $S(D)$. Vậy mọi phủ mở của $S(D)$ đều chứa một phủ con hữu hạn, do đó, theo Định lý 10, $S(D)$ compac. □

Kết hợp bổ đề này với Định lý 19 ta thấy rằng:

Một tập con của một không gian metric là compac khi và chỉ khi nó là ảnh của tập Cantor qua một ánh xạ liên tục.

Bổ đề trên cũng cho phép xem một ánh xạ liên tục $S : X \to X$ như một ánh xạ $S : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, từ $\mathcal{K}$ vào chính $\mathcal{K}$, biến mỗi phần tử $D \in \mathcal{K}$ thành $S(D) \in \mathcal{K}$.

7.4. LƯỢC ĐỒ HÀM LẶP. Như đã thấy ở mục 7.2, một đặc trưng của nhiều fractal là tính tự đồng dạng, tức là được cấu tạo từ những bộ phận, mà mỗi bộ phận đều lặp lại cấu trúc y hệt của toàn thể. Dựa vào qui luật cấu thành đó ta có thể xây dựng fractal theo một thủ tục lặp, có thể xem như một thứ "mã di truyền hình học" của fractal ấy vì nó chứa đựng tất cả thông tin cơ bản quyết định cấu trúc fractal.

Xét một số hữu hạn ánh xạ liên tục $S_i : X \to X$, $i = 1, \ldots, m$, từ một không gian metric X vào chính nó. Ta có thể xác định một ánh xạ mới $S : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ bằng cách đặt, với mọi tập $A \in \mathcal{K}$:

$$S(A) = \cup_{i=1}^{m} S_i(A). \tag{20}$$

Như trên đã thấy $S_i(A) \in \mathcal{K}$ $\forall i = 1, \ldots, m$ nên $S(A) \in \mathcal{K}$.

Một tập $F \subset X$ được gọi là *bất biến* của họ ánh xạ $S_1, \ldots, S_m$ nếu

$$F = \cup_{i=1}^{m} S_i(F),$$

hay nói cách khác, nếu F là *điểm bất động* của ánh xạ $S : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$.

Theo định nghĩa ở mục 5.2 một ánh xạ $P : D \to D$ gọi là phép co nếu có một số c sao cho $0 < c < 1$ và $\rho(P(x), P(y)) \leq c\rho(x, y)$ $\forall x, y \in D$. Một ánh xạ $P : D \to D$ mà $\rho(P(x), P(y)) = c\rho(x, y)$ với mọi $x, y \in D$ thì biến mỗi tập con của D thành một tập đồng dạng với chính nó, nên được gọi là một phép *đồng dạng*.

Ví dụ: Lấy $D = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, và hai phép co $S_1(x) = \frac{1}{3}x$, $S_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$ (thật ra là hai phép đồng dạng theo tỉ số: $c = \frac{1}{3}$). Dễ kiểm tra lại rằng tập Cantor F chính là tập bất biến đối với hai ánh xạ co này.

Cụ thể $S(F) := S_1(F) \cup S_2(F)$, trong đó $S_1(F), S_2(F)$ chính là hai "nửa" trái và phải của F. Cũng như thế, đệm Sierpinski là tập bất biến đối với ba phép co theo tỉ lệ 1/2 trên tam giác xuất phát.

Một họ phép co thường được gọi là một *lược đồ hàm lặp* (viết tắt IFS, iterated function scheme). Như sẽ thấy trong Bổ đề sau, một lược đồ hàm lặp xác định một ánh xạ co trong không gian metric đủ $\mathcal{K}$ (với metric Hausdorff $d(\cdot,\cdot)$), và phần tử bất động trong ánh xạ co này, xây dựng theo cách xấp xỉ dần như trong chứng minh định lý ánh xạ co của Banach (mục 5.2) chính là một fractal sinh ra bởi lược đồ hàm lặp ấy.

Bổ đề 2. Nếu mỗi $S_i : X \to X$ là một ánh xạ co theo tỉ lệ $c_i \in (0,1)$, tức là

$$\rho(S_i(x), S_i(y)) \le c_i \rho(x,y) \quad \forall x, y \in X,$$

thì $S : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ là ánh xạ co theo tỉ lệ $c = \max\{c_1, \ldots, c_m\}$:

$$d(S(A), S(B)) \le c d(A,B) \quad \forall A, B \in \mathcal{K}.$$

Chứng minh. Cho $A, B \in \mathcal{K}$. Dễ thấy rằng với mọi $i = 1, \ldots, m$:

$$d(S_i(A), S_i(B)) \le c_i d(A,B). \tag{21}$$

Thật vậy, nếu với một $\delta > 0$ nào đó ta có $A \subset B_\delta, B \subset A_\delta$ thì với mọi $x \in A$: $\rho(S_i(x), S_i(B)) = \inf_{y\in B} \rho(S_i(x), S_i(y)) \le c_i \inf_{y\in B} \rho(x,y) = c_i \rho(x,B) \le c_i\delta$. Do đó $S_i(A) \subset [S_i(B)]_{c_i\delta}$. Cũng như thế: $S_i(B) \subset [S_i(A)]_{c_i\delta}$. Vậy $d(S_i(A), S_i(B)) \le c_i\delta$, do đó suy ra (21). Từ đây để chứng minh Bổ đề chỉ còn việc nhận xét rằng nếu $S_i(A) \subset (S_i(B))_{c_i\delta}$ và $S_i(B) \subset (S_i(A))_{c_i\delta}$ với mọi $i = 1, \ldots, m$, thì ta cũng có $S(A) \subset [S(B)]_{c\delta}$ và $S(B) \subset [S(A)]_{c\delta}$ với $c = \max\{c_1, \ldots, c_m\}$, vì chẳng hạn:

$$S(A) = \cup_{i=1}^m S_i(A) \subset \cup_{i=1}^m (S_i(B))_{c_i\delta} \subset (\cup_{i=1}^m S_i(B))_{c\delta} = [S(B)]_{c\delta}.$$

Do đó

$$d(S(A), S(B)) \le c d(A,B). \qquad \square$$

Định lý 21. *Trong một không gian metric đủ (X, ρ) một họ ánh xạ co $S_i : D \to D, i = 1, 2, \ldots, m$, từ một tập compac $D \subset X$ vào chính nó, bao giờ cũng có một tập bất biến duy nhất $F \in \mathcal{K}$.*

Nếu tập $E \in \mathcal{K}$ thỏa mãn $S_i(E) \subset E \; \forall i = 1, \ldots, m$, thì

$$d(S^k(E), F) \to 0 \quad (k \to +\infty),$$

trong đó S^k là lặp thứ k của ánh xạ $S : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ xác định bởi (20), và

$$S^0(E) = E, \; S^k(E) = S(S^{k-1}(E)) \; (k \geq 1).$$

Chứng minh. (i) Nếu mỗi ánh xạ S_i là phép co theo tỉ lệ $c_i \in (0, 1)$ thì theo Bổ đề 2, ánh xạ $S : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ là phép co theo tỉ lệ $c = \max\{c_1, \ldots, c_m\}$, trong không gian metric đủ $(\mathcal{K}, d)$. Vậy theo Định lý 13, ánh xạ đó có một điểm bất động duy nhất F, cũng tức là một tập bất biến duy nhất của ánh xạ $S : D \to D$.

Đồng thời, theo chứng minh Định lý 13, F là giới hạn (theo metric Hausdorff) của dãy xấp xỉ dần $E, S(E), S^2(E), \ldots, S^k(E), \ldots$, tức là $d(S^k(E), F) \to 0$ khi $k \to +\infty$. □

Vậy bất kể tập ban đầu $E \in \mathcal{K}$ như thế nào, miễn là thỏa mãn $S_i(E) \subset E \; \forall i$, các lặp $S^k(E)$ bao giờ cũng hội tụ tới F. Nói cách khác, các $S^k(E)$ cho ta những tập xấp xỉ của F ngày càng sát hơn.

Nhiều fractal được xây dựng như là tập bất biến theo một lược đồ hàm lặp trong không gian $X = \mathbb{R}^n$.

Khi các ánh xạ co $S_1, \ldots, S_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là những phép đồng dạng, tức là thoả mãn

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| = c_i \|x - y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

với $0 < c_i < 1$ thì mỗi S_i biến các tập con compac, không rỗng , thành những tập đồng dạng hình học, và tập bất biến F là hợp của một số bản sao thu nhỏ của chính nó, nghĩa là một hình tự đồng dạng. Tập Cantor, đệm Sierpinski, đường von Koch đều có thể xây dựng theo cách đó.

Định lý sau giải quyết bài toán ngược: phải chăng mọi tập compac, không rỗng , đều có thể xem (ít nhất gần đúng) như tập bất biến của một họ phép đồng dạng nào đó ?

Định lý 22. *Với mỗi tập con không rỗng và compac E của $\mathbb{R}^n$ và mỗi $\delta > 0$ đều có những phép đồng dạng $S_1, \ldots, S_m$ mà tập bất biến F thỏa mãn $d(E, F) < \delta$.*

Chứng minh. Lấy một họ hình cầu $B_1, \ldots, B_m$ phủ E, có bán kính không quá $\delta/4$ và tâm trong E. Khi ấy $E \subset \cup_{i=1}^m B_i \subset E_{\delta/4}$, với $E_{\delta/4} = \{x : d(x, E) \leq \frac{1}{4}\delta\}$. Với mỗi i lấy một phép đồng dạng co bất kỳ S_i, với tỉ lệ co $c < \frac{1}{2}$, và ánh xạ E vào B_i. Gọi F là tập bất biến của họ phép co đó, ta có theo Định lý 21: $d(E, F) \leq \frac{1}{1-c} d(E, S(E)) < 2d(E, S(E))$. Vậy để hoàn thành chứng minh ta chỉ còn phải vạch rõ $d(E, S(E)) \leq \delta/2$. Mà vì $S_i(E) \subset B_i$ nên với mọi $x \in B_i$ ta có $d(x, S_i(E)) \leq \delta/2$, tức là $B_i \subset (S_i(E))_{\delta/2}$, do đó $E \subset \cup_{i=1}^m B_i \subset \cup_{i=1}^m (S_i(E))_{\delta/2} \subset (S(E))_{\delta/2}$. Đồng thời $S(E) \subset \cup_{i=1}^m B_i \subset E_{\delta/4}$. Vậy $d(E, S(E)) \leq \delta/2$. □

Thành thử bất kỳ một tập compac $E \subset \mathcal{R}^n$ nào cũng có thể được xấp xỉ sát tuỳ ý bởi một tập bất biến F theo một lược đồ hàm lặp. Dựa trên cơ sở đó người ta xây dựng được một phương pháp mô tả, lưu trữ hoặc truyền những hình ảnh phức tạp mà chỉ cần biết một số ít phép co xác định lược đồ hàm lặp để tái lập được chúng.

7.5. HÀM FRACTAL. Trước đây nhiều người cứ nghĩ một hàm liên tục ắt phải có đạo hàm tại hầu hết mọi điểm. Weierstrass là nhà toán học đưa ra đầu tiên ví dụ về một hàm liên tục nhưng không có đạo hàm tại bất cứ điểm nào.

Hình 13

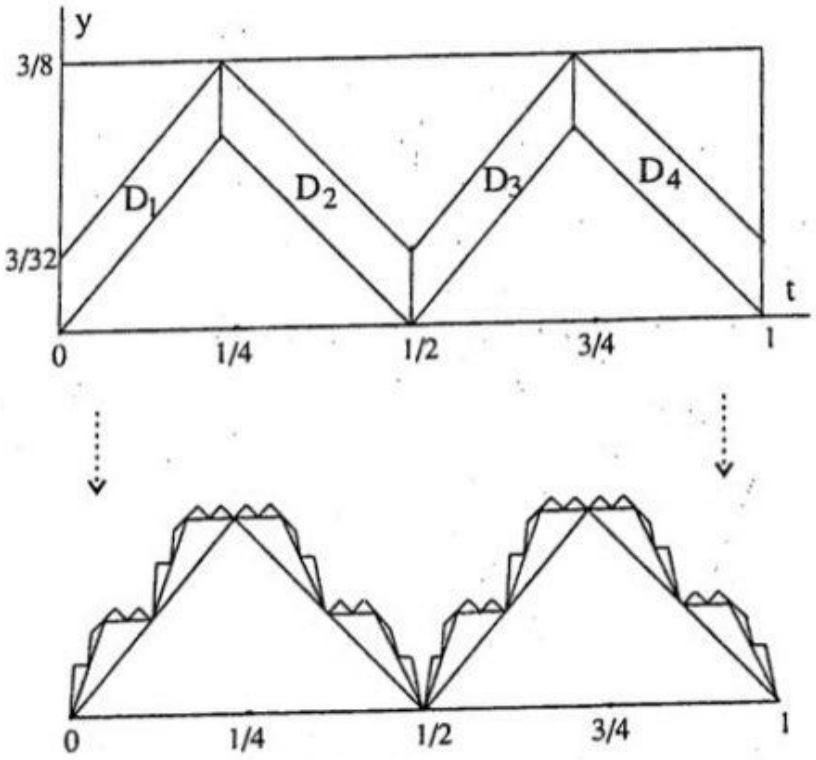
Một hàm số mà quanh điểm t_0 có dáng điệu như ở Hình 13 thì rõ ràng không có đạo hàm tại điểm ấy. Vậy muốn có một hàm số không có đạo hàm tại mọi điểm thì có một cách là xây dựng thế nào để cho trong lân cận nhỏ tuỳ ý của *mọi* điểm cấu trúc của nó lặp lại căn bản dáng điệu y hệt quanh t_0. Nghĩa là sao cho trên mỗi khoảng, dù

nhỏ đến mức nào, ta cũng có gần như một bản sao thu nhỏ của Hình 13. Đồ thị một hàm số như thế là một fractal, cho nên các hàm kiểu Weierstrass gọi là *hàm fractal.*

Lược đồ hàm lặp có thể giúp ta phương pháp xây dựng một hàm fractal. Chẳng hạn để xây dựng hàm Van der Waerden (Hình 14), ta xuất phát từ chữ nhật $D = [0,1] \times [0, \frac{3}{8}]$ và xét các ánh xạ

$$S_i : (t,y) \mapsto \frac{1}{4}\begin{pmatrix} t+(i-1) \\ t+y \end{pmatrix} \quad i = 1,3$$

$$(t,y) \mapsto \frac{1}{4}\begin{pmatrix} t+(i-1) \\ -t+y+1 \end{pmatrix} \quad i = 2,4$$



Hình 14

Mỗi ánh xạ ấy biến đoạn thẳng thẳng đứng trong mặt phẳng (t,y) thành đoạn thẳng thẳng đứng với độ dài co theo tỉ lệ 1/4, cho nên các tập $D_i = S_i(D), i = 1,2,3,4$, là bình hành và tập $S(D) = S_1(D)$ là một dãy bốn bình hành kế tiếp thành dải chữ chi như trong hình 14. Lặp $S^2(D) = S(S(D))$ sẽ là một dải gấp khúc chữ chi gồm $4^2 = 16$ bình hành, v.v. . Có thể chứng minh dễ dàng rằng tập bất biến

$F = \cap_{k=1}^{\infty} S^k(D)$ sẽ là đồ thị hàm số

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_0(4^k t)}{4^k} \tag{22}$$

trong đó $f_0(t)$ bằng khoảng cách từ t đến số nguyên gần t nhất, tức là hàm số tuần hoàn theo chu kỳ 1 mà đồ thị trong khoảng $0 \leq t \leq 1$ trùng với đường gấp khúc tạo nên bởi biên dưới của dải $S(D)$.

Theo (22) $f(t)$ là tổng một chuỗi hàm liên tục hội tụ đều nên nó liên tục. Để thấy rằng $f(t)$ không có đạo hàm tại bất cứ điểm nào ta xét một điểm tùy ý $t \in [0, 1]$. Bao giờ cũng tìm được một dãy đoạn lồng nhau Δ_j chứa t có dạng

$$\Delta_j = \left[\frac{s_j - 1}{2.4^j}, \frac{s_j}{2.4^j}\right], \quad (s_j \text{ là số tự nhiên}).$$

Trên đoạn Δ_j có độ dài $1/(2.4^j)$ bao giờ cũng có một điểm t_j cách t một khoảng $1/(4^{j+1})$. Từ cách xây dựng ta có

$$\frac{f_k(t_j) - f_k(t)}{t_j - t} = 0 \quad \forall k > j.$$

Và lại, với $k \leq j$ thì hàm $f_k(t)$ tuyến tính trên Δ_k, cho nên

$$\frac{f_k(t_j) - f_k(t)}{t_j - t} = \pm 1 \quad \forall k \leq j.$$

Cộng từng vế các hệ thức trên ta được

$$\frac{f(t_j) - f(t)}{t_j - t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(t_j) - f_k(t)}{t_j - t}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(\pm 1) = \begin{cases} \text{số nguyên chẵn nếu } n \text{ lẻ} \\ \text{số nguyên lẻ nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

Thành thử tỉ số

$$\frac{f(t_j) - f(t)}{t_j - t}$$

không tiến đến giới hạn nào cả khi $t_j \to t (j \to \infty)$. Vậy $f(t)$ không có đạo hàm tại t.

BÀI TẬP

Khái niệm không gian metric

1. Nếu A là một tập con của một không gian metric X, ta định nghĩa *đường kính* của A là số

$$d(A) = \sup_{x,y \in A} \rho(x, y).$$

Cho $A = \cup_{i=1}^{k} A_i$, và giả sử mỗi A_i đều có đường kính $< \varepsilon$. Chứng minh rằng nếu $x_i \in A_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ ta có

$$d(A) \leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{k-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \tag{23}$$

Chỉ dẫn: Lấy 2 điểm bất kỳ $x, y \in A$ và chứng minh rằng $\rho(x, y)$ không lớn hơn vế phải của (23).

2. Với mỗi điểm $x \in X$ và mỗi tập con A của một không gian metric X ta đặt $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$. Nếu A, B là hai tập bất kỳ trong không gian metric X thì *khoảng cách Hausdorff* giữa A và B là số

$$d(A, B) = \max \left(\sup_{x \in A} \rho(x, B), \sup_{y \in B} \rho(y, A) \right).$$

Chứng minh rằng nếu $d(A, B) < \varepsilon$ thì với mỗi $x \in A$ có ít nhất một $y \in B$ sao cho $\rho(x, y) < \varepsilon$ và với mỗi $y \in B$ có ít nhất một $x \in A$ sao cho $\rho(x, y) < \varepsilon$. Ngược lại nếu với mỗi $x \in A$ có một $y \in B$ sao cho $\rho(x, y) \leq \varepsilon$ và với mỗi $y \in B$ có một $x \in A$ sao cho $\rho(x, y) \leq \varepsilon$ thì $d(A, B) \leq \varepsilon$.

Tập mở và đóng

3. Một điểm x gọi là *điểm dính* của một tập A (trong một không gian metric X) nếu mọi lân cận của x đều chứa ít nhất một điểm thuộc A. Chứng minh rằng A là đóng khi và chỉ khi nó chứa mọi điểm dính của nó, và tập các điểm dính của A chẳng qua là bao đóng của A. Một điểm dính của A mà không phải là điểm tụ thì gọi là một điểm *cô lập* của A. Chứng minh rằng nếu A là một tập con của đường thẳng số thực thì tập các điểm cô lập của nó cùng lắm là đếm được.

4. Chứng minh rằng x là một điểm dính của A (trong không gian metric X) khi và chỉ khi $\rho(x, A) = 0$ (xem bài tập 3). Suy ra A là đóng khi và chỉ khi:

$$\rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A.$$

5. Cho A là một tập bất kỳ trong không gian metric X. Chứng minh rằng tập các điểm x sao cho

$\rho(x, A) < \varepsilon$ là mở, tập các điểm x sao cho
$\rho(x, A) \leq \varepsilon$ là đóng.

6. Cho F_1, F_2 là hai tập đóng rời nhau. Chứng minh rằng tập $G = \{x : \rho(x, F_1) < \rho(x, F_2)\}$ là mở và

$$F_1 \subset G,\ \overline{G} \cap F_2 = \emptyset$$

7. Chứng minh rằng đối với hai tập đóng bất kỳ, rời nhau, (trong một không gian metric), F_1, F_2, bao giờ cũng có hai tập mở rời nhau G_1, G_2 sao cho $F_1 \subset G_1,\ F_2 \subset G_2$ (xem bài tập 6).

8. Chứng minh rằng trong một không gian metric, mỗi tập đóng là một tập kiểu G_δ, tức là nếu F là tập đóng thì có một dãy tập mở G_n sao cho $F = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$.

Chỉ dẫn: Lấy $G_n = \left\{x : \rho(x, F) < \frac{1}{n}\right\}$ (xem bài tập 5).

9. Mỗi tập mở trong không gian metric là một tập kiểu F_σ, tức là nếu G là tập mở thì có một dãy tập đóng F_n sao cho $G = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$.

10. Ta nói không gian metric X có một *cơ sở đếm được* nếu nó có một họ đếm được tập mở $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$, sao cho với mọi $x \in X$ và mọi tập mở G chứa x đều có một U_k chứa x và nằm trọn trong G. Chứng minh rằng khi ấy σ-đại số Borel của X cũng là σ-đại số nhỏ nhất bao hàm họ $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ (xem bài tập 8,9).

Không gian đủ

11. Xét không gian X gồm tất cả các dãy số $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ sao cho $x_n \to \infty$ khi $n \to \infty$. Chứng minh rằng $\rho(x, y) = \max_n |x_n - y_n|$ là một metric trong X và với metric ấy X là không gian đủ.

12. Cho X là không gian tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên đường thẳng và có tính chất $f(x) = 0$ với mọi x ngoài một đoạn nào đo (thay đổi theo f). Chứng minh rằng với metric $\rho(f, g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$, X là không gian không đủ.

Không gian compac

13. Chứng minh rằng một dãy giảm dần $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ các tập con đóng của một tập compac bao giờ cũng có giao không rỗng .

14. Nếu một tập compac bằng hợp của một dãy tăng dần $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ các tập con mở của nó thì nó trùng với một trong các G_n đó.

15. Hợp của một số hữu hạn tập compac là compac.

Ánh xạ liên tục. Hàm số thực liên tục

16. Một ánh xạ liên tục $f : X \to Y$ biến mọi tập compac $K \subset X$ thành tập compac $f(K) \subset Y$.

Chỉ dẫn: Xét một phủ mở bất kỳ của $f(K)$ và dựa vào Định lý 11 (sử dụng tính compac của K) để suy ra một phủ mở hữu hạn.

17. Một hàm số thực f xác định trên một không gian metric X gọi là *nửa liên tục trên* nếu với mọi số thực a tập $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ là đóng. Chứng minh rằng một hàm số nửa liên tục trên, trên một tập compac M, thì phải đạt một cực đại trên tập đó.

Chỉ dẫn: Xem chứng minh Định lý 11. Trước hết chứng minh (bằng phản chứng) phải có một hằng số n_0 sao cho $(\forall x \in M)\ f(x) \leq n_0$.

18. Một hàm số thực f xác định trên một không gian metric X gọi là nửa *liên tục dưới* nếu với mọi số thực a tập $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ là đóng. Chứng minh rằng một hàm số nửa liên tục dưới, trên một tập compac, thì phải đạt một cực tiểu trên tập đó. (Xem bài tập 17).

19. Nếu một dãy tăng dần các hàm số liên tục: $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ mà hội tụ trên một tập compac M tới một hàm số liên tục $f(x)$ thì nó phải hội tụ đều trên tập compac ấy *(định lý Dini)*.

Chỉ dẫn: Với $\varepsilon > 0$, cứ mỗi $x_0 \in M$ thì có một n_0 sao cho $0 \leq f(x_0) - f_{n_0}(x_0) \leq \varepsilon$, và do liên tục phải có một hình cầu mở S_{x_0} tâm ở x_0, trong đó $0 \leq f(x) - f_{n_0}(x) < 3\varepsilon$ và do đó $0 \leq f(x) - f_n(x) < 3\varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Họ các S_x, ứng với mọi $x \in M$, phủ M. Sau đó dùng định lý Heine-Borel, lấy một phủ hữu hạn, v.v. .

Chương 3

ĐỘ ĐO

1. Ý NGHĨA VẤN ĐỀ

Trên đường thẳng $\mathbb{R}$ có những tập điểm được gán một số không âm gọi là "độ dài". Chẳng hạn, độ dài của một đoạn $\Delta = [a, b]$ là $|\Delta| = b - a$; nếu một tập có thể phân tích được thành một số hữu hạn đoạn rời nhau $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ thì độ dài của nó dĩ nhiên là $|\Delta_1| + |\Delta_2| + \cdots + |\Delta_n|$. Nhưng có những tập mà trực quan không cho ta thấy rõ nên xác định độ dài của nó như thế nào, chẳng hạn như tập các điểm hữu tỉ trong đoạn $[0, 1]$. Do đó nảy ra vấn đề: làm thế nào mở rộng khái niệm độ dài cho những tập phức tạp hơn là đoạn thẳng hoặc hợp một số hữu hạn đoạn thẳng.

Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ và trong không gian $\mathbb{R}^3$ cũng có vấn đề tương tự. Trong mặt phẳng, ta biết đo diện tích của những hình chữ nhật hoặc những tập có thể phân tích thành một số hữu hạn hình chữ nhật, nhưng làm sao đo diện tích của những tập phức tạp hơn? Trong không gian $\mathbb{R}^3$, ta biết đo thể tích của những hình hộp hoặc những tập có thể phân tích thành một số hữu hạn hình hộp, nhưng làm sao đo thể tích của những tập phức tạp hơn ?

Để thống nhất cách phát biểu vấn đề, ta hãy qui ước gọi chung bằng danh từ "đoạn trong $\mathbb{R}^k$ " một đoạn thẳng thông thường nếu $k =$

1, một hình chữ nhật nếu $k = 2$, một hình hộp nếu $k = 3$. Hình chữ nhật ở đây hiểu theo nghĩa là tập các điểm $x = (\xi_1, \xi_2)$ sao cho $\alpha_1 \le \xi_i \le \beta_i$ $(i = 1, 2)$; hình hộp là tập các điểm $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ sao cho $\alpha_i \le \xi_i \le \beta_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Ta cũng gọi chung là "độ đo" của đoạn Δ và dùng ký hiệu $|\Delta|$ để biểu thị độ dài của Δ nếu Δ là một đoạn thông thường, diện tích nếu Δ là một hình chữ nhật, thể tích nếu Δ là một hình hộp.

Vấn đề đặt ra là: hãy tìm một lớp tập $\mathcal{M}^k$ trong $\mathbb{R}^k$ để có thể gán cho mỗi tập $A \in \mathcal{M}^k$ một số $m(A)$, gọi là độ đo của nó, sao cho:

a) $0 \le m(A) \le +\infty$

b) mỗi đoạn Δ đều thuộc lớp $\mathcal{M}^k$ và $m(\Delta) = |\Delta|$;

c) nếu $A, B \in \mathcal{M}^k$ và rời nhau thì

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

Peano và Jordan đã giải quyết vấn đề này như sau:

Cho trước một tập bị chặn A trong $\mathbb{R}^k$, ta gọi "*độ đo ngoài*" của nó là số

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i| : \cup_{i=1}^{n} \Delta_i \supset A \right\},$$

trong đó Δ_i là những đoạn. Nếu A nằm trong một đoạn Δ_0 thì ta gọi "*độ đo trong*" của nó là số

$$m_*(A) = |\Delta_0| - m^*(\Delta_0 \setminus A).$$

Tập hợp A sẽ gọi là *đo được* nếu $m^*(A) = m_*(A)$. Lúc đó, giá trị chung của $m^*(A)$ và $m_*(A)$ gọi là *độ đo* của A và được ký hiệu bằng $m(A)$.

Cho $\mathcal{M}^k$ là lớp các tập đo được theo nghĩa Peano-Jordan. Có thể chứng minh rằng lớp $\mathcal{M}^k$ và độ đo m thỏa mãn các điều kiện a), b), c) đã nêu ở trên, đồng thời lớp $\mathcal{M}^k$ kín đối với các phép toán: hợp, giao, trừ, tức là

$$A, B \in \mathcal{M}^k \to A \cup B \in \mathcal{M}^k,\ A \cap B \in \mathcal{M}^k,\ A \setminus B \in \mathcal{M}^k.$$

Lớp $\mathcal{M}^k$ (gồm các tập đo được theo nghĩa Peano-Jordan) đã khá rộng : có thể chứng minh rằng nó bao gồm phần lớn các tập trong

hình học sơ cấp và trong giải tích cổ điển. Cụ thể, nếu một hàm số f không âm, giới nội trên một đoạn $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ là khả tích Riemann thì tập $A = \{(\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}) : 0 \leq \xi_{k+1} \leq f(\xi_1, \ldots, \xi_k)\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ bao giờ cũng đo được theo nghĩa Peano-Jordan (và ngược lại cũng đúng). Tuy nhiên lớp $\mathcal{M}^k$ vẫn chưa bao gồm được nhiều tập tương đối đơn giản: nó không chứa hết mọi tập mở và đóng, và trong trường hợp $k = 1$, tập các điểm hữu tỉ trên đoạn $[0, 1]$ cũng không đo được theo nghĩa Peano-Jordan, vì có thể thấy dễ dàng rằng độ đo ngoài của nó là 1, trong khi độ đo trong chỉ bằng 0.

Vì vậy vấn đề đặt ra là tiếp tục mở rộng hơn nữa khái niệm độ đo để các tập thường gặp trên đây cũng đo được. Để giải quyết vấn đề này, Lebesgue đã có sáng kiến thay định nghĩa (1) của độ đo ngoài bởi

$$\overline{m}^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_i| : \cup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \supset A \right\},$$

nghĩa là cho phép dãy đoạn Δ_i phủ lên A có thể vô hạn. Độ đo trong và tính đo được cũng được định nghĩa như trước đối với các tập bị chặn, sau đó được mở rộng cho cả những tập không bị chặn. Bằng cách đó có thể xây dựng được một lớp tập $\mathcal{L}^k$ trong $\mathbb{R}^k$ và một độ đo μ^k trên $\mathcal{L}^k$ thỏa mãn các điều kiện a), b) (trong đó $\mathcal{M}^k, m$ thay bằng $\mathcal{L}^k, \mu^k$) và điều kiện c') dưới đây, tổng quát hoá điều kiện c):

c') Nếu A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots \in \mathcal{L}^k$ và từng đôi một rời nhau thì

$$\mu^k(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^k(A_i).$$

Vả lại có thể chứng minh rằng:

d) Lớp $\mathcal{L}^k$ là một σ-đại số.

Các tập thuộc $\mathcal{L}^k$ gọi là *đo được theo nghĩa Lebesgue* trong $\mathbb{R}^k$ và μ^k gọi là *độ đo Lebesgue k* thứ nguyên. Dễ thấy rằng $\mathcal{L}^k \supset \mathcal{M}^k$ và do b) và d) nên $\mathcal{L}^k$ bao hàm cả σ-đại số Borel trong $\mathbb{R}^k$; nói riêng, tập các điểm hữu tỉ trong đoạn $[0, 1]$ thuộc $\mathcal{L}^k$; độ đo của nó bằng 0, vì cả độ đo ngoài và trong cùng bằng 0. Nói chung, lớp $\mathcal{L}^k$ đã bao gồm được tất cả các tập trong $\mathbb{R}^k$ cần thiết cho toán học hiện đại và người ta phải dựa vào "tiên đề chọn" mới xây dựng được những tập không thuộc lớp đó.

Độ đo Lebesgue là cơ sở của một khái niệm tích phân tổng quát và có hiệu lực hơn tích phân Riemann trong giải tích cổ điển: đó là *tích phân Lebesgue*, một công cụ chủ yếu của nhiều ngành toán học hiện đại (chẳng hạn như xác suất). Vì vậy trong giải tích hiện đại nó đã thay thế hoàn toàn độ đo Peano-Jordan (cơ sở của tích phân Riemann), độ đo này ngày nay chỉ còn giữ một giá trị lịch sử. Và cũng vì vậy sau đây ta chỉ nghiên cứu độ đo Lebesgue mà không trình bày độ đo Peano-Jordan. Hơn nữa, ta sẽ xây dựng độ đo trong không gian bất kỳ vì sự hạn chế trong không gian $\mathbb{R}^k$ là không cần thiết.

2. ĐỘ ĐO TRÊN MỘT ĐẠI SỐ TẬP HỢP

2.1. HÀM TẬP HỢP. Cho X là một tập tuỳ ý, mà sau đây sẽ coi là không gian, $\mathcal{M}$ là một lớp tập con của X. Một hàm số μ xác định trên lớp $\mathcal{M}$ gọi là một *hàm tập hợp*, hay gọn hơn, một *hàm tập*. Hàm tập đó là *cộng tính* nếu:

$$A, B \in \mathcal{M},\ A \cap B = \emptyset,\ A \cup B \in \mathcal{M} \Rightarrow$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Bằng qui nạp ta thấy ngay rằng nếu μ là cộng tính thì nó cũng "hữu hạn cộng tính", nghĩa là

$$\left.\begin{array}{l} A_i \in \mathcal{M}\ (i = 1, 2, \ldots, n) \\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \\ \cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M} \end{array}\right| \Rightarrow \mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Hàm tập μ gọi là *σ-cộng tính* nếu

$$\left.\begin{array}{l} A_i \in \mathcal{M}\ (i = 1, 2, \ldots) \\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \\ \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M} \end{array}\right| \Rightarrow \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Dĩ nhiên một hàm σ-cộng tính thì là cộng tính nhưng ngược lại không nhất thiết.

Một hàm tập μ gọi là một *độ đo* nếu nó được xác định trên một đại số $\mathcal{C}$ và nếu

a) $\mu(A) \geq 0$ với mọi $A \in \mathcal{C}$;
b) $\mu(\emptyset) = 0$
c) μ là σ-cộng tính.

Điều kiện b) trên đây có thể thay bằng:

b') $\mu \not\equiv +\infty$ trên $\mathcal{C}$, nghĩa là $\mu(A) < +\infty$ với ít nhất một $A \in \mathcal{C}$.

Thật vậy đương nhiên b) $\Rightarrow$ b'). Ngược lại nếu có b') thì

$$\mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$$

từ đó, vì $\mu(A) < +\infty$ ta suy ra

$$\mu(\emptyset) = \mu(A) - \mu(A) = 0,$$

vậy b') $\Rightarrow$ b), nghĩa là b) và b') tương đương.

Ví dụ: 1) $\mathcal{C}$ là một đại số và $\mu(A)$ bằng số phần tử của A;

2) $\mathcal{C}$ là một đại số, x_0 là một điểm bất kỳ cho trước của X, và với mọi $A \in \mathcal{C}$:

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x_0 \in A, \\ 0, & \text{nếu} \quad x_0 \notin A. \end{cases}$$

Một độ đo μ gọi là *hữu hạn* nếu $\mu(X) < +\infty$; *σ-hữu hạn* nếu

$$X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i, \; X_i \in \mathcal{C}, \; \mu(X_i) < +\infty.$$

Trong ví dụ 1) nếu X là hữu hạn thì μ là hữu hạn; nếu X là đếm được thì μ là σ-hữu hạn; nếu X không đếm được thì μ không phải là σ-hữu hạn.

2.2. CÁC TÍNH CHẤT

Định lý 1. *Nếu μ là độ đo trên đại số $\mathcal{C}$ thì*

(i) $A, B \in \mathcal{C}, \; B \subset A \Rightarrow \mu(B) \leq \mu(A)$;

(ii) $A, B \in \mathcal{C}, \; B \subset A, \; \mu(B) < +\infty \Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$;

(iii) $\left.\begin{array}{l} A_i \in \mathcal{C} \; (i = 1, 2, \ldots) \\ A \in \mathcal{C}, \; A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i \end{array}\right| \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$;

(iv) $\left.\begin{array}{l} A_i \in \mathcal{C} \; (i = 1, 2, \ldots) \\ A_i \cap A_j = \emptyset \\ A \in \mathcal{C}, \; A \supset \cup_{i=1}^{\infty} A_i \end{array}\right| \Rightarrow \mu(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Chứng minh. (i) Vì $B \subset A$ nên $A = (A \setminus B) \cup B$ do đó $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) \geq \mu(B)$;

(ii) Nếu $\mu(B) < \infty$ thì từ $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$ có thể suy ra $\mu(A) - \mu(B) = \mu(A \setminus B)$.

(iii) Trước hết để ý rằng, bất cứ các tập B_i như thế nào ta cũng có thể chọn các B_i' để có $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i'$, đồng thời các B_i' rời nhau (từng đôi một), $B_i' \subset B_i$, và nếu $B_i \in \mathcal{C}$ thì $B_i' \in \mathcal{C}$. Thật vậy, chỉ cần đặt

$$B_1' = B_1,\ B_2' = B_2 \setminus B_1,\ B_3' = B_3 \setminus (B_1 \cup B_2),$$
$$\ldots, B_n' = B_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} B_i, \ldots$$

ta thấy ngay các B_i' có những tính chất đã nêu.

Bây giờ ta chứng minh điểm (iii).

Vì $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ nên $A = (\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap A = \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A) = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, với $B_i = A_i \cap A \in \mathcal{C}$ (do $A_i,\ A \in \mathcal{C}$). Theo nhận xét trên

$$A = \cup_{i=1}^{\infty} B_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i',$$

trong đó $B_i' \in \mathcal{C},\ B_i' \subset B_i \subset A_i$ nên theo (i) $\mu(B_i') \leq \mu(A_i)$ và các B_i' rời nhau nên theo tính chất σ-cộng tính

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i') \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(iv) Từ $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$ ta suy ra với mọi n : $\cup_{i=1}^{n} A_i \subset A$, do đó theo (i), vì $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{C}$ (do $\mathcal{C}$ là đại số), $\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \mu(A)$. Mặt khác theo giả thiết các A_i rời nhau nên $\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$. Vậy

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(A),$$

và cho $n \to +\infty$ ta được bất đẳng thức cần chứng minh. □

Hệ quả. *Nếu độ đo μ là σ-hữu hạn thì mọi tập $A \in \mathcal{C}$ đều có thể phân tích thành một số đếm được tập có độ đo hữu hạn.*

Thật vậy, dựa vào (i) ta có thể viết

$$A = (\cup_{i=1}^{\infty} X_i) \cap A = \cup_{i=1}^{\infty} (X_i \cap A),$$

trong đó, do $X_i \cap A \subset X_i$ nên $\mu(X_i \cap A) \leq \mu(X_i) < \infty$. □

Định lý 2. *Nếu μ là độ đo trên đại số $\mathcal{C}$ thì:*
(i) $\mu(A_i) = 0,\ (i = 1, 2, \ldots),\ \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$;
(ii) $A \in \mathcal{C},\ \mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) = \mu(A)$.

Chứng minh. (i) Cho $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, ta có, theo định lý trước:

$$0 \leq \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0, \text{ từ đó } \mu(A) = 0.$$

(ii) Vì $A \subset A \cup B$ nên theo (iii) và (i) của định lý trước $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = \mu(A) \leq \mu(A \cup B)$ do đó

$$\mu(A \cup B) = \mu(A).$$

Mặt khác, $A \setminus B = A \setminus B \cap A$, mà theo (i) của định lý trước $0 \leq \mu(B \cap A) \leq \mu(B) = 0$, tức là $\mu(B \cap A) = 0$.

Vả lại theo (ii) của định lý trước,

$$\mu(A \setminus B \cap A) = \mu(A) - \mu(B \cap A) = \mu(A).$$

Vậy

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A).$$ □

Định lý 3. *Nếu μ là độ đo trên đại số $\mathcal{C}$ thì*

(i) $A_i \in \mathcal{C}\ (i = 1, 2, \ldots),\ A_1 \subset A_2 \subset \cdots,\ \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C} \Rightarrow$
$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$.

(ii) $A_i \in \mathcal{C},\ A_1 \supset A_2 \supset \cdots,\ \mu(A_1) < \infty,\ \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C} \Rightarrow$
$\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim\limits_{i \to \infty} \mu(A_i)$.

Chứng minh. (i) Như đã thấy trong chứng minh phần (iii) của Định lý 1, nếu ta đặt $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ \ldots,\ B_n = A_n \setminus (\cup_{i=1}^{n-1} A_i)$ thì các B_i rời nhau, thuộc $\mathcal{C}$ và

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Do đó

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$$
$$= \lim \mu(\cup_{i=1}^{n} B_i) = \lim \mu(A_n).$$

(ii) Theo công thức De Morgan $A_1 \setminus \cap_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_i)$ trong đó các tập $A_i' = A_1 \setminus A_i \in \mathcal{C}$ và dĩ nhiên $A_1' \subset A_2' \subset \ldots$. Vậy theo phần trên $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i') = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i')$.

Nhưng vì $\mu(A_1) < \infty$ mà $A_i \subset A_1$, nên $\mu(A_i) < \infty$ và $\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) < \infty$. Ta có theo (ii) của Định lý 1:

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i') = \mu(A_1 \setminus \cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(A_1) - \mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i),$$
$$\mu(A_i') = \mu(A_1) - \mu(A_i),$$

do đó suy ra

$$\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i). \qquad \square$$

Định lý 4 (đảo của Định lý 3). *Cho μ là một hàm tập không âm, cộng tính trên đại số $\mathcal{C}$ và sao cho $\mu(\emptyset) = 0$. Nó sẽ là một độ đo nếu có một trong hai điều kiện sau*

(i) $A_i \in \mathcal{C}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C} \Rightarrow$
$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$;

(ii) $A_i \in \mathcal{C}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = 0$.

Chứng minh. Đương nhiên chỉ cần vạch rõ μ là σ-cộng tính.

Giả sử có điều kiện (i) và cho $B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, trong đó các B_i rời nhau, và B_i, $B \in \mathcal{C}$. Đặt

$$A_1 = B_1,\ A_2 = B_1 \cup B_2, \ldots,\ A_n = \cup_{i=1}^{n} B_i, \ldots$$

thì ta có $B = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, nên $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Nhưng do cộng tính $\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$, vậy

$$\mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i),$$

có nghĩa μ là σ-cộng tính.

Còn nếu có điều kiện (ii) thì với các ký hiệu như trước và thêm giả thiết rằng mọi $\mu(B_i) < +\infty$ (vì nếu có một $\mu(B_i) = +\infty$ thì sự việc đã rõ), ta có

$$\emptyset = B \setminus \cup_{i=1}^{\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} (B \setminus A_n),$$

trong đó các $A'_n = B \setminus A_n \in \mathcal{C}$ và $A'_1 \supset A'_2 \supset \ldots$ Vậy

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A'_n) = 0.$$

Nhưng do $A_n \subset B$ và $\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) < \infty$ nên theo phần (ii) của Định lý 1, $\mu(B \setminus A_n) = \mu(B) - \mu(A_n)$. Từ đó

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

3. KHUẾCH ĐỘ ĐO

Cho $\mathcal{C}$ là một đại số tập trong một không gian X, m là một độ đo trên $\mathcal{C}$. Ta hãy tìm cách khuếch m thành một độ đo trên một σ-đại số bao hàm $\mathcal{C}$.

3.1. ĐỘ ĐO NGOÀI. Một hàm tập μ^* xác định trên lớp tất cả các tập con của một không gian X, được gọi là một *độ đo ngoài* nếu

a) $\mu^*(A) \geq 0$ với mọi $A \subset X$.

b) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

c) $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

Như vậy, khác với độ đo, ở đây không đòi hỏi σ-cộng tính mà chỉ đòi hỏi "σ-dưới cộng tính" (điều kiện c)), nhưng μ^* được xác định trên tất cả các tập con của X.

Chú ý rằng từ c) ta suy ra

c_1) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Định lý 5. (Caratheodory) *Cho μ^* là một độ đo ngoài trên X và $\mathcal{L}$ là lớp tất cả các tập con A của X sao cho*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \text{ với mọi } E \subset X. \qquad (1)$$

$\mathcal{L}$ là một σ-đại số và hàm $\mu = \mu^*/\mathcal{L}$ (thu hẹp của μ^* trên $\mathcal{L}$) *là một độ đo trên $\mathcal{L}$.*

Độ đo μ gọi là độ đo *cảm sinh* bởi độ đo ngoài μ^*.

Các tập A (thỏa mãn điều kiện (1) gọi là *μ^*-đo được*. Chú ý rằng điều kiện (1) tương đương với

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \text{ với mọi } E \subset X, \qquad (1*)$$

vì bất đẳng thức ngược lại luôn luôn đúng do c).

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh $\mathcal{L}$ là một σ-đại số. Dĩ nhiên $\emptyset \in \mathcal{L}$, vì với mọi $E \subset X : \mu^*(E) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(E) = \mu^*(E \cap \emptyset) + \mu^*(E \setminus \emptyset)$. Lớp $\mathcal{L}$ cũng kín đối với phép lấy bù, vì nếu $A \in \mathcal{L}$ thì với mọi $E \subset X : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E \setminus A^c) + \mu^*(E \cap A^c)$. Vậy để chứng minh $\mathcal{L}$ là một σ-đại số ta chỉ còn phải vạch rõ nó kín đối với phép hợp đếm được.

Cho $A_i \in \mathcal{L}$, $i = 1, 2, \ldots$, và một tập bất kỳ $E \subset X$. Áp dụng (1), ta có :

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \setminus A_1) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*((E \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^*((E \setminus A_1) \setminus A_2). \\
&= \ldots \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mu^*((E \setminus \cup_{i=1}^{j-1} A_i) \cap A_j) + \mu^*(E \setminus \cup_{j=1}^{k} A_j).
\end{aligned}$$

Do đó:

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{k} \mu^*(E \setminus \cup_{i=1}^{j-1} A_i) \cap A_j + \mu^*(E \setminus \cup_{j=1}^{\infty} A_j).$$

Vì điều này đúng với mọi k nên

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \setminus \cup_{i=1}^{j-1} A_i) \cap A_j + \mu^*(E \setminus \cup_{j=1}^{\infty} A_j). \qquad (2)$$

Mặt khác dễ dàng nhận thấy

$$E \cap (\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \cup_{j=1}^{\infty} ((E \setminus \cup_{i=1}^{j-1} A_i) \cap A_j),$$

(vì nếu có một j với $x \in E \cap A_j$ thì lấy j là chỉ số nhỏ nhất như vậy ta được $x \in A_j \setminus A_i$ với mọi $i = 1, \ldots, j-1$). Vậy theo tính chất dưới cộng tính (c) của μ^*,

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\leq \mu^*(E \cap (\cup_{j=1}^{\infty} A_j) + \mu^*(E \setminus \cup_{j=1}^{\infty} A_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*((E \setminus \cup_{i=1}^{j-1} A_i) \cap A_j) + \mu^*(E \setminus \cup_{j=1}^{\infty} A_j) \\ &\leq \mu^*(E) \text{ theo (2).} \end{aligned}$$

Suy ra $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{L}$, chứng tỏ $\mathcal{L}$ là một σ-đại số.

Bây giờ để hoàn thành chứng minh, cho $A_i \in \mathcal{L}$, $i = 1, 2, \ldots$, là những tập rời nhau. Lấy $E = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ trong (2) và chú ý rằng khi ấy $(E \setminus \cup_{i=1}^{j-1} A_i) \cap A_j = A_j$, $(E \setminus \cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \emptyset$, ta có

$$\mu^*(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j),$$

do đó kết hợp với tính chất c) (dưới cộng tính) ta được đẳng thức. Vậy $\mu^*/\mathcal{L}$ quả là độ đo. □

3.2. ĐỊNH LÝ KHUẾCH. Kết quả trên cho thấy rằng mỗi độ đo ngoài μ^* trên X cảm sinh một độ đo trên σ-đại số làm thành bởi tất cả các tập A thỏa mãn điều kiện (1). Để áp dụng được kết quả đó vào việc khuếch một độ đo m cho trước từ một đại số lên một σ-đại số, ta dựa vào mệnh đề sau:

Định lý 6. *Cho m là một độ đo trên một đại số $\mathcal{C}$ những tập con của X. Nếu ta đặt với mỗi $A \subset X$:*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) : \cup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A, \ P_i \in \mathcal{C} \right\}, \qquad (3)$$

thì μ^* là một độ đo ngoài và $\mu^*(A) = m(A)$ với mọi $A \in \mathcal{C}$, đồng thời mọi tập thuộc σ-đại số $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ đều là μ^*-đo được.

Chứng minh. Rõ ràng $\mu^*(\emptyset) = 0$ và nếu $A \subset B$ thì $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Để chứng minh điều kiện c) trong định nghĩa độ đo ngoài, ta chỉ cần

chỉ ra rằng nếu $A_n \subset X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ thì :

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{4}$$

Theo định nghĩa (3), với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước ta có thể tìm được cho mỗi A_n một dãy các tập $P_{n,i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ sao cho $\cup_{i=1}^{\infty} P_{n,i} \supset A_n$, $P_{n,i} \in \mathcal{C}$ và $\sum_{i=1}^{\infty} m(P_{n,i}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n$.

Khi ấy $\cup_{n=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{\infty} P_{n,i} \supset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, và theo định nghĩa của μ^* :

$$\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} m(P_{n,i}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon,$$

và vì $\varepsilon > 0$ có thể nhỏ tuỳ ý điều này có nghĩa là (4) đúng.

Vậy μ^* quả là độ đo ngoài.

Bây giờ cho $A \in \mathcal{C}$, và xét một tập bất kỳ $E \subset X$. Theo định nghĩa của μ^*, với mỗi $\varepsilon > 0$ có thể tìm được một dãy $P_i \in \mathcal{C}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ sao cho $\cup_{i=1}^{\infty} P_i \supset E$ và $\sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Lúc ấy

$$\begin{aligned} &\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \\ &\leq \mu^*((\cup_{i=1}^{\infty} P_i) \cap A) + \mu^*((\cup_{i=1}^{\infty} P_i) \setminus A) \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(P_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(P_i \setminus A) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(P_i) \leq \mu^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Vì $\varepsilon > 0$ nhỏ tuỳ ý, ta suy ra $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$, tức là (1*). Vậy A thỏa mãn (1), tức là $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$, trong đó $\mathcal{L}$ là σ-đại số các tập đo được . Do đó $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}$.

Sau cùng, nếu $A \in \mathcal{C}$ thì với mọi dãy $P_i \in \mathcal{C}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ sao cho $\cup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A$ ta đều có, theo tính chất (iii) trong Định lý 1, $m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i)$. Vì vậy, $m(A) \leq \mu^*(A)$. Mặt khác, vì $A \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$ nên $\mu^*(A) \leq m(A) + m(\emptyset) + m(\emptyset) + \cdots = m(A)$. Do đó $\mu^*(A) = m(A)$ với mọi $A \in \mathcal{C}$. □

Ta nói rằng một độ đo μ trên một σ-đại số $\mathcal{L}$ là *đủ* nếu mọi tập con của một tập bất kỳ thuộc $\mathcal{L}$ có độ 0 đều cũng thuộc $\mathcal{L}$ và có độ đo 0, nghĩa là nếu

$$N \subset E,\ \mu(E) = 0 \Rightarrow N \in \mathcal{L},\ \mu(N) = 0. \tag{5}$$

Định lý 7. *Độ đo μ cảm sinh bởi một độ đo ngoài μ^* bao giờ cũng là độ đo đủ (trên σ-đại số $\mathcal{L}$ các tập μ^*-đo được) và họ các tập có độ đo μ bằng 0 trùng với họ các tập có độ đo ngoài μ^* bằng 0.*

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh rằng mọi tập A có $\mu^*(A) = 0$ đều μ^*-đo được (khi ấy sẽ suy ra ngay các kết luận của định lý). Nhưng với mọi tập $E \subset X$ ta có $\mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$, cho nên

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E),$$

và đây chính là điều kiện (1*). □

Từ các kết quả trên, có thể suy ra dễ dàng:

Định lý 8. *Cho một độ đo m trên một đại số $\mathcal{C}$. Bao giờ cũng có một độ đo μ trên σ-đại số $\mathcal{L} \supset \mathcal{F}(\mathcal{C}) \supset \mathcal{C}$ sao cho:*

(i) *$\mu(A) = m(A)$ với mọi $A \in \mathcal{C}$ (nghĩa là μ khuếch m).*

(ii) *μ là hữu hạn (σ-hữu hạn) nếu m là hữu hạn (σ-hữu hạn).*

(iii) *μ là độ đo đủ.*

(iv) *Một tập A thuộc họ $\mathcal{L}$ khi và chỉ khi nó có thể biểu diễn dưới dạng*

$$A = B \setminus N \quad \text{hoặc} \quad A = B \cup N \tag{6}$$

trong đó $B \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, $N \subset E \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, $\mu^*(E) = \mu(E) = 0$, và μ^* là độ đo ngoài xác định từ m theo công thức (3).

Chứng minh. Ta lấy μ là độ đo cảm sinh bởi độ đo ngoài μ^* xác định từ m theo công thức (3), và $\mathcal{L}$ là σ-đại số các tập μ^*-đo được. Theo Định lý 6, độ đo μ sẽ có tính chất (i) nêu trên (μ khuếch m); và vì $X \in \mathcal{C}$ nên tính chất (ii) cũng sẽ đúng. Theo Định lý 7, μ cũng là độ đo đủ. Vậy chỉ còn phải chứng minh (iv).

Nếu A có dạng (6) thì dĩ nhiên $A \in \mathcal{L}$ (vì $\mathcal{L}$ là σ-đại số và μ là độ đo đủ). Ngược lại, giả sử $A \in \mathcal{L}$. Theo cách xây dựng μ^* (công thức (3)), có thể tìm được cho mỗi $k = 1, 2, \ldots$, những tập $P_{ik} \in \mathcal{C}$ sao cho $\cup_{i=1}^{\infty} P_{ik} \supset A$, $\sum_{i=1}^{\infty} m(P_{ik}) \leq \mu^*(A) + 1/k = \mu(A) + 1/k$.

Đặt $B = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{\infty} P_{ik}$, ta thấy rằng $B \supset A$ và $B \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$. Đồng thời, với mọi k, $B \subset \cup_{i=1}^{\infty} P_{ik}$, cho nên

$$\mu(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(P_{ik}) \leq \mu(A) + 1/k,$$

do đó $\mu(B) \leq \mu(A)$. Nhưng vì $B \supset A$ nên chỉ có thể $\mu(B) = \mu(A)$, và đặt $N = B \setminus A$ ta sẽ có $\mu(N) = \mu(B \setminus A) = 0$.

Như vậy ta đã chứng minh rằng, cho trước một tập $A \in \mathcal{L}$, bao giờ cũng tồn tại một tập $B \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ sao cho $B \supset A$ và $\mu(B) = \mu(A)$. Áp dụng kết quả này cho tập N ta lại tìm được một tập $E \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ sao cho $E \supset N$, $\mu(E) = 0$ (tức là $\mu^*(E) = 0$, theo Định lý 7). Tóm lại ta sẽ có $A = B \setminus N$ với $B \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, $N \subset E \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, $\mu^*(E) = \mu(E) = 0$.

Mặt khác, vì $A \in \mathcal{L}$ nên $X \setminus A \in \mathcal{L}$ và theo trên $X \setminus A = B' \setminus N'$, với $B' \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, $N' \subset E' \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, $\mu(E') = 0$. Vậy $A = (X \setminus B') \cup N'$, hay $A = B'' \cup N'$, với $B'' = X \setminus B' \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Tính chất (iv) và do đó toàn bộ định lý đã được chứng minh. □

Như vậy σ-đại số $\mathcal{L}$ các tập đo được không khác σ-đại số $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ nhiều lắm và có thể thu được từ $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ bằng cách sửa đổi chút ít các tập thuộc lớp này (thêm hay bớt một bộ phận của một tập có độ đo không).

4. ĐỘ ĐO TRONG $\mathbb{R}^k$

Dựa vào lý thuyết tổng quát trên có thể xây dựng độ đo Lebesgue trong không gian $\mathbb{R}^k$ một cách dễ dàng.

4.1. ĐỘ ĐO TRÊN ĐƯỜNG THẲNG. Ta gọi *gian* trên đường thẳng $\mathbb{R}$ là một tập điểm có một trong các dạng sau:

$$(a, b),\ [a, b],\ (a, b],\ [a, b),$$

$$(-\infty, +\infty),\ (-\infty, a),\ (-\infty, a],\ (a, +\infty),\ [a, +\infty).$$

Cho $\mathcal{C}$ là lớp tất cả các tập con của $\mathbb{R}$ có thể biểu diễn thành hợp của một số hữu hạn gian rời nhau

$$\mathcal{C} = \{P : P = \cup_{i=1}^{n} \Delta_i,\ \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset\ (i \neq j)\},$$

trong đó Δ_i là những gian, n là một số tự nhiên tuỳ ý.

Có thể chứng minh rằng $\mathcal{C}$ là một đại số và nếu với mỗi $P \in \mathcal{C}$ ta định nghĩa $m(P) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i|$ thì hàm tập đó là một độ đo trên $\mathcal{C}$. Khi ấy, khuếch độ đo này theo phương pháp nêu trong Định lý 6 ta sẽ thu được một độ đo trên đường thẳng, đó chính là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$.

Một cách khác có phần gọn hơn là xây dựng trực tiếp một độ đo ngoài trên $\mathbb{R}$ rồi dựa vào Định lý 5 (Caratheodory) định nghĩa độ đo Lebesgue là độ đo cảm sinh bởi độ đo ngoài này.

Cụ thể, gọi $\mathcal{P}$ là họ các gian. Với mỗi tập $A \subset \mathbb{R}$ ta định nghĩa

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_k| : \cup_{k=1}^{\infty}\Delta_k \supset A,\ \Delta_k \in \mathcal{P}\right\}. \tag{7}$$

Định nghĩa này có thể thay bằng:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_k| : \cup_{k=1}^{\infty}\Delta_k \supset A,\ \Delta_k \text{ là } \textit{khoảng mở}\right\}. \tag{8}$$

Thật vậy, cho α và β là các số xác định bởi vế phải của (7) và (8). Ta có $\alpha \le \beta$ vì mỗi khoảng mở Δ_k cũng thuộc $\mathcal{P}$. Ngược lại, ứng với mỗi tập $\cup_{k=1}^{\infty}\Delta_k$ ($\Delta_k \in \mathcal{P}$) đều có một tập $\cup_{k=1}^{\infty}\Delta_k'$, trong đó mỗi Δ_k' là một khoảng mở bao hàm Δ_k với $|\Delta_k'| \le |\Delta_k| + \varepsilon/2^k$, cho nên

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta_k'| \le \sum_{i=1}^{\infty}|\Delta_i| + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon/2^k = \sum_{i=1}^{\infty}|\Delta_i| + \varepsilon,$$

chứng tỏ $\beta \le \alpha + \varepsilon$, và vì $\varepsilon > 0$ tùy ý nên $\beta \le \alpha$, do đó $\alpha = \beta$.

Bổ đề 1. *Hàm tập μ^* là một độ đo ngoài trên $\mathbb{R}$.*

Chứng minh. Hiển nhiên $\mu^*(A) \ge 0\ \forall A \subset \mathbb{R}$, và $\mu^*(\emptyset) = 0$, vậy chỉ cần vạch rõ nếu $A \subset \cup_{i=1}^{+\infty}A_i$ thì $\mu^*(A) \le \sum_{i=1}^{+\infty}\mu^*(A_i)$.

Cho trước $\varepsilon > 0$, với mỗi $i = 1, 2, \ldots$ ta lấy một hệ khoảng mở $\Delta_{k,i}$, $k = 1, 2, \ldots$, sao cho $\cup_k \Delta_{k,i} \supset A_i$, và $\sum_k |\Delta_{k,i}| \le \mu^*(A_i) + \varepsilon/2^i$, $i = 1, 2, \ldots$. Vì $A \subset \cup_{k,i}\Delta_{k,i}$ ta có

$$\mu^*(A) \le \sum_{k,i}|\Delta_{k,i}| \le \sum_i(\mu^*(A_i) + \varepsilon/2^i) = \sum_i \mu^*(A_i) + \varepsilon,$$

và do $\varepsilon > 0$ tùy ý nên $\mu^*(A) \le \sum_{i=1}^{+\infty}\mu^*(A_i)$. Vậy μ^* đúng là một độ đo ngoài trên $\mathbb{R}$. □

Theo Định lý Caratheodory, lớp $\mathcal{L}$ tất cả các tập $A \subset \mathbb{R}$ sao cho

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{với mọi } E \subset \mathbb{R}$$

là một σ-đại số, và hàm tập $\mu = \mu^*/\mathcal{L}$ là một độ đo trên $\mathcal{L}$.

Độ đo xây dựng như thế gọi là *độ đo Lebesgue* trên đường thẳng. Các tập đo được theo nghĩa đó, tức là thuộc σ-đại số $\mathcal{L}$ (cũng tức là μ^*-đo được) gọi là các *tập đo được theo nghĩa Lebesgue*, hay ngắn gọn *đo được* (L).

Bổ đề 2. *Mọi tập Borel đều đo được* (L).

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh rằng mọi khoảng mở Δ đều đo được (L) (hiển nhiên với $\mu(\Delta) = \mu^*(\Delta) = |\Delta|$). Xét một tập tùy ý $E \subset \mathbb{R}$ và một hệ gian Δ_k phủ $E : \cup_k \Delta_k \supset E$. Ta có

$$\cup_k \Delta_k = \cup_k (\Delta_k \cap \Delta) \cup (\cup_k (\Delta_k \setminus \Delta)$$

với $\cup_k (\Delta_k \cap \Delta) \supset E \cap \Delta$, $\cup_k (\Delta_k \setminus \Delta) \supset E \setminus \Delta$. Rõ ràng với mỗi $k : \Delta_k \cap \Delta = \Delta'_k \in \mathcal{P}$, $\Delta_k \setminus \Delta = \cup_{k,i} \Delta''_{k,i}$ với $\Delta''_{k,i} \in \mathcal{P}$, đồng thời $|\Delta_k| = |\Delta'_k| + \sum_i |\Delta''_{k,i}|$, cho nên

$$\cup_k \Delta_k = (\cup_k \Delta'_k) \cup (\cup_{k,i} \Delta''_{k,i}), \quad \sum_k |\Delta_k| = \sum_k |\Delta'_k| + \sum_{k,i} |\Delta''_{k,i}|.$$

Thành thử

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \inf\{\textstyle\sum_k |\Delta_k| : \cup_k \Delta_k \supset E,\ \Delta_k \in \mathcal{P}\} \\ = \inf\{\textstyle\sum_k |\Delta'_k| + \sum_{k,i} |\Delta''_{k,i}| &: \cup_k \Delta'_k \supset E \cap \Delta,\ \cup_{k,i} (\Delta''_{k,i} \supset E \setminus \Delta\} \\ &\geq \inf\{\textstyle\sum_k |\Delta'_k| : \cup_j \Delta'_k \supset E \cap \Delta\} \\ &\quad + \inf\{\textstyle\sum_{k,i} |\Delta''_{k,i}| : \cup_{k,i} \Delta''_{k,i} \supset E \setminus \Delta\}, \end{aligned}$$

do đó

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap \Delta) + \mu^*(E \setminus \Delta), \quad \forall E \subset \mathbb{R},$$

chứng tỏ Δ đo được (L) (xem (1*), mục 3.1).

Vậy mọi khoảng mở đều thuộc $\mathcal{L}$. Mà mỗi tập mở trong $\mathbb{R}$ là một hợp đếm được những khoảng mở, nên σ-đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các khoảng mở cũng là σ-đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các tập mở, tức là σ-đại số $\mathcal{B}$ các tập Borel. Do đó $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$ vì $\mathcal{L}$ cũng là một σ-đại số bao hàm lớp các khoảng mở. □

Chú ý rằng do $\mathbb{R}$ là hợp của các đoạn $[-n, n]$, $n = 1, 2, \ldots$, nên độ đo Lebesgue σ-hữu hạn. Hơn nữa, theo Định lý 8, *độ đo Lebesgue là*

độ đo đủ và mỗi tập đo được (L) chẳng qua là một tập Borel, thêm hay bớt một tập có độ đo không.

Thành thử ta cũng có thể xây dựng σ-đại số $\mathcal{L}$ và độ đo Lebesgue như sau:

Xuất phát từ định nghĩa: *tập có độ đo 0* là bất cứ tập N nào có $\mu^*(N) = 0$, tức là sao cho

$$0 = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| : \cup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset N,\ \Delta_k \text{ là khoảng mở} \right\}. \qquad (9)$$

Sau đó một tập A gọi là đo được (L) nếu nó có dạng

$$A = B \setminus N \text{ hoặc } A = B \cup N,$$

trong đó B là một tập Borel và N là một tập có độ đo 0. Với mỗi A như thế, định nghĩa $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Đặc trưng vừa rồi của tập có độ đo 0 có thể phát biểu dưới một hình thức khác, nhiều khi thuận tiện hơn:

Định lý 9. *Một tập N có độ đo 0 khi và chỉ khi với mỗi $\varepsilon > 0$ có thể tìm được một hệ (hữu hạn hay đếm được) khoảng Δ_k phủ N và có độ dài tổng cộng nhỏ hơn ε:*

$$\cup_k \Delta_k \supset N,\ \sum_{k=1}^{+\infty} |\Delta_k| < \varepsilon.$$

Chứng minh. Đây chỉ là hệ quả trực tiếp của công thức (9). Thật vậy nếu $\mu(N) = 0$ thì theo (9), với $\varepsilon > 0$ cho trước, có một hệ khoảng mở Δ_k phủ N sao cho $\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| < \varepsilon$. Ngược lại nếu với mọi $\varepsilon > 0$ đều có một phủ như vậy thì có nghĩa là infimum trong (9) bằng 0. □

Hệ quả. *Mọi tập hữu hạn hay đếm được trên đường thẳng đều có độ đo 0.*

Chẳng hạn, tập các điểm hữu tỉ (mà ta đã biết là trù mật trên đường thẳng) có độ đo 0 (do đó tập các điểm vô tỉ trên mỗi đoạn $[a, b]$ có độ đo bằng $b - a$). Nhưng đáng chú ý là có những tập không đếm được (có lực lượng c) mà cũng có độ đo 0, chẳng hạn tập Cantor (xem mục 2.5, Chương 2). Đồng thời lại có những tập có độ đo dương mà "không

đâu trù mật" nghĩa là sao cho bất cứ đoạn nào trên đường thẳng cũng có chứa cả một khoảng mở hoàn toàn ở ngoài tập đó (Bài tập 16).

Sau đây là các đặc trưng của tập đo được (L).

Định lý 10. *Đối với một tập A trên đường thẳng ba điều kiện dưới đây là tương đương:*

(i) *A đo được (L).*

(ii) *Với mỗi $\varepsilon > 0$ có thể tìm được một tập mở $G \supset A$ sao cho $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$.*

(iii) *Với mỗi $\varepsilon > 0$ có thể tìm được một tập đóng $F \subset A$ sao cho $\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon$.*

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii). Trước hết ta hãy xét trường hợp $\mu(A) < +\infty$. Theo (8), với $\varepsilon > 0$ cho trước có thể tìm một hệ khoảng mở Δ_k phủ A, sao cho $\sum_k |\Delta_k| < \mu(A) + \varepsilon$. Đương nhiên $G = \cup_k \Delta_k$ là tập mở bao hàm A và có $\mu(G) \leq \sum_k |\Delta_k| < \mu(A) + \varepsilon$ từ đó, chú ý rằng $\mu(G) = \mu(G \setminus A) + \mu(A)$ và vì $\mu(A) < +\infty$ nên $\mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A)$, ta suy ra $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$.

Trong trường hợp tổng quát , $A = \cup_{n=1}^{\infty} A \cap [-n, n]$ và mỗi tập $A_n = A \cap [-n, n]$ có $\mu(A_n) < +\infty$, nên theo trên, có những tập mở $G_n \supset A_n$ với $\mu(G_n \setminus A_n) < 1/2^n$. Khi ấy tập $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ mở, bao hàm A và thỏa mãn :

$$\mu(G \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n = \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Cho G_n là tập mở bao hàm A và có $\mu^*(G_n \setminus A) < 1/n$. Đặt $B = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$ ta có $B \in \mathcal{L}$ (vì B là tập Borel) và $B \supset A$, đồng thời $\mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(G_n \setminus A) < 1/n$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$ cho nên $\mu^*(B \setminus A) = 0$, nghĩa là $E = B \setminus A$ đo được. Vậy $A = B \setminus E$ cũng đo được.

Thành thử (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Nhưng A đo được khi và chỉ khi phần bù A^c của nó đo được, tức là, theo trên, khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ có thể tìm được một tập mở $G \supset A^c$ sao cho $\mu^*(G \setminus A^c) < \varepsilon$. Dĩ nhiên $F = G^c \subset A$ và $\mu^*(A \setminus F) = \mu^*(G \setminus A^c) < \varepsilon$. Từ đó suy ra (i) $\Leftrightarrow$ (iii). □

4.2. ĐỘ ĐO TRONG KHÔNG GIAN EUCLIDE k CHIỀU. Những kết quả trên có thể suy rộng cho không gian $\mathbb{R}^k$ $(k > 1)$.

Trong không gian này ta gọi *gian* là một tập gồm những điểm $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ mà mỗi toạ độ ξ_i chạy trên một gian nào đó của $\mathbb{R}$. Nếu ξ_i chạy trên một gian của $\mathbb{R}$ có hai đầu mút là α_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ thì thể tích của Δ là số

$$|\Delta| = \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i).$$

Gọi $\mathcal{P}^k$ là lớp các gian trong $\mathbb{R}^k$ và với mỗi tập $A \subset \mathcal{R}^k$ đặt

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_k |\Delta_k| : \ \cup_k \Delta_k \supset A, \ \Delta_k \in \mathcal{P}^k\}.$$

Bằng phương pháp tương tự như trước có thể chứng minh rằng:

1. Hàm tập μ^* là một độ đo ngoài;

2. Họ các tập $A \subset \mathbb{R}^k$ thỏa mãn điều kiện

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \text{ với mọi tập } E \subset \mathbb{R}^k$$

là một σ-đại số $\mathcal{L}^k \supset \mathcal{P}^k$ và hàm $\mu^k = \mu^*/\mathcal{L}^k$ là một độ đo trên $\mathcal{L}^k$.

Độ đo μ^k xác định như vậy là *độ đo Lebesgue* trong $\mathbb{R}^k$ và mỗi tập $A \in \mathcal{L}^k$ gọi là *tập đo được* (L) trong $\mathbb{R}^k$. Cũng như trong trường hợp $\mathbb{R}$ có thể chứng minh rằng:

Các tập Borel trong $\mathbb{R}^k$ *đều đo được* (L).

Điều này dựa trên tính chất sau của các tập mở trong $\mathbb{R}^k$ $(k > 1)$:

Mỗi tập mở G trong $\mathbb{R}^k$ $(k > 1)$ *đều là hợp của một số đếm được gian rời nhau.*

Thật vậy, toàn thể $\mathbb{R}^k$ có thể chia thành một số đếm được gian "lập phương" rời nhau $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ có cạnh bằng 1:

$$\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_k) : n_1 \leq \xi_i < n_i + 1, \ i = 1, 2, \ldots, k\},$$

trong đó các n_i lấy tất cả những giá trị nguyên $0, 1, -2, 2, -2, \ldots$. Ta chọn trong số các gian lập phương đó những gian nào chứa trọn trong G (tập các gian này có thể rỗng, hữu hạn hay đếm được). Ta chia mỗi gian còn lại thành 2^k gian lập phương có cạnh bằng $1/2$ và lại chọn

trong số các gian nhỏ mới chia ra đó những gian nào nằm trọn trong G. Ta lại chia những gian nhỏ còn lại ra 2^k gian lập phương có cạnh bằng $1/4$ v.v. . Dễ thấy rằng G bằng hợp các gian đã chọn trong quá trình đó, vì nếu $x \in G$ thì, do G là tập mở, x là tâm của một hình cầu nào đó chứa trọn trong G, và đến một bước q nào đó, x phải lọt vào một gian lập phương có cạnh $1/2^q$ nằm trọn trong hình cầu ấy.

Sự kiện trên chứng tỏ rằng mọi tập mở đều thuộc $\mathcal{L}^k$, mà σ-đại số Borel là σ-đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các tập mở, cho nên $\mathcal{B}^k \subset \mathcal{L}^k$. Và lại, vì toàn thể $\mathbb{R}^k$ là hợp một số đếm được khoảng rời nhau nên μ^k cũng là độ do σ-hữu hạn.

Các định lý 9 và 10 cũng đúng trong không gian $\mathbb{R}^k$ $(k > 1)$, và cũng chứng minh tương tự như trước.

5. HÀM SỐ ĐO ĐƯỢC

Trong giải tích, khi làm toán với các hàm số liên tục, người ta thường bị một sự hạn chế lớn: giới hạn của một dãy hàm số liên tục không nhất thiết là liên tục, nói khác đi, lớp các hàm số liên tục không kín đối với phép qua giới hạn. Để tránh sự hạn chế đó, người ta xây dựng một lớp hàm số, rộng hơn lớp các hàm số liên tục, và kín đối với các phép toán giải tích, gọi là lớp "hàm số đo được". Việc xây dựng này xuất phát từ nhận xét sau.

Một hàm số $f(x)$ xác định trên một không gian mêtric X là liên tục khi và chỉ khi với mọi số thực a, các tập $\{x : f(x) < a\}$ và $\{x : f(x) > a\}$ --- tức là nghịch ảnh của các khoảng $(-\infty, a)$ và $(a, +\infty)$ --- là mở.

Thật vậy, nếu $f(x)$ liên tục thì nghịch ảnh của mọi tập mở, nói riêng nghịch ảnh của một khoảng, phải là mở. Ngược lại, nếu $f(x)$ có tính chất này thì nghịch ảnh của mọi tập mở $G \subset \mathbb{R}$ phải mở (tức là $f(x)$ liên tục), bởi lẽ G bao giờ cũng có dạng $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ (Định lý 5, mục 2.5, Chương 2) cho nên nghịch ảnh của G là hợp của các nghịch ảnh của các khoảng (a_n, b_n), mà mỗi nghịch ảnh này mở thì hợp của chúng cũng mở.

Nhược điểm của lớp các tập mở (trong vấn đề nêu ra) là nó không

kín đối với phép trừ và các phép toán đếm được về tập hợp. Vì vậy người ta thay nó bằng một σ-đại số, kín đối với mọi phép toán hữu hạn hay đếm được về tập hợp. Từ đó có định nghĩa dưới đây.

5.1. ĐỊNH NGHĨA. Cho một không gian X, một σ-đại số $\mathcal{F}$ những tập con của X, và một tập $A \in \mathcal{F}$. Một hàm số $f(x) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ gọi là *đo được trên tập A* đối với σ-đại số $\mathcal{F}$ nếu

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \{x \in A : f(x) < a\} \in \mathcal{F}. \tag{10}$$

Thường trên σ-đại số $\mathcal{F}$ có một độ đo μ : khi đó, $f(x)$ cũng gọi là *đo được đối với độ đo μ* hay *μ-đo được*. Trong trường hợp $X = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{F} = \mathcal{L}^k$ thì ta nói $f(x)$ *là đo được theo nghĩa Lebesgue*, hay ngắn hơn : *đo được* (L). Nếu $X = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}^k$ (σ-đại số Borel trong $\mathbb{R}^k$) thì ta nói $f(x)$ là đo được theo nghĩa Borel, hay $f(x)$ là một *hàm số Borel*.

Điều kiện (10) trong định nghĩa trên có thể thay bằng một trong các điều kiện sau :

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{F}\,; \tag{11}$$

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \{x \in A : f(x) \le a\} \in \mathcal{F}\,; \tag{12}$$

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \{x \in A : f(x) \ge a\} \in \mathcal{F}. \tag{13}$$

Thật vậy: (10) $\Leftrightarrow$ (13) vì các tập $\{x \in A : f(x) < a\}$ và $\{x \in A : f(x) \ge a\}$ bù nhau, mà $\mathcal{F}$ là một σ-đại số thì phải kín đối với phép lấy phần bù. Vì lý do tương tự, (11) $\Leftrightarrow$ (12), và ta chỉ còn phải chứng minh rằng (10) $\Leftrightarrow$ (12) :

(10) $\Rightarrow$ (12). Rõ ràng $f(x) \le a$ khi và chỉ khi $(\forall n)\ f(x) < a + 1/n$, cho nên $\{x \in A :\ f(x) \le a\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{x \in A :\ f(x) < a + 1/n\} \in \mathcal{F}$, vì $\{x \in A : f(x) < a + 1/n\} \in \mathcal{F}$ với mọi n. Ngược lại:

(12) $\Rightarrow$ (10). Rõ ràng $f(x) < a$ khi và chỉ khi $(\exists n)\ f(x) \le a - 1/n$, cho nên $\{x \in A :\ f(x) < a\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in A :\ f(x) \le a - 1/n\} \in \mathcal{F}$, vì $\{x \in A :\ f(x) \in a - 1/n\} \in \mathcal{F}$ với mọi n.

Từ định nghĩa có thể suy ra các hệ quả:

I. *Nếu $f(x)$ đo được trên tập A thì nó cũng đo được trên mọi tập con của A thuộc $\mathcal{F}$.*

Thật vậy, nếu $B \subset A$, $B \in \mathcal{F}$ thì với mọi $a \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in B : \ f(x) < a\} = B \cap \{x \in A : \ f(x) < a\} \in \mathcal{F}.$$

II. *Nếu $f(x)$ đo được trên tập A thì với mọi $a \in \mathbb{R}$:*

$$\{x \in A : \ f(x) = a\} \in \mathcal{F}.$$

Thật vậy,

$$\{x \in A : \ f(x) = a\} = \{x \in A : \ f(x) \leq a\} \cap \{x \in A : \ f(x) \geq a\} \in \mathcal{F}.$$

III. *Hàm số $f(x) \equiv c$ $(\forall x \in A)$ là đo được.*

Vì nếu $c \geq a$ thì $\{x \in A : \ f(x) < a\} = \emptyset \in \mathcal{F}$, còn nếu $c < a$ thì $\{x \in A : \ f(x) < a\} = A \in \mathcal{F}$.

IV. *Nếu $f(x)$ đo được trên tập A và $k \in \mathbb{R}$* là một hằng số thì *$k.f(x)$ cũng đo được.*

Vì nếu $k > 0$ thì $\{x \in A : \ kf(x) < a\} = \{x \in A : \ f(x) < a/k\} \in \mathcal{F}$. Còn trường hợp $k \leq 0$ hiển nhiên.

5.2. CÁC PHÉP TOÁN VỀ HÀM SỐ ĐO ĐƯỢC

Định lý 11. (i) *Nếu $f(x)$ đo được thì với mọi $\alpha > 0$ hàm số $|f(x)|^\alpha$ cũng đo được*

(ii) *Nếu $f(x)$ và $g(x)$ đo được và hữu hạn thì các hàm số*

$$f \pm g, \ fg, \ \max\{f, g\}, \ \min\{f, g\}$$

cũng đo được, và nếu $g(x)$ không triệt tiêu thì hàm số $1/g$ cũng đo được.

Ở đây cũng như về sau, khi nói "đo được" ta hiểu ngầm "đo được trên tập A" và để cho gọn, tập $\{x \in A : \ f(x) < a\}$ chẳng hạn sẽ được ký hiệu vắn tắt $\{f(x) < a\}$.

Chứng minh . (i) Nếu $f(x)$ đo được thì với mọi $a > 0$:

$$\begin{aligned}\{|f(x)|^\alpha < a\} &= \{|f(x)| < a^{1/\alpha}\} = \{-a^{1/\alpha} < f(x) < a^{1/\alpha}\} \\ &= \{f(x) < a^{1/\alpha}\} \cap \{f(x) > -a^{1/\alpha}\} \in \mathcal{F},\end{aligned}$$

vì mỗi tập $\{f(x) < a^{1/\alpha}\}$ và $\{f(x) > -a^{1/\alpha}\}$ đều thuộc $\mathcal{F}$. Còn nếu $a \leq 0$ thì

$$\{|f(x)|^\alpha < a\} = \emptyset \in \mathcal{F}.$$

Vậy $|f(x)|^\alpha$ đo được.

(ii) Cho a là một số thực bất kỳ, $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ là dãy tất cả các số thực hữu tỉ. Rõ ràng

$$f(x) + g(x) < a \Leftrightarrow f(x) < a - g(x) \Leftrightarrow (\exists n)\ f(x) < r_n < a - g(x),$$

do đó

$$\{f(x) + g(x) < a\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{f(x) < r_n < a - g(x)\}$$

$$= \cup_{n=1}^{\infty} \{[f(x) < r_n\} \cap \{g(x) < a - r_n\}] \in \mathcal{F},$$

vì mỗi tập $\{f(x) < r_n\}$ hay $\{g(x) < a - r_n\}$ đều thuộc $\mathcal{F}$. Vậy $f + g$ là đo được. Đối với $f - g$ cũng chứng minh tương tự.

Từ các kết quả trên và dựa vào các hệ thức

$$fg = \tfrac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2],$$
$$\max\{f,g\} = \tfrac{1}{2}(f + g + |f-g|),$$
$$\min\{f,g\} = \tfrac{1}{2}(f + g - |f-g|),$$

ta suy ra các hàm số fg, $\max\{g,g\}$, $\min\{f,g\}$ cũng đo được.

Nếu $g(x)$ không triệt tiêu thì với mọi a

$$\left\{\frac{1}{g^2} < a\right\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F} & \text{nếu} \quad a \leq 0, \\ \left\{g^2 > \dfrac{1}{a}\right\} \in \mathcal{F} & \text{nếu} \quad a > 0, \end{cases}$$

cho nên $\dfrac{1}{g^2}$ đo được và do đó $\dfrac{f}{g}$ cũng đo được vì

$$\frac{f}{g} = fg\frac{1}{g^2}. \qquad \square$$

Định lý 12. *Nếu $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, là những hàm số đo được và hữu hạn thì các hàm số*

$$\sup_n f_n(x);\ \inf_n f_n(x);\ \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x);\ \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

cũng đo được, và nếu hàm số $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *tồn tại thì nó cũng đo được.*

Chứng minh. Ta có với mọi số thực a :

$$\{\sup_n f_n(x) \le a\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{f_n(x) \le a\} \in \mathcal{F},$$
$$\{\inf_n f_n(x) \ge a\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{f_n(x) \ge a\} \in \mathcal{F},$$

cho nên các hàm số $\sup f_n(x)$ và $\inf f_n(x)$ đo được. Do đó suy ra các hàm số

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \inf_n \{\sup_k f_{n+k}(x)\},$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \sup_n \{\inf_k f_{n+k}(x)\},$$

cũng đo được, và nếu dãy $f_n(x)$ hội tụ thì hàm số $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ cũng đo được. □

Như vậy lớp các hàm số đo được kín đối với mọi phép toán giải tích. Dĩ nhiên mọi hàm số liên tục trên một tập $A \in \mathcal{L}^k \subset \mathbb{R}^k$ đều đo được (L) trên tập ấy, cho nên: giới hạn của một dãy hàm số liên tục là một hàm số đo được, mặc dù có thể không liên tục. Điều đó cho thấy rằng lớp các hàm số đo được (L) (trong $\mathbb{R}^k$) rộng hơn nhiều so với lớp các hàm số liên tục. Chẳng hạn hàm số Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỉ,} \\ 1 & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ,} \end{cases}$$

hay $f(x) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos 2\pi n!x)^k$ là đo được, tuy nó gián đoạn tại mọi điểm trên đường thẳng.

5.3. CẤU TRÚC CÁC HÀM SỐ ĐO ĐƯỢC. Cho một tập bất kỳ A trong không gian X, ta gọi *hàm đặc trưng* của A là hàm số $\mathcal{X}_A(x)$ xác định như sau

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin A, \\ 1 & \text{nếu } x \in A. \end{cases}$$

Giả sử rằng trên X có cho trước một σ-đại số $\mathcal{F}$. Dễ thấy rằng hàm đặc trưng của A là đo được đối với một σ-đại số $\mathcal{F}$ khi và chỉ khi tập A đo được $(A \in \mathcal{F})$. Thật vậy với mọi $a \in \mathbb{R}$

$$\{\mathcal{X}_A(x) > a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{nếu } a \ge 1, \\ X & \text{nếu } a < 0, \\ A & \text{nếu } 0 \le a < 1. \end{cases}$$

cho nên nếu A đo được thì $\mathcal{X}_A(x)$ đo được; ngược lại nếu $\mathcal{X}_A(x)$ đo được thì $A = \{x : \mathcal{X}_A(x) = 1\}$ đo được (Hệ quả II của định nghĩa).

Một hàm số $f(x)$ được gọi là *đơn giản* nếu nó hữu hạn, đo được, và chỉ lấy một số hữu hạn giá trị. Gọi α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ là các giá trị khác nhau của nó, và $A_i = \{x : f(x) = \alpha_i\}$ thì các tập A_i đo được, rời nhau, và ta có

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}(x).$$

Ngược lại, nếu $f(x)$ có dạng ấy, và các tập A_i đo được, rời nhau thì $f(x)$ là một hàm đơn giản. Thật vậy, $f(x)$ chỉ lấy một số hữu hạn giá trị, vì: nếu $x \in A_i$ thì $\mathcal{X}_{A_i}(x) = 1$, $\mathcal{X}_{A_j}(x) = 0$ với $j \neq i$ (A_i không có điểm chung với A_j), nên $f(x) = \alpha_i$, còn nếu $x \notin \cup_{i=1}^{n} A_i$ thì $\mathcal{X}_{A_i}(x) = 0$ với mọi i, nên $f(x) = 0$. Mặt khác, $f(x)$ đo được vì mỗi hàm số $\mathcal{X}_{A_i}(x)$ đều đo được. □

Định lý sau đây nêu rõ cấu trúc các hàm số đo được.

Định lý 13. *Mỗi hàm số $f(x)$ đo được trên một tập A là giới hạn của một dãy hàm đơn giản $f_n(x)$:*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in A$ thì có thể chọn các f_n để cho

$$f_n(x) \geq 0;\ f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$$

với mọi n và với mọi $x \in A$.

Chứng minh. Bằng cách đặt $f(x) = 0$ với mọi $x \notin A$ ta có thể coi như $f(x)$ xác định và đo được trên toàn không gian X.

Giả sử trước hết $f(x) \geq 0$. Ta hãy đặt

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{nếu } f(x) \geq n, \\ \dfrac{i-1}{2^n} & \text{nếu } \dfrac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{i}{2^n} \ (i = 1, 2, \ldots, n2^n). \end{cases}$$

Rõ ràng $f_n(x)$ là hàm số đơn giản và $f_n(x) \geq 0$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

Ta hãy chứng minh rằng

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Nếu $f(x) < +\infty$ thì với n đủ lớn $f(x) < n$, cho nên $(\exists i)\ \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}$, do đó $f_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$, chứng tỏ rằng $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \to 0\ (n \to \infty)$.

Nếu $f(x) = +\infty$ thì $(\forall n)\ f(x) \geq n$, cho nên $f_n(x) = n \to \infty$. Vậy trong mọi trường hợp : $f_n(x) \to f(x)$.

Bây giờ giả sử $f(x)$ bất kỳ. Đặt

$$f^+(x) = \max\{f(x);\ 0\},\ f^-(x) = \max\{-f(x);\ 0\},$$

ta có $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, và các hàm số $f^+(x)$, $f^-(x)$ đều không âm, cho nên, theo trên, có hai dãy hàm đơn giản $f_n^+(x)$ và $f_n^-(x)$ hội tụ tới $f^+(x)$ và $f^-(x)$. Đương nhiên mỗi hàm số $f_n(x) = f_n^+(x) - f_n^-(x)$ cũng đơn giản vì cũng đo được và chỉ lấy một số hữu hạn giá trị, và $f(x) = \lim f_n(x)$. □

5.4. HÀM SỐ TƯƠNG ĐƯƠNG. Trong một không gian X bất kỳ, cho một σ-đại số $\mathcal{F}$ và một độ đo μ trên $\mathcal{F}$. Ta nói một điều kiện $\alpha(x)$ được thỏa mãn *với hầu hết mọi* $x \in A$, hay được thỏa mãn *hầu khắp nơi* (h.k.n) trên A, nếu có một tập $B \subset A$ sao cho $\mu(B) = 0$ và $\alpha(x)$ được thỏa mãn với mọi $x \in A \setminus B$. Ví dụ: $f(x) = g(x)$ h.k.n. trên A có nghĩa là

$$(\exists B \subset A)\ \mu(B) = 0 \text{ và } (\forall x \in A \setminus B)\ f(x) = g(x).$$

Hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ bằng nhau h.k.n. thì gọi là *tương đương* nhau. Ta viết: $f(x) \sim g(x)$. Dĩ nhiên hai hàm số cùng tương đương với một hàm số thứ ba thì tương đương nhau.

Định lý 15. *Nếu μ là một độ đo đủ thì mọi hàm số $g(x)$ tương đương với một hàm số đo được $f(x)$ cũng đều đo được.*

Chứng minh. Với mọi số thực a ta có

$$\{f(x) < a\}\ \Delta\ \{g(x) < a\} \subset \{f(x) \neq g(x)\},$$

nhưng theo giả thiết tập $\{f(x) \neq g(x)\}$ có độ đo 0 mà μ là độ đo đủ, nên tập $\{f(x) < a\}\ \Delta\ \{g(x) < a\}$ cũng có độ đo 0, chứng tỏ rằng tập

$\{g(x) < a\}$ chỉ khác tập $\{f(x) < a\}$ bởi một tập có độ đo 0. Nhưng vì $f(x)$ đo được nên tập $\{f(x) < a\}$ đo được, do đó tập $\{g(x) < a\}$ cũng đo được. Vậy hàm số $g(x)$ đo được □

5.5. SỰ HỘI TỤ THEO ĐỘ ĐO. Cho những hàm số $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ và $f(x)$ đo được trên một tập A. Ta nói dãy $f_n(x)$ *hội tụ theo độ đo* μ tới $f(x)$ và viết: $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$, nếu

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} \mu\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0. \qquad (14)$$

Với giả thiết μ là độ đo đủ có thể nhận xét ngay rằng:

Nếu $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$ *và* $g(x) \sim f(x)$ *thì* $f_n(x) \xrightarrow{\mu} g(x)$.

Thật vậy, cho $B = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ ta có

$$\{x \in A : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \cup B,$$

nhưng $\mu(B) = 0$, cho nên

$$\mu\{|f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \leq \mu\{|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

từ đó suy ra nhận xét trên.

Ngược lại:

Nếu $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$ *và* $f_n(x) \xrightarrow{\mu} g(x)$ *thì* $f(x) \sim g(x)$.

Thật vậy với mọi $\varepsilon > 0$:

$$\{|f - g| \geq \varepsilon\} \subset \{|f_n - f| \geq \varepsilon/2\} \cup \{|f_n - g| \geq \varepsilon/2\},$$

vì nếu x không thuộc tập ở vế phải thì

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \text{ và } |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon/2,$$

từ đó $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, tức là x cũng không thuộc tập ở vế trái. Nói chính xác hơn, nếu x không thuộc tập ở vế phải thì còn có khả năng $f_n(x) = f(x) = g(x) = +\infty$ (hay $-\infty$), nhưng khi đó rõ ràng x cũng không thuộc tập ở vế trái. Vậy

$$\mu\{|f - g| \geq \varepsilon\} \leq \mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon/2\} + \mu\{|f_n - g| \geq \varepsilon/2\},$$

và vì $\mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon/2\} \to 0$, $\mu\{|f_n - g| \geq \varepsilon/2\} \to 0$, cho nên

$$\mu\{|f - g| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Nói riêng, với mọi n, ta có $\mu\{|f - g| \geq 1/n\} = 0$, do đó tập

$$\{f \neq g\} = \{|f - g| > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{|f - g| \geq 1/n\}$$

có độ đo 0, chứng tỏ rằng $f \sim g$.

Thành thử, nếu bỏ qua một tập có độ đo không (tức là không phân biệt hai hàm tương đương) thì giới hạn của một dãy hàm đo được hội tụ theo độ đo có thể coi là duy nhất.

Sau đây là liên hệ giữa hai khái niệm hội tụ theo độ đo và hội tụ *hầu khắp nơi*. Ta vẫn giả thiết như trước rằng độ đo μ là đủ.

Định lý 14. *Nếu một dãy hàm số $f_n(x)$ đo được trên một tập A hội tụ h.k.n. tới một hàm số $f(x)$, thì $f(x)$ đo được và nếu $\mu(A) < +\infty$ thì $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$.*

Chứng minh. Trước hết, $f(x)$ đo được. Thật vậy, theo giả thiết, tập $B = \{x \in A : f_n(x) \not\to f(x)\}$ có độ đo 0, và vì độ đo μ đủ nên mọi tập con của B cũng đo được (và có độ đo 0), do đó $f(x)$ đo được trên B. Mặt khác $f_n(x) \to f(x)$ với mọi $x \in A \setminus B$ nên theo Định lý 12, $f(x)$ đo được trên $A \setminus B$. Vậy $f(x)$ đo được trên $A = B \cup (A \setminus B)$.

Bây giờ cho ε là một số dương tuỳ ý. Nếu $(\forall n)\ (\exists i)\ |f_{n+i}(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ thì rõ ràng $x \in B$, cho nên

$$\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{\infty} \{|f_{n+i}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset B,$$

do đó

$$\mu(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{\infty} \{|f_{n+i}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Nhưng, đặt $E_n = \cup_{i=1}^{\infty}\{|f_{n+i}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, ta thấy rằng

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots,$$

và vì $\mu(E_1) \leq \mu(A) < +\infty$ nên $\mu(\cap_{i=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ (Định lý 3), do đó $\mu\{|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \mu(E_n) \to 0$, chứng tỏ rằng

$$f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x).$$

□

Chú ý. 1) Giả thiết $\mu(A) < +\infty$ là cần thiết, vì thiếu nó định lý không còn đúng. Chẳng hạn, lấy $A = \mathbb{R}, \mu$ là độ đo Lebesgue trên đường thẳng, và

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad n \le x \le n+1 \\ 0 & \text{tại các điểm khác,} \end{cases}$$

thì rõ ràng $f_n(x) \to 0$ tại mọi điểm, nhưng với mọi n

$$\mu\{x : |f_n(x) - 0| \ge 1/2\} = 1 \not\to 0,$$

nghĩa là $f_n(x)$ không hội tụ theo độ đo tới 0.

2) Ví dụ dưới đây cho thấy rõ Định lý 14 không có đảo đề :

Với mỗi k ta xác định trên khoảng $[0,1]$ k hàm số f_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, k)$ như sau:

$$f_{ik}(x) = \begin{cases} i & \text{nếu} \quad \dfrac{i-1}{k} \le x < \dfrac{i}{k}, \\ 0 & \text{tại các điểm khác.} \end{cases}$$

Dễ chứng minh rằng dãy $\varphi_1 = f_{11}$, $\varphi_2 = f_{12}$, $\varphi_3 = f_{22}$, $\varphi_4 = f_{13}$, $\varphi_5 = f_{23}$, $\varphi_6 = f_{33}, \ldots$ hội tụ theo độ đo tới 0, nhưng không hội tụ tới 0 tại điểm nào cả.

Tuy nhiên, ta có:

Định lý 16. *Nếu dãy hàm số đo được $f_n(x)$ hội tụ theo độ đo tới $f(x)$, thì có một dãy con $f_{n_k}(x)$ hội tụ h.k.n. tới $f(x)$.*

Chứng minh. Ta hãy chọn một dãy $\varepsilon_k \to 0$ và một dãy $\eta_k > 0$ sao cho $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty$ (ví dụ $\varepsilon_k = \eta_k = 1/2^k$).

Với mỗi k có tồn tại một số tự nhiên $n(k)$ sao cho với mọi $n \ge n(k)$

$$\mu\{|f_n - f| \ge \varepsilon_k\} < \eta_k.$$

Đặt $n_1 = n(1)$, $n_2 = \max\{n_1+1, n(2)\}$, $n_3 = \max\{n_2+1, n(3)\}, \ldots$, ta sẽ có $n_1 < n_2 < n_3 \ldots \to +\infty$, và với mọi k

$$\mu\{|f_{n_k} - f| \ge \varepsilon_k\} < \eta_k.$$

Xét tập

$$B = \cap_{i=1}^{\infty} Q_i, \text{ với } Q_i = \cup_{k=i}^{\infty} \{|f_{n_k} - f| \ge \varepsilon_k\}.$$

Với mọi i ta có $B \subset Q_i$ cho nên

$$\mu(B) \le \mu(Q_i) \le \sum_{k=i}^{\infty} \mu\{|f_{n_k} - f| \ge \varepsilon_k\} < \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k.$$

Nhưng $\sum_{k=i}^{\infty} \eta_k \to 0$ $(i \to \infty)$, vì $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty$, do đó $\mu(B) = 0$.

Với mỗi $x \in A \setminus B$, có một i sao cho $x \notin Q_i$, tức là sao cho với mọi $k \ge i$

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \varepsilon_k.$$

Vì $\varepsilon_k \to 0$ nên điều này có nghĩa là $f_{n_k}(x) \to f(x)$ $(k \to \infty)$. □

5.6*. HAI ĐỊNH LÝ VỀ CẤU TRÚC HÀM ĐO ĐƯỢC

Sau đây là hai định lý hay về cấu trúc của các hàm số đo được cho thấy các hàm số này khá "tốt" nếu bỏ qua một tập có độ đo nhỏ.

Định lý 17. (Egorov) *Cho một dãy hàm số $f_n(x)$ đo được, hữu hạn h.k.n. và hội tụ h.k.n. trên một tập đo được A có độ đo $\mu(A) < +\infty$. Với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một tập đo được $B \subset A$ sao cho $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$ và dãy $f_n(x)$ hội tụ đều trên tập B.*

Nói vắn tắt, mọi sự hội tụ trên một tập có độ đo hữu hạn có thể biến thành hội tụ đều sau khi bỏ đi một tập có độ đo nhỏ tuỳ ý.

Chứng minh. Không giảm tính tổng quát ta có thể giả thiết các $f_n(x)$ hữu hạn khắp nơi và dãy $f_n(x)$ hội tụ khắp nơi trên tập A.

Cho $f(x)$ là giới hạn của dãy $f_n(x)$. Đặt

$$A_n^k = \cup_{i=n}^{\infty} \{x \in A : |f_i(x) - f(x)| < 1/k\},$$

ta thấy rằng nếu $x \in A$ thì với mỗi k phải tồn tại một n nào đó để $x \in A_n^k$. Vậy với mọi k

$$A = \cup_{i=n}^{\infty} A_n^k.$$

Nhưng rõ ràng $A_1^k \subset A_2^k \subset \ldots$, cho nên, theo Định lý 3, $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n^k)$, và với $\varepsilon > 0$ cho trước có thể tìm n_k để $\mu(A \setminus A_{n_k}^k) < \varepsilon/2^k$. Khi ấy đặt

$$B = \cap_{k=1}^{\infty} A_{n_k}^k,$$

ta có $A \setminus B = \cup_{k=1}^{\infty} (A \setminus A_{n_k}^k)$, nên

$$\mu(A \setminus B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \setminus A_{n_k}^k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Dễ thấy rằng dãy $f_n(x)$ hội tụ đều trên tập B, vì với mọi k cho trước:

$$x \in B \Rightarrow x \in A_{n_k}^k \Rightarrow (\forall i \geq n_k)|f_i(x) - f(x)| < 1/k \cdot \qquad \square$$

Định lý Egorov đúng cho mọi không gian và mọi độ đo. Riêng cho trường hợp không gian $\mathbb{R}^k$ và độ đo (L) thì trong phát biểu trên có thể buộc thêm điều kiện tập B là *đóng* vì rằng theo hệ quả Định lý 9, mỗi tập đo được B trong $\mathbb{R}^k$ đều có thể thay bằng một tập đóng chứa trong B và có độ đo sát tuỳ ý độ đo của B.

Định lý 18 (Lusin). *Cho một tập $A \subset \mathbb{R}^k$ có độ đo $\mu(A) < +\infty$. Một hàm số $f(x)$ xác định và hữu hạn trên tập A là đo được khi và chỉ khi với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một tập đóng $F \subset A$ sao cho $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$ và $f(x)$ liên tục trên tập F.*

Nói vắn tắt, hàm số đo được là những hàm số có thể biến thành liên tục sau khi bỏ qua một tập có độ đo nhỏ tuỳ ý.

Chứng minh. (i) "Khi". Giả sử $f(x)$ thỏa mãn điều kiện nêu trên và cho $B = \cup_{n=1}^{\infty}(A \setminus F_n)$, trong đó F_n là tập đóng ứng với $\varepsilon = 1/n$. Vì $\mu(B) \leq \mu(A \setminus F_n) < 1/n$ với mọi n, nên $\mu(B) = 0$. Ta có $A \setminus B = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ (công thức De Morgan) và với mọi $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in A \setminus B : f(x) < a\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in F_n : f(x) < a\}$. Nhưng mỗi tập $\{x \in F_n : f(x) < a\}$ là đo được vì $f(x)$ liên tục trên F_n, nên hợp của chúng cũng đo được. Vậy $f(x)$ đo được trên $A \setminus B$ và do đó cũng đo được trên A, vì $\mu(B) = 0$.

(ii) "Chỉ khi". Ngược lại giả sử $f(x)$ đo được trên A và trước hết xét trường hợp nó là một hàm đơn giản, tức là $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ trong đó A_i là những tập đo được rời nhau, có hợp bằng A. Theo hệ quả Định lý 9, với $\varepsilon > 0$ cho trước, có thể tìm được cho mỗi i một tập đóng $F_i \subset A_i$, sao cho $\mu(A_i \setminus F_i) < \varepsilon/n$. Đặt $F = \cup_{i=1}^{n} F_i$ ta sẽ có $F \subset A$, F đóng, $\mu(A \setminus F) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \setminus F_i) < \varepsilon$, và rõ ràng $f(x)$ liên tục trên tập F, vì nó không đổi và bằng α_1 trên mỗi F_i.

Trong trường hợp tổng quát, $f(x)$ bằng giới hạn của một dãy hàm đơn giản $f_n(x)$. Theo trên, với mỗi n có một tập đóng $F_n \subset A$ sao cho

$\mu(A \setminus F_n) < \varepsilon/2^{n+1}$ và $f_n(x)$ liên tục trên F_n. Đồng thời theo Định lý 17 (Egorov) có một tập đóng $F_0 \subset A$ sao cho $\mu(A \setminus F_0) < \varepsilon/2$ và dãy $f_n(x)$ hội tụ đều tới $f(x)$ trên F_0. Đặt $F = \cap_{n=0}^{\infty} F_n$ ta có $F \subset A$, F đóng, và

$$\mu(A \setminus F) = \mu[\cup_{n=0}^{\infty}(A \setminus F_n)] \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A \setminus F_n) < \varepsilon/2 + \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{n+1} = \varepsilon.$$

Vì các $f_n(x)$ liên tục trên F cho nên giới hạn đều của chúng, tức $f(x)$, cũng liên tục trên F. □

Như vậy, Định lý Lusin nêu lên một đặc trưng rất trực quan của hàm số đo được. Nó cho thấy rằng tuy lớp các hàm số đo được rộng hơn lớp các hàm số liên tục rất nhiều, nhưng mỗi hàm số đo được khác hàm số liên tục không nhiều lắm.

6*. ĐỘ ĐO VÀ THỨ NGUYÊN HAUSDORFF

6.1. ĐỘ ĐO HAUSDORFF. Khi nghiên cứu độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^k$ (mục 4.1) ta đã thấy rằng nó mở rộng đáng kể khái niệm độ đo Peano-Jordan. Tuy nhiên nó vẫn chưa đáp ứng hết các yêu cầu nghiên cứu về tập hợp. Chẳng hạn, tập Cantor F và tập các điểm hữu tỉ trong $[0, 1]$ cùng có độ đo Lebesgue bằng 0, thế nhưng lực lượng của chúng khác nhau xa (lực lượng continum và lực lượng đếm được). Nói chung, để nghiên cứu các tập fractal, cần một độ đo tinh vi hơn độ đo Lebesgue. Một độ đo thỏa mãn yêu cầu đó và đã trở thành công cụ chủ yếu của lý thuyết fractal là độ đo Hausdorff.

Cho một tập $F \subset \mathbb{R}^k$, và một số $s > 0$. Với mỗi $\delta > 0$ ta xét những họ (hữu hạn hay đếm được) tập $\{U_i\}$ sao cho $\cup_{i=1}^{\infty} U_i \supset F$ và $|U_i| \leq \delta \ \forall i$ trong đó ký hiệu $|U|$ chỉ đường kính của một tập bất kỳ $U \subset \mathbb{R}^k$, tức là số $|U| = \sup\{\|x - y\| : x, y \in U\}$. Mỗi họ như thế gọi là một *δ-phủ* của F. Ta định nghĩa :

$$\mathcal{H}^s_\delta = \inf\{\sum_{i=1}^{+\infty} |U_i|^s : \ \{U_i\} \text{ là } \delta\text{-phủ của } F\}. \tag{15}$$

Rõ ràng nếu $\delta_2 < \delta_1$ thì mọi δ_2-phủ của F đều cũng là δ_1-phủ cho nên $\mathcal{H}^s_{\delta_2} \geq \mathcal{H}^s_{\delta_1}$. Vậy khi δ giảm dần tới 0, thì $\mathcal{H}^s_\delta$ tăng dần và phải tiến đến

một giới hạn

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F). \tag{16}$$

Dễ kiểm tra lại rằng giới hạn này là một độ đo ngoài trên $\mathbb{R}^k$ (sau này sẽ thấy nó thường bằng 0 hoặc $+\infty$). Độ đo do nó cảm sinh được gọi là *độ đo Hausdorff s-thứ nguyên* trên $\mathbb{R}^k$ và ký hiệu $\mathcal{H}^s$. Có thể chứng minh rằng σ-đại số các tập $\mathcal{H}^s$-đo được chứa mọi gian trong $\mathbb{R}^k$ cho nên cũng chứa σ-đại số Borel của $\mathbb{R}^k$, và với mỗi tập Borel $F \subset \mathbb{R}^k$ ta có

$$c^k \mathcal{H}^k(F) = \mathcal{L}^k(F) \tag{17}$$

trong đó c_k là thể tích của một hình cầu k-thứ nguyên có đường kính đơn vị, còn $\mathcal{L}^k(F)$ là độ đo Lebesgue k-thứ nguyên của F. Tương tự như vậy, $\mathcal{H}^0(F)$ bằng số điểm của F; $\mathcal{H}^1(F)$ bằng độ dài của F nếu F là đường cong trơn; $\mathcal{H}^2(F)$ bằng $4/\pi$ lần diện tích của F nếu F là mặt trơn, v.v...

Một ánh xạ $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ được gọi là *ánh xạ Hölder* trên một tập $F \subset \mathbb{R}^k$, với số mũ $\alpha > 0$, và hằng số $c > 0$ nếu

$$\|f(x) - f(y)\| \le c\|x - y\|^\alpha \quad \forall x, y \in F.$$

Đương nhiên ánh xạ Lipschitz ((8), Chương 2, mục 5.2) là trường hợp riêng của ánh xạ Hölder khi $\alpha = 1$.

Định lý 19. (i) *Nếu $F \subset \mathbb{R}^k$ và $\lambda > 0$ thì*

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F). \tag{18}$$

(ii) *Nếu $f : F \to \mathbb{R}^m$ là ánh xạ Hölder với số mũ $\alpha > 0$ và hằng số $c > 0$ thì*

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \le c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F). \tag{19}$$

Chứng minh. (i) Nếu $\{U_i\}$ là δ-phủ của F thì $\{\lambda U_i\}$ là $\lambda\delta$-phủ của λF, do đó

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \le \sum |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s \le \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

và cho $\delta \to 0$ ta được $\mathcal{H}^s(\lambda F) \le \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$. Áp dụng kết quả này cho tập λF và số $\frac{1}{\lambda}$ sẽ có bất đẳng thức ngược lại: $\mathcal{H}^s(\frac{1}{\lambda}(\lambda F)) \le (\frac{1}{\lambda})^s \mathcal{H}^s(\lambda F)$.

(ii) Nếu $\{U_i\}$ là δ-phủ của F thì $|f(U_i)| \le c|U_i|^\alpha$, cho nên $\{f(U_i\}$ là $(c\delta^\alpha)$-phủ của $f(F)$. Vậy $|f(U_i)|^{s/\alpha} \le c^{s/\alpha}|U_i|^s$, do đó $\mathcal{H}^{s/\alpha}_{c\delta^\alpha}(f(F)) \le c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s_\delta(F)$, và suy ra (19) khi cho $\delta \to 0$. □

Nói riêng, nếu f là một phép đẳng cự, nghĩa là $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ $\forall x, y \in F$, thì $\mathcal{H}^s f(F) = \mathcal{H}^s(F)$. Thành thử độ đo Hausdorff bất biến đối với phép tịnh tiến và phép quay.

6.2. THỨ NGUYÊN HAUSDORFF. Do (15) rõ ràng nếu $\delta < 1$, thì $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ không tăng khi s tăng. Do (16) $\mathcal{H}^s(F)$ cũng không tăng. Cụ thể

$$\sum_i |U_i|^t \le \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

do đó lấy infimum ta được $\mathcal{H}^t_\delta(F) \le \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(F)$. Cho $\delta \to 0$ ta thấy rằng nếu $\mathcal{H}^s(F) < +\infty$ thì $\mathcal{H}^t(F) = 0$ $\forall t > s$. Vậy ắt có một trị s_F sao cho $\mathcal{H}^s(F) = +\infty$ với $0 < s < s_F$ và $\mathcal{H}^s(F) = 0$ với $s > s_F$. Số s_F ấy gọi là *thứ nguyên Hausdorff* của F, ký hiệu $\dim_H F$. Vậy

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu } s < \dim_H F \\ 0, & \text{nếu } s > \dim_H F. \end{cases} \tag{20}$$

Với $s = \dim_H F$, $\mathcal{H}^s(F)$ có thể bằng 0 hoặc $+\infty$ hoặc

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < +\infty. \tag{21}$$

Một tập Borel thỏa mãn điều kiện này gọi là một *s-tập*.

Các tính chất đáng chú ý sau đây của độ đo Hausdorff có thể chứng minh dễ dàng:

$\dim_H F = 0$ với mọi *tập đếm được* $F \subset \mathbb{R}^k$;

$\dim_H F = n$ với mọi *tập mở* $F \subset \mathbb{R}^k$;

Nếu $E \subset F$ thì $\dim_H E \le \dim_H F$ *(tính đơn điệu)*;

$\dim_H \cup_{i=1}^\infty F_i = \sup_{1 \le i < +\infty}\{\dim_H F_i\}$ *(tính ổn định đếm được)*.

Định lý 20. *Nếu $F \subset \mathbb{R}^k$ và $f : F \to \mathbb{R}^m$ thỏa mãn điều kiện Hölder*

$$\|f(x) - f(y)\| \le c\|x - y\|^\alpha \quad \forall x, y \in F$$

thì $\dim_H f(F) \le (1/\alpha)\dim_H F$.

Chứng minh. Theo Định lý 19 nếu $s > \dim_H F$ thì $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \le c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F) = 0$, do đó $\dim_H f(F) \le s/\alpha$. □

Hệ quả. (i) Nếu $f : F \to \mathbb{R}^m$ là Lipschitz thì $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$.

(ii) Nếu $f : F \to \mathbb{R}^m$ là Lipschitz hai chiều, tức là $c_1\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| \leq c_2\|x-y\|$ $\forall x, y \in F$ thì $\dim_H f(F) = \dim_H F$. Nói cách khác, thứ nguyên Hausdorff bất biến theo các biến đổi Lipschitz kép.

6.3. THỨ NGUYÊN KOLMOGOROV. Cùng với thứ nguyên Hausdorff, người ta cũng thường dùng thứ nguyên Kolmogorov (hay còn gọi là thứ nguyên hộp, thứ nguyên entropy, thứ nguyên metric, thứ nguyên thông tin).

Cho F là một tập con không rỗng, bị chặn, của $\mathbb{R}^k$, và cho $N_\delta(F)$ là số tối thiểu lập phương có cạnh bằng δ có thể phủ được F. Nếu có một hằng số $s \geq 0$ sao cho tồn tại

$$\lim_{\delta \to 0} N_\delta(F)\delta^s \tag{22}$$

thì s gọi là *thứ nguyên Kolmogorov* của F và ký hiệu $s = \dim_B F$. Lấy loga hai vế của (22), ta được

$$s \log \delta + \log N_\delta(F) \to c$$

trong đó c là loga của giới hạn (22). Vậy

$$\dim_B F == \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{23}$$

khi giới hạn này tồn tại. Trong trường hợp tổng quát, vì giới hạn này có thể không tồn tại, nên ta định nghĩa *thứ nguyên dưới* và *trên* của F theo thứ tự là

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad \text{và} \quad \overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Dễ thấy rằng trong các định nghĩa trên có thể lấy N_δ là số tối thiểu tập có đường kính δ phủ được F. So sánh với thứ nguyên Hausdorff ta nhận xét rằng nếu F có thể phủ bởi $N_\delta(F)$ tập có đường kính δ thì do (15) ta có

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq N_\delta(F)\delta^s$$

cho nên có thể suy ra

$$\dim_H F \le \underline{\lim}_B F \le \overline{\lim}_B F \quad \forall F \subset \mathbb{R}^k.$$

Trong khá nhiều trường hợp (chẳng hạn với tập Cantor) ta được đẳng thức, nhưng nói chung thì bất đẳng thức ở đây là chặt. Chú ý rằng nếu có (23) thì

$$N_\delta(F)\delta^s \to \infty \qquad \text{nếu } s < \dim_B F,$$

và

$$N_\delta(F)\delta^s \to 0 \qquad \text{nếu } s > \dim_B F.$$

Liên hệ với định nghĩa (20) ta nhận thấy

$$N_\delta(F)\delta^s = \inf\{\sum_i \delta^s : \{U_i\} \text{ là một } \delta\text{-phủ (hữu hạn) của } F\}.$$

trong khi đó với độ đo và thứ nguyên Hausdorff thì

$$\mathcal{H}^s_\delta = \inf\{\sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ là } \delta\text{-phủ của } F\}.$$

Thành thử thứ nguyên Kolmogorov có thể xem như ước lượng khả năng phủ một tập bởi một họ tập nhỏ cùng cỡ như nhau, còn thứ nguyên Hausdorff ước lượng khả năng phủ tập đó bởi những tập nhỏ nhưng cỡ có thể chênh lệch khác nhau xa. Do đó dễ hiểu thứ nguyên Kolmogorov nói chung dễ tính toán hơn thứ nguyên Hausdorff.

6.4. THỨ NGUYÊN CÁC TẬP TỰ ĐỒNG DẠNG. Một tập tự đồng dạng là một fractal xác định từ một tập compac $D \subset \mathbb{R}^n$ theo một lược đồ hàm lặp (mục 7.4, Chương 2) với các phép đồng dạng $S_i, i = 1, \ldots, m$, tức là các ánh xạ có $S_1, \ldots, S_m : D \to D$ sao cho

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| = c_i\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$(0 < c_i < 1)$.Thứ nguyên một fractal như thế có thể tính tương đối dễ nếu *điều kiện tập mở* sau đây được thoả mãn:

Tồn tại một tập V mở, không rỗng, bị chặn, sao cho

$$V \supset \cup_{i=1}^m S_i(V) \tag{24}$$

trong đó các $S_i(V)$ rời nhau.

Định lý 21. *Giả sử điều kiện tập mở (24) đúng cho các phép đồng dạng S_i trên $\mathbb{R}^k$ với tỉ lệ $c_i (1 \le i \le m)$. Nếu F là tập bất biến của họ $S_1, \ldots, S_m$:*

$$F = \cup_{i=1}^{m} S_i(F) \tag{26}$$

thì $\dim_H F = s$, *trong đó s được cho bởi*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1 \tag{25}.$$

Với trị s đó ta có $0 < \mathcal{H}^s(F) < +\infty$.

Chứng minh. Với mọi tập A và mọi bộ k số tự nhiên $i_j \in \{1, \ldots, m\}$ $(j = 1, \ldots, k)$ ta viết $A_{i_1,\ldots,i_k} = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(A)$. Vì $|S_i(F)| \le c_i|F|$ nên $|F_{i_1,\ldots,i_k}| \le c_{i_1} \cdots c_{i_k}|F|$ (nhắc lại $|E| = \sup\{\|x - y\| : x, y \in E\}$). Do đó, cho trước $\delta > 0$ ta sẽ có $|F_{i_1,\ldots,i_k}| \le \delta$ với k đủ lớn. Ký hiệu J_k là tập tất cả các bộ k số $(i_1, \ldots, i_k)$ với $1 \le i_j \le m$. Ta có

$$F = S^k(F) = \cup_{i_1=1}^{m}(\cup_{i_2=1}^{m}(\ldots(\cup_{i_k=1}^{m} S_{i_k}(F)\ldots)) = \cup_{J_k} F_{i_1,\ldots,i_k}$$

cho nên họ $\{F_{i_1,\ldots,i_k}\}$ là một δ-phủ của F. Mà theo (25) ta có thể viết

$$\sum_{J_k} |F_{i_1,\ldots,i_k}|^s = \sum_{J_k} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s |F|^s = (\sum_{i_1} c_{i_1}^s) \cdots (\sum_{i_k} c_{i_k}^s)|F|^s = |F|^s.$$

Vậy $\mathcal{H}^s_\delta(F) \le |F|^s$ và cho $\delta \to 0$ ta được $\mathcal{H}^s(F) \le |F|^s$, do đó $\dim_H(F) \le s$.

Để chứng minh $\mathcal{H}^s > 0$ và $\dim_H(F) \ge s$ phải dùng điều kiện (24) và cần lập luận phức tạp hơn. Ta bỏ qua chứng minh này. □

Nếu không đòi hỏi điều kiện tập mở thì có thể chứng minh rằng ta vẫn có $\dim_H F = \dim_B F$ nhưng trị này có thể nhỏ hơn s.

Sau đây là cách tính thứ nguyên một số fractal tự đồng dạng đã gặp (§7, Chương 2).

1. *Tập Cantor :* được xây dựng từ đoạn thẳng $D = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, và hai phép đồng dạng $S_1(x) = \frac{1}{3}x, S_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$ (tỉ số đồng dạng $c_1 = c_2 = 1/3$). Điều kiện tập mở được thoả mãn với V là khoảng $(0, 1)$. Vậy thứ nguyên là số s nghiệm đúng $2(\frac{1}{3})^s = 1$, tức $s = \log 2/\log 3 = 0.6309....$

Nếu công nhận $0 < \mathcal{H}^s(F) < +\infty$ với $s = \dim_H F$ thì có thể lập luận trực quan như sau để tính s.

Tập Cantor F gồm một phần bên trái $F_L = F \cap [0, \frac{1}{3}]$ và một phần bên phải $F_R = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$, hai phần ấy rời nhau và đồng dạng với F theo tỉ lệ thu nhỏ $\frac{1}{3}$ và $F = F_L \cup F_R$ là một tổng rời. Vậy theo Định lý 19 ta có với mọi s

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R) = (\frac{1}{3})^s \mathcal{H}^s(F) + (\frac{1}{3})^s \mathcal{H}^s(F)$$

Vì $\mathcal{H}^s(F) > 0$ nên có thể chia cho $\mathcal{H}^s(F)$ để có $1 = 2(\frac{1}{3})^s$, hay $s = \log 2 / \log 3$.

2. *Đệm Sierpinski:* được xây dựng từ một tam giác $D \subset \mathbb{R}^2$, với 3 phép đồng dạng theo tỉ lệ $1/2$. Điều kiện tập mở được thỏa mãn với $V = \text{int} D$. Ta có $\dim_H F = \dim_B F = \log 3 / \log 2$.

3. *Đường von Koch sửa đổi:* được xây dựng bằng cách chọn trước $0 < a \leq 1/3$ và xuất phát từ một đoạn D, cắt bỏ khỏi đoạn ấy một khoảng giữa dài bằng a lần độ dài đoạn và thay nó bởi hai cạnh kia của một tam giác đều xây dựng trên khoảng đã bỏ, rồi lặp lại y như thế đối với mỗi đoạn mới tạo.

Gọi E là đường gấp khúc gồm 4 đoạn thẳng tạo thành sau phép lặp thứ nhất thì dễ thấy rằng F được xác định bởi 4 phép đồng dạng ánh xạ khoảng D lên mỗi đoạn trong 4 đoạn của E. Điều kiện tập mở được thỏa mãn với V là tam giác cân có độ dài đáy bằng 1 và chiều cao $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy thứ nguyên đường von Koch sửa đổi F là $\dim_H F = \dim_B F = s$ với s nghiệm đúng $2a^s + 2(\frac{1}{2}(1-a))^s = 1$. □

BÀI TẬP

Độ đo trên một đại số tập hợp.

1. Nếu μ là một độ đo trên một đại số $\mathcal{C}$ thì với mọi tập $A, B \in \mathcal{C}$ ta có $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

2. Cho một độ đo μ trên đại số $\mathcal{C}$. Nếu $A, B \in \mathcal{C}$ thì ta viết $A \sim B$ khi nào $\mu(A \,\Delta\, B) = 0$.Chứng minh rằng quan hệ "$\sim$" là phản xạ, đối xứng và bắc cầu, và nếu $A \sim B$ thì $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B)$.

3. Với mọi dãy tập $A_n \in \mathcal{C}$ ta có

$$\mu(\lim_{n\to\infty} \inf\ A_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\ \mu(A_n),$$

và nếu $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$ thì

$$\mu(\lim_{n\to\infty} \sup\ A_n) \ge \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \mu(A_n).$$

(xem bài tập 3, Chương 1).

4. Cho một độ đo μ trên một đại số $\mathcal{C}$. Một tập $A \in \mathcal{C}$ gọi là *nguyên tử* của độ đo μ nếu $0 < \mu(A)$ và nếu $B \subset A$, $B \in \mathcal{C}$ thì hoặc $\mu(B) = 0$ hoặc $\mu(B) = \mu(A)$ (chẳng hạn một tập chỉ gồm một điểm mà có độ đo dương thì là nguyên tử).Chứng minh rằng nếu $0 < \mu(C) < \infty$ thì với mọi $r > 0$ tập C phải chứa hoặc một nguyên tử có độ đo $> r$, hoặc một tập có độ đo dương và $\le r$.

Chỉ dẫn: Giả sử C không chứa nguyên tử nào cả, và cho $\mu(C) = a$. Vì C không phải là nguyên tử nên phải có $B_1 \subset C$ sao cho $0 < \mu(B_1) < a$. Ta phải có $\mu(B_1) \le a/2$ hoặc $\mu(C \setminus B_1) \le a/2$, thành thử bao giờ cũng có $C_1 \subset C$, với $0 < \mu(C_1) < a/2$. Vì C_1 không nguyên tử nên lại có $C_2 \subset C_1$, với $0 < \mu(C_2) \le \frac{1}{2}(\frac{a}{2}) = \frac{a}{4}$,v.v..

5. Nếu μ là độ đo trên $\mathcal{C}$ không có nguyên tử thì với mọi $C \in \mathcal{C}$ mà $0 < \mu(C) < \infty$ và mọi r nghiệm đúng $0 < r < \mu(C)$ bao giờ cũng có những tập rời nhau $C_i \in \mathcal{C}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, sao cho $C_i \subset C$, $\mu(C_i) \le r$ và $\mu(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$.

Chỉ dẫn: Với mỗi $A \subset C$ đặt $s(A) = \sup\{\mu(M) : M \in \mathcal{C}, M \subset A, \mu(M) \le r\}$. Theo bài tập 4, $s(C) > 0$, cho nên có $C_1 \in \mathcal{C}$, $C_1 \subset C$, $\frac{1}{2}s(C) \le \mu(C_1) \le r$. Với mỗi $k = 1, 2, \ldots$, lấy $C_{k+1} \in \mathcal{C}$, $C_{k+1} \subset C \setminus \cup_{i=1}^{k} C_i$ và $\frac{1}{2}s(C \setminus \cup_{i=1}^{k} C_i) \le \mu(C_{k+1}) \le \varepsilon$. Chứng minh $\lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = 0$. Suy ra $s(C \setminus \cup_{k=1}^{\infty} C_k) = 0$ do đó $\mu(C \setminus \cup_{k=1}^{\infty} C_k) = 0$.

6. Nếu μ là độ đo trên $\mathcal{C}$ không có nguyên tử thì với mọi $C \in \mathcal{C}$ mà $0 < \mu(C) < \infty$ và mọi m nghiệm đúng $0 < m < \mu(C)$ bao giờ cũng có $M \in \mathcal{C}$, $M \subset C$ với $\mu(M) = m$.

Chỉ dẫn: Dựa theo bài tập 5, xây dựng $M_1 \in \mathcal{C}$, $M_1 \subset C$ sao cho $\frac{m}{2} \le \mu(M_1) \le m$, sau đó với mỗi $k = 1, 2, \ldots$ xây dựng $M_{k+1} \in \mathcal{C}$, $M_{k+1} \subset C \setminus \cup_{i=1}^{k} M_i$, sao cho $\frac{1}{2}(m - \sum_{i=1}^{k} \mu(M_i)) \le (M_{k+1}) \le m - \sum_{i=1}^{k} \mu(M_i)$. Lấy $M =$ hợp tất cả các $M_1, M_2, \ldots$.

7. Cho μ là một độ đo hữu hạn trên σ-đại số Borel $\mathcal{B}(X)$ của một không gian metric X đủ và tách được (khả ly). Với mọi $\varepsilon > 0$ có một tập compac $C \in \mathcal{B}(X)$ với $\mu(X \setminus C) < \varepsilon$.

Chỉ dẫn: Với mỗi số tự nhiên n có thể tìm được một họ đếm được hình cầu mở $S_{n,1}, S_{n,2}, \ldots$ có bán kính ε/n, phủ X. Tồn tại m_n để cho $(X \setminus \cup_{i=1}^{m_n} S_{n,i}) < \varepsilon/2^{n+1}$. Khi ấy lấy $C = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{m_n} \overline{S_{n,i}}$.Chứng minh C đóng và hoàn toàn giới nội.

Khuếch độ đo

8. Cho μ^* là một độ đo ngoài trên X.Chứng minh rằng với mọi $A, B \subset X$: $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \,\Delta\, B)$.

9. Cho đại số $\mathcal{C} = \{\emptyset, X\}$ và độ đo μ trên $\mathcal{C}$ xác định như sau : $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = 1$. Tìm độ đo ngoài μ^*, và σ-đại số các tập μ^*-đo được.

10. Cho m là một độ đo hữu hạn trên một đại số $\mathcal{C}$, μ^* là độ đo ngoài xác định từ m theo công thức (3) ở mục 3.2. Chứng minh rằng một tập $A \subset X$ là μ^* đo được khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ đều có thể tìm được một tập $C \in \mathcal{C}$ sao cho $\mu^*(A \,\Delta\, C) \leq \varepsilon$.

Chỉ dẫn: "Khi". Cho $C_k \in \mathcal{C}$ là tập sao cho $\mu^*(A \,\Delta\, C_k) \leq 1/k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Đặt $E_k = A \,\Delta\, C_k$ và chứng minh $A \subset B \cup E$, $B \subset A \cup E$, với $B = \cap_{k=1}^{\infty} C_k$, $E = \cap_{k=1}^{\infty} E_k$. Từ đó suy ra $A = (B \cup E) \setminus N$ với $N \subset E$, $\mu^*(E) = 0$ và áp dụng Định lý 8.

"Chỉ khi". Chọn $P_i \in \mathcal{C}$, sao cho hợp các P_i phủ A, và $\sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) < \mu(A) + \varepsilon/2$. Sau đó lấy n_0 đủ lớn để $\sum_{i>n_0} m(P_i) < \varepsilon/2$. Đặt $C = \cup_{i=1}^{n_0} P_i$ sẽ có $C \in \mathcal{C}$ và $\mu^*(A \,\Delta\, C) < \varepsilon$.

11. Với những giả thiết như trong bài tập 10, chứng minh rằng một tập $A \subset X$ là μ^*-đo được khi và chỉ khi $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, trong đó

$$\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A)$$

(gọi là *độ đo trong* của A).

Chỉ dẫn: "Khi": Lấy $P_i \in \mathcal{C}$, $Q \in \mathcal{C}$ sao cho các P_i phủ A, các Q_i phủ $X \setminus A$ và $\sum_i m(P_i) \leq \mu^*(A) + \varepsilon/3$, $\sum_i m(Q_i) \leq \mu^*(X \setminus A) + \varepsilon/3$. Sau đó chọn n_0 đủ lớn để $\sum_{i>n_0} m(P_i) < \varepsilon/3$ và đặt $C = \cup_{i=1}^{n_0} P_i$. Chứng minh rằng $\mu^*(A \,\Delta\, C) \leq \varepsilon$ và dựa vào bài tập 10.

"Chỉ khi": Áp dụng định nghĩa tập μ^* đo được (lấy $E = X$ trong (1) mục 3.3).

Độ đo trong $\mathbb{R}^k$

12. Mỗi tập $A \subset \mathbb{R}$ đo được (L) đều có thể biểu diễn thành $A = G \setminus B$, trong đó G là giao của một dãy tập mở, hoặc $A = F \cup B$, trong đó F là hợp một dãy tập đóng, và B là một tập có độ 0. (Xem định lý 10).

13. Một tập bị chặn trên đường thẳng thì có độ đo ngoài hữu hạn. Ngược lại có đúng không?

14. Một tập $A \subset [0,1]$ có độ đo $> 1/2$.

Chứng minh rằng A phải có chứa một tập con có độ đo dương và đối xứng qua điểm giữa của $[0,1]$.

Chỉ dẫn: Xét tập A' đối xứng với A qua điểm giữa của $[0,1]$ và lấy $A \cap A'$.

15. Một tập A (trên đường thẳng) có độ đo 0 khi và chỉ khi có thể tìm được một dãy khoảng mở Δ_n sao cho mỗi điểm x thuộc về vô số khoảng và $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < \infty$.

16. Một tập $A \subset [0,1]$ gọi là *"không đâu trù mật"* nếu bất cứ khoảng nào của $[0,1]$ cũng có chứa một khoảng con trong đó không có điểm nào của A cả. Xây dựng một tập không đâu trù mật có độ đo dương.

Chỉ dẫn: Lấy một dãy số a_k sao cho $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < 1$. Rút khỏi đoạn $[0,1]$ một khoảng Δ_1 cùng điểm giữa với nó và có độ dài $|\Delta_1| = a_1$, rồi rút khỏi hai đoạn còn lại của $[0,1]$ hai khoảng Δ_{11}, Δ_{12} cùng điểm giữa với mỗi đoạn ấy và có độ dài $|\Delta_{11}| = |\Delta_{12}| = a_2/2$, rồi lại rút khỏi bốn đoạn còn lại bốn khoảng $\Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}, \Delta_{24}$ cùng điểm giữa với mỗi đoạn ấy và có độ dài bằng $a_3/4$, v.v. . Tập hợp A còn lại sau quá trình trên đáp ứng yêu cầu đề ra. (Chú ý rằng $[0,1] \setminus A$ là tập mở nên muốn chứng minh A không đâu trù mật, chỉ cần chứng minh rằng mọi điểm $x \in A$ đều là điểm tụ của $[0,1] \setminus A$).

17. Cho A là một tập trong $[0,1]$ có độ đo $\geq a$ và cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n điểm tuỳ ý trên đoạn ấy. Chứng minh rằng nếu $n > \frac{2}{a}$, thì trong A ắt có hai điểm mà khoảng cách đúng bằng khoảng cách giữa hai điểm nào đó trong các $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Chỉ dẫn: Chứng minh rằng nếu các tập $x_1 + A, \ldots, x_n + A$ không có điểm chung thì sẽ mâu thuẫn ($x_i + A$ là tập các điểm có dạng $x_i + y$ với $y \in A$).

18.Chứng minh rằng trong mỗi tập có độ đo dương trên đường thẳng phải có hai điểm x, y sao cho $x - y$ hữu tỉ, và $\neq 0$.

Chỉ dẫn: Dựa vào bài tập trước.

Hàm số đo được.

19. Nếu một tập $A \subset X$ là đo được thì hàm đặc trưng của nó đo được. Ngược lại có đúng không?

20. Khi nào thì một hàm số $f(x) \equiv c$ (hằng số) là đo được trên tập A?

21. Một hàm số liên tục thì có đo được theo nghĩa Borel không?

22. Nếu f đo được thì với mọi số thực a tập $\{x : f(x) = a\}$ đo được. Ngược lại có đúng không?

23. Cho f là một hàm số đo được, hữu hạn hầu khắp nơi, xác định trên một tập A có độ đo hữu hạn. Chứng minh rằng với mỗi $\varepsilon > 0$ có thể tìm được một tập đo được $B \subset A$, sao cho hàm số f bị chặn trên B và độ đo của tập $A \setminus B$ nhỏ hơn ε.

Chỉ dẫn: Lấy B là một trong các tập $B_n = \{x : |f(x)| \leq n\}$, với n đủ lớn.

24. Nếu f là một hàm số đo được Lebesgue trên đường thẳng thì có một hàm số g đo được Borel sao cho $f(x) = g(x)$ hầu khắp nơi.

Chỉ dẫn : Với mỗi số hữu tỉ r đặt $E_r = \{x : f(x) < r\}$. Theo Định lý 8, $E_r = B_r \setminus N_r$, trong đó B_r là tập Borel và N_r có độ đo 0. Cho N là một tập Borel có độ đo 0, bao hàm $\cup_r N_r$ và xác định g bởi

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in N \\ f(x) & \text{nếu } x \notin N \end{cases}$$

25. Cho f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ và g là những hàm số đo được và hữu hạn trên một tập A có độ đo hữu hạn. Nếu f_n hội tụ theo độ đo tới f thì $f_n g$ hội tụ theo độ đo tới fg.

Chỉ dẫn: Dựa vào bài tập 23: cho trước $\varepsilon > 0$, tìm một tập $B \subset A$ sao cho g bị chặn trên B và tập $A \subset B$ có độ đo $< \varepsilon$. Xét riêng trên mỗi tập hợp B và $A \setminus B$.

26. Cho $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ là hai dãy hàm số đo được hữu hạn, trên một tập A có độ đo hữu hạn, và hội tụ theo độ đo tới f, g (tương ứng). Chứng minh rằng $f_n g_n$ hội tụ theo độ đo tới fg.

Chỉ dẫn: Xem bài tập trước, và bài tập 23.

Chương 4

TÍCH PHÂN

Trong chương này ta vận dụng quan điểm tập hợp vào một vấn đề trung tâm của giải tích là lý thuyết tích phân. Trước hết, ta sẽ xác định lớp các hàm số khả tích Riemann để thấy rằng khái niệm tích phân Riemann cổ điển không đủ dùng trong nhiều vấn đề quan trọng. Sau đó để khắc phục sự hạn chế của tích phân Riemann ta sẽ xây dựng khái niệm tích phân mới: tích phân Lebesgue.

1. SỰ HẠN CHẾ CỦA TÍCH PHÂN RIEMANN

1.1. TÍCH PHÂN RIEMANN TRONG $\mathbb{R}^k$. Cho một hàm số $f(x)$ xác định và bị chặn trên một đoạn[1]

$$\Delta = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_k) : \alpha_i \leq \xi_i \leq \beta_i,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

Ta chia mỗi cạnh $[\alpha_i, \beta_i]$ của đoạn Δ ra p_i phần bởi các điểm $\alpha_i = \gamma_{i_0} < \gamma_{i_1} < \ldots < \gamma_{i_{p_i}} = \beta_i$, và dùng các mặt phẳng $\{x : \xi_i = \gamma_{i_q}\}(i = 1, \ldots, k;\ q = 0, 1, \ldots, p_i)$ chia Δ thành $s = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$ đoạn nhỏ : $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$. Một cách chia như thế gọi là một *phân hoạch*

[1]Để dễ hình dung các sự kiện dưới đây, độc giả có thể cho $k = 3$.

σ của đoạn Δ. Cỡ của phân hoạch σ (ký hiệu: $\|\sigma\|$) là đường kính lớn nhất của các đoạn chia trong phân hoạch ấy.

Ta thành lập các tổng Darboux dưới và trên :

$$\underline{S}(\sigma) = \sum_{j=1}^{s} \underline{t}_j \, |\Delta_j|, \qquad \overline{S}(\sigma) = \sum_{j=1}^{s} \overline{t}_j \, |\Delta_j|, \tag{1}$$

trong đó

$$\underline{t}_j = \inf_{x \in \Delta_j} f(x), \qquad \overline{t}_j = \sup_{x \in \Delta_j} f(x).$$

Dĩ nhiên $-\infty < \underline{S}(\sigma) \leq \overline{S}(\sigma) < +\infty$. Nếu

$$\lim_{\|\sigma\| \to 0} \left(\overline{S}(\sigma) - \underline{S}(\sigma)\right) = 0, \tag{2}$$

thì ta nói hàm số $f(x)$ *khả tích* trên đoạn Δ và khi ấy, giá trị chung

$$I := \sup_{\sigma} \underline{S}(\sigma) = \inf_{\sigma} \overline{S}(\sigma)$$

gọi là *tích phân Riemann của* $f(x)$ *trên* Δ và được ký hiệu

$$I = (R) \int_{\Delta} f(x)dx = (R) \int_{\Delta} \cdots \int f(\xi_1, \ldots, \xi_k) d\xi_1 \ldots d\xi_k.$$

Điều kiện (2) có thể viết dưới dạng

$$D(\sigma) = \sum_{j=1}^{s} \omega_j |\Delta_j| \to 0 \quad (\|\sigma\| \to 0) \tag{3}$$

trong đó $\omega_j = \overline{t}_j - \underline{t}_j$ là dao động của $f(x)$ trong Δ_j.

Vấn đề quan trọng đặt ra là: những hàm số như thế nào thì khả tích ? Trong giáo trình giải tích cổ điển, người ta chứng minh rằng mọi hàm số liên tục, hoặc chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn, đều khả tích (R). Nhưng ngoài các hàm số đó ra, còn những hàm số nào khác cũng khả tích (R)? Đó là vấn đề mà đến đầu thế kỷ 20 Lebesgue mới giải quyết được triệt để nhờ vận dụng lý thuyết tập hợp và độ đo.

Sau đây ta sẽ trình bày cách giải quyết ấy.

1.2. DAO ĐỘNG CỦA MỘT HÀM SỐ. Ta hãy khuếch hàm số $f(x)$ ra phía ngoài Δ bằng cách qui ước $f(x) = 0$ với mọi $x \notin \Delta$. Xét một điểm bất kỳ x_0 của đoạn Δ, và cho V là một lân cận của x_0 (tức là một hình cầu tâm ở x_0). Như đã biết, dao động của hàm số $f(x)$ trong V là số

$$\Omega_f(V) = \sup_{x \in V} f(x) - \inf_{x \in V} f(x) \geq 0.$$

Khi V thắt lại tại điểm x_0 (tức là bán kính của V dần tới 0, nhưng V vẫn luôn luôn chứa x_0 làm tâm) thì đương nhiên $\Omega_f(V)$ giảm dần, và vì nó bị chặn dưới bởi số 0, nên nó dần tới một giới hạn $\omega_f(x_0) \geq 0$ nào đó. Giới hạn này

$$\omega_f(x_0) = \lim \Omega_f(V),$$

gọi là *dao động* của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0.

Bổ đề 1. *Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi $\omega_f(x_0) = 0$.*

Thật vậy, nếu $f(x)$ liên tục tại x_0 thì với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước có tồn tại một lân cận V của x_0 sao cho

$$(\forall x \in V) \quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

tức là

$$\Omega_f(V) \leq \varepsilon,$$

do đó $\omega_f(x_0) \leq \varepsilon$, và vì ε tùy ý, $\omega_f(x_0) = 0$. Ngược lại nếu $\omega_f(x_0) = 0$ thì với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước có tồn tại một lân cận V của x_0 sao cho $\Omega_f(V) < \varepsilon$, tức là $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ với mọi $x \in V$, chứng tỏ $f(x)$ liên tục tại điểm x_0. □

Bổ đề 2. *Với mọi $\varepsilon > 0$ tập $\{x \in \Delta : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$ là đóng.*

Thật vậy, giả sử $x_n \in \Delta$, $\omega_f(x_n) \geq \varepsilon$, và $x_n \to x_0$. Trong một lân cận bất kỳ V của x_0 có ít nhất một điểm x_n, và vì x_n là điểm trong của V (V mở) nên có một lân cận V_n của x_n nằm trọn trong V. Ta có $\Omega_f(V) \geq \Omega_f(V_n) \geq \omega_f(x_n) \geq \varepsilon$, vậy $\omega_f(x_0) \geq \varepsilon$. Mặt khác vì Δ đóng nên $x_0 \in \Delta$. □

Bổ đề 3. *Cho một tập đóng $Q \subset \Delta$. Nếu $\omega_f(x) < \varepsilon$ với mọi $x \in Q$ thì có một số $\delta > 0$ (chỉ phụ thuộc ε) sao cho trong mọi hình cầu $V \subset Q$ với đường kính nhỏ hơn δ ta đều có $\Omega_f(V) < \varepsilon$.*

Thật vậy, mỗi điểm $x \in Q$ có một lân cận V_x sao cho $\Omega_f(V_x) < \varepsilon$. Gọi W_x là lân cận của x có bán kính bằng $1/2$ bán kính V_x. Lớp các hình cầu W_x phủ lên tập Q, mà Q là đóng và bị chặn , cho nên theo định lý Heine-Borel, có thể trích ra một số hữu hạn hình cầu $W_{x_1}, W_{x_2}, \ldots, W_{x_p}$ vẫn phủ được Q. Cho δ là bán kính nhỏ nhất của các hình cầu này. Nếu một hình cầu $V \subset Q$ có đường kính nhỏ hơn δ thì nhất định nó phải có điểm chung với một W_{x_i} nào đó, $(i = 1, 2, \ldots, p)$, do đó phải nằm trọn trong V_{x_i}, và vì thế $\Omega_f(V) \leq \Omega_f(V_{x_i}) < \varepsilon$. □

1.3. TIÊU CHUẨN KHẢ TÍCH (R). Bây giờ ta chứng minh định lý quan trọng sau đây:

Định lý 1. (Lebesgue) *Một hàm số $f(x)$ bị chặn trên một đoạn Δ là khả tích (R) khi và chỉ khi nó liên tục h.k.n. trên đoạn Δ* (tức là tập các điểm gián đoạn của nó có độ đo 0).

Độ đo nói đây là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^k$.

Chứng minh. Gọi A là tập các điểm gián đoạn của $f(x)$, ta có, theo Bổ đề 1, $A = \{x \in \Delta : \omega_f(x) > 0\}$, và do đó

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \; A_n = \{x \in \Delta : \omega_f(x) \geq 1/n\}.$$

1. Trước hết ta hãy chứng minh rằng nếu $f(x)$ khả tích (R) thì $\mu(A) = 0$.

Muốn thế, xét một A_n tùy ý, và cho một số $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Vì $f(x)$ khả tích (R) nên có một phân hoạch σ chia đoạn Δ thành những đoạn nhỏ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$ sao cho

$$\sum_{j=1}^{s} \omega_j |\Delta_j| < \varepsilon/n,$$

trong đó ω_j là dao động của $f(x)$ trong Δ_j. Bọi B là hợp tất cả các biên của các đoạn Δ_j. Rõ ràng $\mu(B) = 0$: trong trường hợp $k = 3$ chẳng hạn, mỗi Δ_j là một hình hộp và biên của nó là các mặt của hình hộp đó; dĩ nhiên độ đo (thể tích) của biên ấy bằng 0. (Một cách tổng quát trong $\mathbb{R}^k$, độ đo của một tập bất kỳ nằm trong một mặt phẳng tọa độ $\{\xi_i = a\}$ bao giờ cũng bằng 0). Mỗi điểm $x \in A_n \setminus B$ phải là điểm trong của một đoạn Δ_j nào đó. Ta hãy chọn các đoạn Δ_j nào có chứa ít nhất một điểm $x \in A_n \setminus B$ làm điểm trong, và gọi chúng là $\Delta'_{jh} (h = 1, 2, \ldots, m)$. Dĩ nhiên $\cup_{h=1}^{m} \Delta'_{jh} \supset A_n \setminus B$ và

$$\sum_{h=1}^{m} \omega_{jh}|\Delta'_{jh}| < \varepsilon/n.$$

Song vì mỗi đoạn Δ'_{jh} chứa một điểm trong $x \in A_n$, tức là một điểm trong x với $\omega_f(x) \geq 1/n$, cho nên $\omega_{jh} \geq 1/n$. Do đó

$$\sum_{h=1}^{m} |\Delta'_{jh}| < \varepsilon,$$

chứng tỏ $\mu^*(A_n \setminus B) \leq \varepsilon$, và vì $A_n \subset (A_n \setminus B) \cup B$ nên $\mu^*(A_n) \leq \mu^*(A_n \setminus B) + \mu^*(B) = \mu^*(A_n \setminus B) \leq \varepsilon$, tức là $\mu^*(A_n) = 0$, vì $\varepsilon > 0$ tùy ý. Vậy $\mu(A_n) = 0$, và do đó $\mu(A) = 0$.

2. Ngược lại, giả sử $\mu(A) = 0$, tức là $\mu(A_n) = 0$ với mọi n. Cho trước một số $\varepsilon > 0$ tùy ý. Ta lấy một tập A_n với n đủ lớn để $1/n < \varepsilon$. Vì A_n có độ đo 0 nên nó có thể phủ được bằng một họ khoảng (mở) có thể tích tổng cộng $< \varepsilon/2$ và vì A_n bị chặn và đóng (Bổ đề 2) nên trong họ đó có một số hữu hạn khoảng : $D_1, D_2, \ldots, D_m$ cũng phủ được A_n. Bây giờ xét một phân hoạch σ bất kỳ chia đoạn Δ thành những đoạn nhỏ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$. Ta có

$$\sum_{j=1}^{s} \omega_j|\Delta_j| = \sum\nolimits_1 \omega_j|\Delta_j| + \sum\nolimits_2 \omega_j|\Delta_j|\,,$$

trong đó $\sum_1$ là tổng theo những đoạn Δ_j nào có điểm chung với ít nhất một trong các khoảng $D_1, D_2, \ldots, D_m$ và $\sum_2$ là tổng theo những đoạn còn lại. Ta hãy ước lượng riêng mỗi tổng $\sum_1$ và $\sum_2$:

a) Ta có thể chọn $\delta_1 > 0$ đủ nhỏ để cho nếu $\|\sigma\| < \delta_1$ thì các đoạn Δ_j có điểm chung với các khoảng $D_1, D_2, \ldots, D_m$ có thể tích tổng cộng nhỏ hơn $2\sum_{i=1}^{m}|D_i|$ và do đó nhỏ hơn $2(\varepsilon/2) = \varepsilon$. Khi đó, gọi K là cận trên của $|f(x)|$ trong Δ ta sẽ có:

$$\sum\nolimits_1 \omega_j|\Delta_j| < K\varepsilon.$$

b) Các đoạn Δ_j trong tổng $\sum_2$ đều nằm trong tập $Q = \Delta \setminus \cup_{i=1}^{m} D_i = \Delta \cap (\cup_{i=1}^{m} D_i)^c$ là một tập đóng (vì $\cup_{i=1}^{m} D_i$ mở) và do $\cup_{i=1}^{m} D_i \supset A_n$ nên $\omega_f(x) < 1/n$ tại mọi $x \in Q$. Vậy theo Bổ đề 3 có thể tìm được $\delta_2 > 0$ đủ nhỏ để cho nếu $\|\sigma\| < \delta_2$ thì $\omega_j < 1/n$ với mọi đoạn $\Delta_j \subset Q$. Khi ấy

$$\sum\nolimits_2 \omega_j|\Delta_j| < \frac{1}{n}\sum\nolimits_2 |\Delta_j| < \varepsilon|\Delta|.$$

Rốt cục, nếu $\|\sigma\| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ thì ta sẽ được

$$\sum \omega_j|\Delta_j| < \varepsilon(K + |\Delta|),$$

và vì $\varepsilon > 0$ tùy ý, nên điều kiện (3) được thỏa mãn. Vậy hàm số $f(x)$ là khả tích (R). □

1.4. TÍCH PHÂN RIEMANN TRÊN MỘT TẬP HỢP. Cho một tập bị chặn A trong $\mathbb{R}^k$, và lấy một đoạn bất kỳ $\Delta \supset A$. Nếu $\mathcal{X}_A(x)$ (hàm đặc trưng của A) khả tích (R) trên đoạn Δ thì tập A gọi là *đo được theo nghĩa Peano-Jordan*, hay ngắn hơn, *đo được (P.J.)* và tích phân

$$(R)\int_\Delta \mathcal{X}_A(x)dx$$

gọi là *độ đo Peano-Jordan* của tập A. Có thể chứng minh dễ dàng rằng định nghĩa này tương đương với định nghĩa đã trình bày ở Chương 3, tiết 1 về độ đo Peano-Jordan.

Dĩ nhiên tập các điểm gián đoạn của hàm số $\mathcal{X}_A(x)$ chính là biên của tập A, cho nên, theo Định lý 1:

Một tập bị chặn A là đo được (P.J.) khi và chỉ khi biên của nó có độ đo Lebesgue bằng 0.

Chẳng hạn tập các điểm hữu tỉ trong đoạn $[0, 1]$ không đo được $(P.J.)$ vì biên của nó là toàn đoạn $[0, 1]$ và do đó có độ đo $1 > 0$.

Bây giờ, cho tập A đo được $(P.J.)$ và một hàm số $f(x)$ bị chặn trên A. Ta xác định hàm số $\bar{f}(x) = f(x)$ trên A và $\bar{f}(x) = 0$ ngoài A. Nếu $\bar{f}(x)$ khả tích (R) trên một đoạn $\Delta \supset A$ thì $f(x)$ gọi là *khả tích (R) trên tập A*, và ta định nghĩa tích phân của $f(x)$ trên A là số

$$(R)\int_A f(x)ds = (R)\int_\Delta \bar{f}(x)dx.$$

Như vậy tích phân Riemann $\int_A f(x)dx$ có nghĩa khi:

1) $f(x)$ bị chặn trên A; 2) biên của A co độ đo Lebesgue bằng 0; 3) tập các điểm trong của A tại đó $f(x)$ gián đoạn có độ đo Lebesgue bằng 0.

Ta thấy rằng tích phân Riemann chỉ áp dụng cho một lớp hàm số tương đối hẹp, bao gồm những hàm số mà tập các điểm gián đoạn có thể "bỏ qua được" (có độ đo 0). Còn các hàm số đo được tổng quát thì nói chung có thể không khả tích (R). Ngay hàm số Dirichlet ($f(x)$ bằng 0 tại những điểm vô tỉ của đoạn $[0,1]$, bằng 1 tại những điểm hữu tỉ) cũng không khả tích (R), vì với mọi phân hoạch σ ta đều có $\underline{S}_{(\sigma)} = 0$, $\overline{S}_{(\sigma)} = 1$. Đó là một sự hạn chế đáng kể của khái niệm tích phân Riemann, vì trong toán học hiện đại (lý thuyết và ứng dụng) rất thường gặp những hàm số gián đoạn đòi hỏi phải lấy tích phân theo một nghĩa nào đó.

Nhược điểm của tích phân Riemann bộc lộ rõ nhất trong những vấn đề qua giới hạn: nói chung dùng tích phân Riemann thì phép toán này phải thận trọng vì không phải luôn luôn thực hiện được. Chẳng hạn, trong không gian $\mathbb{C}^L_{[a,b]}$, gồm các hàm số liên tục $x(t)$ trên đoạn $[a,b]$ với metric

$$P(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|dt,$$

một dãy cơ bản không nhất thiết hội tụ (không gian không đủ), và dù có thêm vào không gian này những hàm số gián đoạn khả tích (R) thì cũng không cải thiện được tình trạng ấy.

Ngoài ra còn một vấn đề nữa mà tích phân Riemann không đủ để giải quyết, là việc tìm lại một hàm liên tục $F(x)$ mà ta đã biết đạo hàm $F'(x) = f(x)$ của nó (đây là nói hàm số một biến trên đoạn $[a,b]$): nếu $f(x)$ khả tích (R) thì ta biết rằng $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, nhưng nếu $f(x)$ không khả tích (R) thì thế nào?

Để khắc phục tất cả các nhược điểm đó, cần phải xây dựng một khái niệm tích phân tổng quát hơn tích phân Riemann: đó là vấn đề sẽ giải quyết trong các tiết sau.

2. TÍCH PHÂN LEBESGUE

Phân tích cách xây dựng tích phân Riemann ta thấy rằng trong quá trình chia nhỏ đoạn Δ (miền biến thiên của x) khi các đoạn chia này nhỏ dần thì, muốn cho $\underline{S}_{(\sigma)} - \overline{S}_{(\sigma)}$ tiến tới 0, đương nhiên các số $\underline{t}_j$ và

$\overline{t}_j$ phải sát dần nhau, tức là dao động ω_j phải nhỏ dần. Do đó muốn tích phân tồn tại, hàm số phải khá liên tục, hay nói chính xác hơn, phải liên tục h.k.n.

Đó là nguyên nhân đơn giản giải thích tại sao tích phân Riemann không áp dụng được cho những hàm số quá ư gián đoạn. Để vượt qua sự hạn chế ấy, Lebesgue đề ra ý kiến độc đáo là khi chia nhỏ đoạn Δ, không nên nhóm lại các điểm gần nhau trên Δ, mà nên nhóm lại các điểm tại đấy *giá trị* của hàm số gần nhau. Tức là không nên chia Δ ra từng *đoạn* nhỏ, mà nên chia nó ra từng *tập hợp* nhỏ, mỗi tập bao gồm những điểm ứng với những giá trị gần nhau của $f(x)$. Theo quan điểm cơ bản đó Lebesgue đã xây dựng được một khái niệm tích phân rất tổng quát, áp dụng cho tất cả các hàm số đo được và bị chặn.

Phương pháp xây dựng tích phân trình bày dưới đây, về thực chất, dựa trên ý đó.

2.1. TÍCH PHÂN CÁC HÀM ĐƠN GIẢN. Trở lại cách xây dựng tích phân Riemann, ta để ý rằng các tổng Darboux $\underline{S}_{(\sigma)}$ và $\overline{S}_{(\sigma)}$ ứng với một sự phân hoạch σ (xem (1) ở tiết 1) có thể coi là tích phân của những hàm bậc thang[2] cụ thể là

$$\underline{S}_{(\sigma)} = \int_{\Delta} \underline{f}_{(\sigma)}(x)dx, \quad \overline{S}_{(\sigma)} = \int_{\Delta} \overline{f}_{(\sigma)}(x)dx,$$

với

$$\underline{f}_{(\sigma)}(x) = \sum_{j=1}^{s} \underline{t}_j \chi_{\Delta_j}(x), \quad \overline{f}_{(\sigma)}(x) = \sum_{j=1}^{s} \overline{t}_j \chi_{\Delta_j}(x).$$

Ta có $\underline{f}_{(\sigma)}(x) \le f(x) \le \overline{f}_{(\sigma)}(x)$ và nếu $f(x)$ có tích phân thì tích phân ấy bằng giới hạn các tích phân của những hàm bậc thang $\underline{f}_{(\sigma)}(x)$ và $\overline{f}_{(\sigma)}(x)$. Thành thử quá trình phân hoạch miền tích phân và thành lập các tổng Darboux chẳng qua cũng là quá trình tính các tích phân của những hàm bậc thang xấp xỉ hàm số $f(x)$ rồi tiến dần tới giới hạn.

Phương pháp đó có thể áp dụng để xây dựng tích phân Lebesgue. Có điều là để nhóm các điểm tại đấy $f(x)$ lấy những giá trị gần nhau, ta sẽ chia miền tích phân ra thành những tập nhỏ (chứ không phải thành

[2] Hàm bậc thang là một hàm đơn giản mà các tập trên đó giá trị của hàm không đổi là những đoạn.

những đoạn nhỏ), và do đó, thay cho những hàm bậc thang, ta sẽ dùng những hàm đơn giản để xấp xỉ $f(x)$.

Như vậy, trước hết hãy định nghĩa tích phân của những hàm đơn giản.

Trong một không gian X, với một σ-đại số $\mathcal{F}$ và một độ đo μ trên $\mathcal{F}$, cho một tập A đo được (tức là $\in \mathcal{F}$), và một hàm đơn giản không âm trên tập A:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}(x), \tag{4}$$

trong đó các tập A_i đo được, rời nhau, và

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = A.$$

Nếu mỗi A_i là một đoạn Δ_i trong $\mathbb{R}^k$ thì tích phân của $f(x)$ là số $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\Delta_i|$. Trong trường hợp tổng quát khi mỗi A_i là một tập đo được thì tự nhiên ta thay $|\Delta_i|$ bằng $\mu(A_i)$. Vì vậy ta hiểu tích phân của hàm đơn giản không âm $f(x)$ trên tập A đối với độ đo μ là số

$$\int f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Ví dụ: Nếu $f(x)$ là hàm số Dirichlet trên đoạn $[0, 1]$ thì tích phân của $f(x)$ trên đoạn $[0, 1]$ là $0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$ (để ý rằng hàm số này không khả tích (R)).

Cùng một hàm đơn giản $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng (4) theo nhiều cách, chẳng hạn

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}(x) = \sum_{j=1}^{s} \beta_i \mathcal{X}_{B_j}(x).$$

Dễ thấy rằng giá trị của tích phân không phụ thuộc cách biểu diễn. Thật vậy

$$A_i = A_i \cap A = A_i \cap (\cup_{j=1}^{s} B_j) = \cup_{j=1}^{s} (A_i \cap B_j),$$

trong đó các tập $A_i \cap B_j$ rời nhau, cho nên

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [\sum_{j=1}^{s} \mu(A_i \cap B_j)]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j),$$

và cũng như thế

$$\sum_{j=1}^{s} \beta_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{s} \beta_j \mu(B_j \cap A_i).$$

Nhưng nếu $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ thì $\alpha_i = \beta_j$ vì khi đó, gọi x_0 là một phần tử của $A_i \cap B_j$ ta có $f(x_0) = \alpha_i$ (do $x_0 \in A_i$), $f(x_0) = \beta_j$ (do $x_0 \in B_j$). Do đó

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mu(B_j).$$

Vậy tích phân của một hàm đơn giản không âm bao giờ cũng được xác định một cách duy nhất. Từ đây, để cho gọn, ta sẽ dùng ký hiệu $\int_A f$ thay cho $\int_A f(x)d\mu$, khi không sợ nhầm lẫn.

Tính chất sau đây hiển nhiên:

Nếu hai hàm đơn giản $f, g \geq 0$ và $f \leq g$ trên tập A thì

$$\int_A f \leq \int_A g.$$

Vả lại ta có:

Bổ đề 4. *Nếu hai dãy hàm đơn giản $f_n, g_n \geq 0$, đơn điệu tăng (tức là $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$; $g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots$) và nếu $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$ thì*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n.$$

Thật vậy, giả sử trước hết rằng giới hạn f của f_n là một hàm đơn giản:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x).$$

Ta hãy chứng minh rằng

$$\int_A f_n \to \int_A f. \tag{5}$$

Chọn một số t bất kỳ trong khoảng $(0, 1)$, và cho

$$A_{i,n} = \{x \in A_i : \ f_n(x) \geq t\alpha_i\}.$$

Vì $f_n \leq f_{n+1}$ nên $A_{i,n} \subset A_{i,n+1}$. Hơn nữa ta có

$$A_i = \cup_{n=1}^{\infty} A_{i,n} \ ,$$

vì nếu $x \in A_i$ thì $f(x) = \alpha_i$, do đó với n đủ lớn $f_n(x) \geq t\alpha_i$ tức $x \in A_{i,n}$. Vậy (Chương 3, Định lý 3)

$$\mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{i,n}).$$

Đặt $\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} t\alpha_i \chi_{A_{i,n}}(x)$, ta có $\varphi_n \leq f_n \leq f$, cho nên

$$\int_A \varphi_n \leq \int_A f_n \leq \int_A f.$$

Nhưng khi $n \to \infty$

$$\int_A \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} t\alpha_i \mu(A_{i,n}) \to \sum_{i=1}^{n} t\alpha_i \mu(A_i) = t \int_A f.$$

Vậy

$$t \int_A f \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n \leq \int_A f,$$

và cho $t \to 1$, ta được (5).

Bây giờ, tạm cố định một số tự nhiên m, ta hãy đặt $h_n = \min\{f_n, g_m\}$. Dĩ nhiên h_n cũng là hàm đơn giản và ≥ 0. Vì $f_n \nearrow \lim_{n\to\infty} g_n \geq g_m$, nên $h_n \nearrow g_m$ (khi $n \to \infty$). Vậy theo trên

$$\int_A h_n \nearrow \int_A g_m.$$

Nhưng vì $h_n \leq f_n$ nên

$$\int_A h_n \leq \int_A f_n \ ,$$

và cho $n \to \infty$ ta có

$$\int_A g_m \leq \lim_{n\to\infty} \int_A f_n ,$$

rồi cho $m \to \infty$ ta lại được

$$\lim_{m\to\infty} \int_A g_m \leq \lim_{n\to\infty} \int_A f_n.$$

Bằng cách tương tự ta chứng minh bất đẳng thức ngược lại, từ đó suy ra tính chất đã phát biểu. □

2.2. TÍCH PHÂN CÁC HÀM ĐO ĐƯỢC BẤT KỲ. Ta lần lượt xét trường hợp các hàm số không âm, và trường hợp hàm số có dấu thay đổi .

I. $f(x) \geq 0$ *trên tập* A. Theo Định lý 13, Chương 3, có một dãy hàm số đơn giản $f_n \geq 0$, đơn điệu tăng và hội tụ tới f. Ta gọi *tích phân* của $f(x)$ trên tập A đối với độ đo μ là số (hữu hạn hay vô cực)

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu.$$

Dựa vào Bổ đề 4, tích phân đó được xác định một cách duy nhất và không phụ thuộc cách chọn dãy hàm f_n.

II. $f(x)$ *có dấu bất kỳ trên tập* A. Ta đặt

$$f = f^+ - f^-$$

với $f^+ = \max\{f, 0\} \geq 0$, $f^- = \max\{-f, 0\} \geq 0$. Nếu hiệu số $\int_A f^+ - \int_A f^-$ có nghĩa (tức là không có dạng $\infty - \infty$) thì ta gọi nó là *tích phân* của $f(x)$ trên tập A đối với độ đo μ:

$$\int_A f(x)d\mu = \int_A f^+(x)d\mu - \int_A f^-(x)d\mu ,$$

và nếu tích phân ấy hữu hạn thì ta nói $f(x)$ *khả tích*.

Khi $X = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{F} = \mathcal{L}^k$, $\mu = \mu^k$ (độ đo Lebesgue) thì tích phân định nghĩa như trên thường gọi là *tích phân Lebesgue* và được ký hiệu

$$\int_A f(x)d\mu(x) \text{ hoặc } (L)\int_A f(x)d(x),$$

$$\text{hoặc } (L)\int_\Delta \cdots \int f(\xi_1, \ldots, \xi_k)d\xi_1 \ldots d\xi_k.$$

Có thể thấy ngay rằng

$$\int_A c = c\mu(A) \ (c: \text{ hằng số}),$$

$$\int_A \alpha\mathcal{X}_B(x) = \int_A \alpha\mathcal{X}_{B\cap A}(x) = \alpha\mu(B \cap A),$$

$$\int_A \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathcal{X}_{B_i}(x) = \int \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathcal{X}_{B_i}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(B_i \cap A).$$

Vả lại:

Định lý 2. (i) *Nếu* $\mu(A) = 0$ *và* f *đo được thì* $\int_A f = 0$.

(ii) *Nếu* $\mu(A) < \infty$, f *đo được và bị chặn trên* A, *thì* f *khả tích trên* A.

Chứng minh. Rõ ràng chỉ cần chứng minh cho trường hợp $f \geq 0$. Nếu $\mu(A) = 0$ thì với mọi dãy hàm đơn giản $f_n \nearrow f$ ta có $\int_A f_n = 0$ cho nên $\int_A f = 0$.

Nếu $\mu(A) < \infty$ và $f(x) < K$ với mọi $x \in A$ thì với mọi dãy hàm đơn giản $f_n \nearrow f$ ta có $f_n \leq K$, cho nên

$$\int_A f_n \leq \int_A K = K\mu(A) < \infty,$$

từ đó

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \leq K\mu(A). \qquad \square$$

Theo định lý này, nói riêng, mọi hàm số bị chặn và liên tục h.k.n. trên mọi đoạn $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ đều khả tích (L). Như vậy lớp các hàm số khả tích (L) trong $\mathbb{R}^k$ bao gồm tất cả các hàm số khả tích (R) và ngoài ra tất nhiên còn bao gồm nhiều hàm số khác nữa (như hàm số Dirichlet chẳng hạn).

2.3. CÁC TÍNH CHẤT SƠ CẤP. Sau đây sẽ luôn luôn giả thiết các hàm số và tập được nói đến là đo được.

I. Cộng tính. *Nếu* $A \cap B = \emptyset$ *thì* $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$, *miễn là vế phải hoặc trái của đẳng thức này có nghĩa.*

Ta lần lượt xét các trường hợp:

1. f là đơn giản trên tập $A \cup B$.

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i},\ \cup_i E_i = A \cup B.$$

Ta có $E_i = (A \cap E_i) \cup (B \cap E_i)$ và vì A, B rời nhau nên $A \cap E_i$ và $B \cap E_i$ cũng thế. Vậy

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A \cap E_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(B \cap E_i) \\ &= \int_A f + \int_B f\,.\end{aligned}$$

2. $f \geq 0$ trên tập $A \cup B$. Cho f_n là một dãy hàm đơn giản ≥ 0 và $\nearrow f$, ta có, theo trên,

$$\int_{A\cup B} f_n = \int_A f_n + \int_B f_n,$$

và cho $n \to \infty$ ta được đẳng thức cần chứng minh.

3. f bất kỳ. Ta có, theo trường hợp 2 :

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f^+ &= \int_A f^+ + \int_B f^+, \\ \int_{A\cup B} f^- &= \int_A f^- + \int_B f^-.\end{aligned}$$

Nếu $\int_{A\cup B} f$ có nghĩa thì vế trái của một trong hai đẳng thức trên là hữu hạn: nếu chẳng hạn vế trái của đẳng thức thứ nhất hữu hạn thì cả hai tích phân ở vế phải của nó cũng hữu hạn và các hiệu số

$$\int_A f^+ - \int_A f^-, \quad \int_B f^+ - \int_B f^-$$

sẽ có nghĩa. Khi ấy, trừ từng vế các đẳng thức trên ta sẽ được đẳng thức cần chứng minh. Nếu $\int_A f + \int_B f$ có nghĩa thì cách suy luận cũng tương tự. □

Hệ quả 1. *Nếu $E \subset A$ và $\int_A f$ tồn tại thì $\int_E f$ cũng tồn tại ; nếu f khả tích trên A thì f cũng khả tích trên E.*

Hệ quả 2. *Nếu $\mu(B) = 0$ thì $\int_{A\cup B} f = \int_A f$.*

Nếu A, B rời nhau thì điều này là kết quả trực tiếp của điều vừa chứng minh ở trên và Định lý 2 (phần (i)) ; nếu A, B không rời nhau thì ta viết $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ và vì $\mu(B \setminus A) = 0$ nên ta trở lại trường hợp trên. □

II. Bảo toàn thứ tự. 1. *Nếu $f \sim g$ thì $\int_A f = \int_A g$. Nói riêng nếu $f = 0$ h.k.n. trên A thì $\int_A f = 0$.*

Thật vậy, đặt $B = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$ ta có $\mu(A \setminus B) = 0$, nên theo Hệ quả 2 vừa rồi:

$$\int_A f = \int_B f, \quad \int_A g = \int_B g,$$

từ đó suy ra

$$\int_A f = \int_A g. \qquad \square$$

Tính chất trên cho thấy rằng việc thay đổi giá trị của hàm số trên một tập có độ đo 0 không ảnh hưởng giá trị của tích phân.

Vì lý do ấy, nếu một hàm số f đo được trên một tập $A' \subset A$, với $\mu(A \setminus A') = 0$ thì dù f không xác định trên $A \setminus A'$, ta vẫn định nghĩa

$$\int_A f d\mu = \int_{A'} f d\mu.$$

2. *Nếu $f \leq g$ trên A thì $\int_A f \leq \int_A g$. Nói riêng nếu $f \geq 0$ trên A thì $\int_A f \geq 0$.*

Thật vậy, nếu f, g đơn giản trên A thì điều đó hiển nhiên. Nếu $f, g \geq 0$ trên A thì có những dãy hàm đơn giản, không âm $f_n \nearrow f$ và $g_n \nearrow g$, sao cho $g_n \leq f_n$ (chẳng hạn chọn f_n và g_n như trong chứng minh Định lý 13, Chương 3). Khi ấy

$$\int_A f_n \leq \int_A g_n ,$$

và qua giới hạn ta sẽ được bất đẳng thức đòi hỏi. Sau cùng nếu f, g tùy ý thì $f^+ \leq g^+$, $f^- \geq g^-$ nên

$$\int_A f^+ \leq \int_A g^+, \int_A f^- \geq \int_A g^-,$$

và trừ từng vế ta sẽ được điều cần chứng minh. □

Hệ quả 1. *Nếu f khả tích trên tập A thì nó phải hữu hạn h.k.n. trên tập ấy.*

Thật vậy, cho $B = \{x \in A : f(x) = +\infty\}$. Theo Hệ quả 1 của cộng tính thì f cũng khả tích trên B, nhưng bất kỳ K lớn bao nhiêu ta cũng có $f(x) > K$ trên B nên theo trên

$$\int_B f \geq K\mu(B).$$

Bất đẳng thức này chỉ có thể đúng với mọi K nếu $\mu(B) = 0$. Bằng cách tương tự ta cũng chứng minh rằng tập $C = \{x \in A : f(x) = -\infty\}$ có độ đo 0. □

Hệ quả 2. *Nếu $f \geq 0$ trên A và $\int_A f = 0$ thì $f = 0$ h.k.n. trên A.*

Thật vậy, đặt $B_n = \left\{x \in A : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$ ta có

$$0 = \int_A f = \int_{A\setminus B_n} f + \int_{B_n} f \geq \int_{B_n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\mu(B_n)\,,$$

cho nên $\mu(B_n) = 0$. Nhưng

$$B = \{x \in A :\ f(x) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} B_n\,,$$

vậy $\mu(B) = 0$. □

III. Tuyến tính. 1) $\int_A cf = c\int_A f$ (c là hằng số).

Nói riêng $\int_A (-f) = -\int_A f$.

Nếu f đơn giản thì điều đó hiển nhiên. Nếu $f \geq 0$ thì có một dãy hàm đơn giản không âm $f_n \nearrow f$. Đương nhiên cf_n cũng đơn giản và

a) nếu $c \geq 0$ thì $cf_n \nearrow cf$ và do $\int_A cf_n = c\int_A f_n$ nên qua giới hạn ta sẽ được $\int_A cf = c\int_A f$.

b) nếu $c < 0$ thì $cf \leq 0$ nên $(cf)^+ = 0$, $(cf)^- = -cf$ và theo định nghĩa $\int_A cf = 0 - \int_A (-cf)$. Nhưng theo trên $\int_A (-cf) = -c\int_A f$, vậy $\int_A cf = c\int_A f$.

Trong trường hợp tổng quát $f = f^+ - f^-$ và

$$(cf)^+ = cf^+,\ (cf)^- = cf^- \text{ nếu } c \geq 0,$$
$$(cf)^+ = -cf^-,\ (cf)^- = -cf^+ \text{ nếu } c < 0,$$

từ đó suy ra ngay kết quả cần thiết. □

2) $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$, *miễn là vế phải có nghĩa.*

Trước hết để ý rằng tại một điểm $x \in A$ có thể xảy ra tình trạng $f(x) = +\infty$, $g(x) = -\infty$, hoặc $f(x) = -\infty$, $g(x) = +\infty$: khi đó

$f(x) + g(x)$ không có nghĩa. Thành thử $f + g$ có thể không được xác định trên một tập $B \subset A$. Tuy nhiên, dễ thấy rằng $\mu(B) = 0$, nghĩa là $f + g$ xác định h.k.n. trên A.

Thật vậy, theo giả thiết , biểu thức

$$\int_A f + \int_A g = (\int_A f^+ - \int_A f^-) + (\int_A g^+ - \int_A g^-)$$

có nghĩa, cho nên nếu $\int_A f^+ = +\infty$ thì phải có $\int_A f^- < +\infty$ (để cho $\int_A f$ có nghĩa), đồng thời $\int_A g^- < +\infty$ (để cho $\int_A g$ có nghĩa, và do đó $\int_A f + \int_A g$ có nghĩa); tương tự như thế, nếu $\int_A g^+ = +\infty$ thì cả $\int_A f^-$ và $\int_A g^-$ phải hữu hạn. Thành thử hoặc $\int_A f^+$ và $\int_A g^+$ cùng hữu hạn, hoặc $\int_A f^-$ và $\int_A g^-$ cùng hữu hạn. Chẳng hạn, giả sử $\int_A f^+$ và $\int_A g^+$ cùng hữu hạn: khi ấy, theo Hệ quả 1 của tính chất bảo toàn thứ tự, f^+ và g^+ phải hữu hạn h.k.n. trên A, nói khác đi $f(x)$ và $g(x)$ phải $< +\infty$, và do đó $f(x) + g(x)$ được xác định h.k.n. trên A.

Ta hãy chia tập A ra thành 6 tập rời nhau:

$A_1 = \{f \geq 0,\ g \geq 0,\ f + g \geq 0\}$, $A_2 = \{f \geq 0,\ g < 0,\ f + g \geq 0\}$,
$A_3 = \{f \geq 0,\ g < 0,\ f + g < 0\}$, $A_4 = \{f < 0,\ g < 0,\ f + g < 0\}$,
$A_5 = \{f < 0,\ g \geq 0,\ f + g < 0\}$, $A_6 = \{f < 0,\ g \geq 0,\ f + g \geq 0\}$.

Dựa vào cộng tính của tích phân chỉ cần chứng minh rằng

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$$

khi $E = A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Nhưng nếu f, g đơn giản thì điều này là hệ quả trực tiếp của định nghĩa tích phân các hàm đơn giản, và nếu $f \geq 0,\ g \geq 0$ thì điều đó có thể suy ra bằng cách qua giới hạn trong đẳng thức $\int_E (f_n + g_n) = \int_E f_n + \int_E g_n$ trong đó f_n, g_n là những hàm đơn giản hội tụ tới f và g. Ta hãy xét các trường hợp khác, chẳng hạn $f \geq 0,\ g < 0,\ f + g < 0$ (tức là $E = A_3$). Khi ấy, vì $f \geq 0$ và

$-(f+g) \geq 0$ nên theo như vừa mới chứng minh

$$\int_E [f-(f+g)] = \int_E f + \int_E -(f+g)\,,$$

và chú ý tính chất 1) ta có:

$$-\int_E g = \int_E f - \int_E (f+g)\,,$$

từ đó suy ra ngay đẳng thức đòi hỏi. □

IV. Khả tích. 1) *Nếu* $\int_A f$ *có nghĩa thì* $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

Thật vậy,

$$|\int_A f| = |\int_A f^+ - \int_A f^-| \leq \int_A f^+ + \int_A f^- =$$

$$= \int_A (f^+ + f^-) = \int_A |f|. \qquad \square$$

2) *f khả tích khi và chỉ khi $|f|$ khả tích.*

Vì nếu $|f|$ khả tích, tức là $\int_A |f| < \infty$ thì theo 1) $|\int_A f| < \infty$, tức là f khả tích. Ngược lại nếu f khả tích tức là $|\int_A f^+ - \int_A f^-| < \infty$ thì cả $\int_A f^+$ và $\int_A f^-$ đều phải hữu hạn, cho nên $\int_A |f| = \int_A f^+ + f^- < \int_A \infty$, tức là $|f|$ khả tích. □

3) *Nếu $|f| \leq g$ h.k.n. trên A và g khả tích thì f cũng khả tích.*

Vì $|f| \leq g$ kéo theo $\int_A |f| \leq \int_A g$, nên nếu g khả tích thì $|f|$, và do đó f cũng khả tích. □

4) *Nếu f, g khả tích thì $f \pm g$ cũng khả tích. Nếu f khả tích, g bị chặn thì fg cũng khả tích.*

Vì $\int_A (f \pm g) = \int_A f \pm \int_A g$ nên $\int_A (f \pm g) < \infty$ nếu $\int_A f$ và $\int_A g$ hữu hạn.

Giả sử $|g| \leq K$. Ta có $|fg| \leq K|f|$, cho nên $\int_A |fg| \leq \int_A K|f| = K\int_A |f|$. Vậy nếu f (tức là do đó $|f|$) khả tích thì $|fg|$ (tức là do đó fg) khả tích. □

3. QUA GIỚI HẠN DƯỚI DẤU TÍCH PHÂN

3.1. HỘI TỤ ĐƠN ĐIỆU. Vấn đề đặt ra là: trong những điều kiện nào ta có

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n \ ?$$

Đối với tích phân Riemann trong $\mathbb{R}^k$ những điều kiện này thường liên quan tới tính hội tụ đều, và nói chung khá nặng nề. Trái lại đối với tích phân Lebesgue những điều kiện ấy rất rộng rãi, do đó nhiều quá trình qua giới hạn khó khăn đối với tích phân Riemann được giải quyết ở đây rất nhẹ nhàng.

Định lý 3 *(hội tụ đơn điệu). Nếu* $0 \leq f_n \nearrow f$ *thì*

$$\int_A f_n \to \int_A f.$$

Chứng minh. Nếu các hàm f_n đơn giản thì đây chẳng qua là định nghĩa tích phân của f. Ta hãy xét trường hợp các hàm f_n bất kỳ (đo được). Với mỗi n có một dãy hàm đơn giản, không âm, $g_m^{(n)} \nearrow f_n$. Vì $f_{n+1} \geq f_n$ nên có thể coi như $g_m^{(n+1)} \geq g_m^{(n)}$. Vậy với $k \leq n$

$$g_n^{(k)} \leq g_n^{(n)} \leq f_n, \quad \int_A g_n^{(k)} \leq \int_A g_n^{(n)} \leq \int_A f_n.$$

Cho $n \to \infty$ ta có :

$$f_k \leq \lim\ g_n^{(n)} \leq f, \quad \int_A f_k \leq \int_A \lim\ g_n^{(n)} \leq \lim \int_A f_n\ ,$$

và cho $k \to \infty$ ta lại được

$$f \leq \lim\ g_n^{(n)} \leq f, \quad \lim \int_A f_k \leq \int_A \lim g_n^{(n)} \leq \lim \int_A f_n\ ,$$

chứng tỏ rằng

$$\lim g_n^{(n)} = f,\ \lim \int_A f_n = \int_A f. \qquad \square$$

Định lý 4. *Nếu $f_n \nearrow f$ và f_1 khả tích thì*

$$\int_A f_n \to \int_A f.$$

Chứng minh. Ta có $0 \le f_n - f_1 \nearrow f - f_1$ cho nên theo định lý trước

$$\int_A (f_n - f_1) \to \int_A (f - f_1),$$

và vì $\int_A f_1 < \infty$ (giả thiết), ta có thể viết

$$\int_A (f_n - f_1) + \int_A f_1 \to \int_A (f - f_1) + \int_A f_1\,,$$

từ đó áp dụng tính chất III. 2) ta suy ra kết quả cần thiết. $\square$

Chú ý rằng nếu $f_n \nearrow f$ và f khả tích định lý vẫn đúng.

Hệ quả 1. *Nếu $g_n \ge 0$ trên A thì* $\displaystyle\int_A \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A g_n.$

Thật vậy, đặt $f_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k$ ta có $0 \le f_n \nearrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ cho nên theo Định lý 3

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim f_n = \int \sum_{k=1}^{\infty} g_k.$$

Nhưng

$$\int f_n = \int \sum_{k=1}^{n} g_k = \sum_{k=1}^{n} \int g_k \to \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k\,,$$

Vậy

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n. \qquad \square$$

Hệ quả 2. *Nếu* $g_n \geq 0$ *trên* A *và* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_A g_n < \infty$ *thì* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty$ *h.k.n. trên* A *và hàm số* $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *khả tích trên* A.

Thật vậy, theo Hệ quả 1 và giả thiết $\int \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n < \infty$, tức là hàm số $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ khả tích, cho nên $g(x)$ hữu hạn h.k.n. □

3.2. HỘI TỤ CHẶN

Bổ đề Fatou. *Nếu* $f_n \geq 0$ *trên* A *thì*

$$\int_A \varliminf_{n\to\infty} f_n \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n.$$

Chứng minh. Đặt $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$ ta có $0 \leq g_n \nearrow \varliminf f_n$, cho nên theo Định lý 3

$$\lim \int g_n = \int \varliminf f_n.$$

Nhưng $g_n \leq f_n$ nên $\int g_n \leq \int f_n$ và

$$\lim \int g_n \leq \varliminf \int f_n,$$

do đó suy ra bất đẳng thức đòi hỏi. □

Chú ý. 1. Nếu $f_n \geq g$, g khả tích trên A thì Bổ đề Fatou cũng đúng.

Thật vậy, khi đó $f_n - g \geq 0$ cho nên

$$\int \varliminf(f_n - g) \leq \varliminf \int (f_n - g) \text{ và vì } \int g < \infty \text{ ta có}$$

$$\int \varliminf(f_n - g) + \int g \leq \varliminf\left(\int (f_n - g) + \int g\right),$$

hay, theo tính chất III.2,

$$\int (\underline{\lim}(f_n - g) + \int g \leq \underline{\lim} \int [(f_n - g) + g] ,$$

tức là

$$\int (\underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int f_n .$$

2. Nếu $f_n \leq g$, g khả tích trên A thì

$$\int_A \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_A f_n .$$

Thật vậy, khi ấy $-f_n \geq -g$, cho nên

$$\int \underline{\lim}(-f_n) \leq \underline{\lim} \int (-f_n) ,$$

$$\int -\overline{\lim} f_n \leq -\overline{\lim} \int f_n ,$$

từ đó suy ra kết quả đã phát biểu.

Định lý 5. *(hội tụ chặn). Nếu* $|f_n| \leq g$, g *khả tích và* $f_n \to f$ *(h.k.n. hay theo độ đo) trên* A *thì*

$$\int_A f_n \to \int_A f .$$

Chứng minh. Giả sử $f_n \to f$ h.k.n. trên A. Ta có $-g \leq f_n \leq g$, g khả tích, vậy theo Bổ đề Fatou áp dụng cho các hàm $g - f_n \geq 0$ và $f_n + g \geq 0$:

$$\int \overline{\lim} f_n \geq \overline{\lim} \int f_n , \quad \int \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int f_n .$$

Nhưng $\overline{\lim} f_n = \underline{\lim} f_n = f$, nên

$$\int f \geq \lim \int f_n \geq \underline{\lim} \int f_n \geq \int f ,$$

từ đó suy ra

$$\lim \int f_n = \int f .$$

Bây giờ xét trường hợp $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Theo định nghĩa giới hạn trên, có một dãy n_k sao cho $\int f_{n_k} \to \overline{\lim} \int f_n$, va theo tính chất của sự hội tụ theo độ đo, có một dãy n_{k_i} sao cho $f_{n_{k_i}} \to f$ h.k.n. Vậy theo phần đã chứng minh,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int f_n = \lim_{k\to\infty} \int f_{n_k} = \lim_{i\to\infty} \int f_{n_{k_i}} = \int f.$$

Cũng theo cách đó ta thấy rằng

$$\underline{\lim} \int f_n = \int f,$$

cho nên

$$\lim \int f_n = \int f. \qquad \square$$

Hệ quả 1. *Nếu $|f_n| \le K$ (hằng số). $f_n \to f$ (h.k.n. hoặc theo độ đo) trên A và $\mu(A) < \infty$ thì*

$$\int_A f_n \to \int_A f.$$

Thật vậy, chỉ việc áp dụng định lý trước, với $g(x) \equiv K$ tức là $\int_A g = K\mu(A) < \infty$. $\square$

Hệ quả 2. *Trong không gian $\mathbb{R}^k$, nếu một hàm số $f(x)$ là khả tích (R) trên một đoạn $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ thì nó cũng khả tích (L) và hai tích phân Riemann và Lebesgue bằng nhau :*

$$(L) \int_\Delta f = (R) \int_\Delta f.$$

Chứng minh. Nếu $f(x)$ khả tích (R) trên đoạn Δ thì theo Định lý 1, $f(x)$ bị chặn và liên tục h.k.n. trên Δ. Xét một dãy phân hoạch σ_n của đoạn Δ với $\|\sigma_n\| \to 0$. Cho S_n là tổng Darboux dưới ứng với phân hoạch σ_n

$$S_n = \sum_{j=1}^{s_n} t_j^{(n)} |\Delta_j^{(n)}|, \quad t_j^{(n)} = \inf_{x \in \Delta_j^{(n)}} f(x).$$

Đặt $f_n(x) = \sum_{j=1}^{s_n} t_j^{(n)} \chi_{\Delta_j^{(n)}}(x)$, ta thấy rõ $f_n \le K = \sup |f(x)|$, và $f_n(x) \to f(x)$ h.k.n. trên Δ, vì tại mỗi điểm liên tục của $f(x)$, với n đủ lớn, thì $\|\sigma_n\|$, và do đó đoạn $\Delta_j^{(n)}$ chứa x, sẽ đủ nhỏ để $|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - t_j^{(n)}|$ nhỏ hơn bất cứ số $\varepsilon > 0$ nào cho trước. Do đó theo Hệ quả 1

$$S_n = \int_\Delta f_n \to (L) \int_\Delta f$$

Nhưng mặt khác $S_n \to (R) \int_\Delta f$. Vậy $(L) \int_\Delta f = (R) \int_\Delta f$. □

Hệ quả này cho thấy rằng khái niệm tích phân Lebesgue thật sự mở rộng khái niệm tích phân Riemann. Điều cần lưu ý là tích phân nói đây là tích phân chân chính (chứ không phải tích phân suy rộng). Chẳng hạn các tích phân $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ $(\alpha < 1)$ và $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ $(\alpha > 1)$ không tồn tại theo nghĩa Riemann chân chính (chỉ tồn tại theo nghĩa suy rộng) nhưng tồn tại theo nghĩa Lebesgue chân chính. Tích phân $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ không tồn tại theo nghĩa Riemann chân chính, cũng không tồn tại theo nghĩa Lebesgue chân chính, mà chỉ tồn tại theo nghĩa suy rộng (bằng $\pi/2$).

3.3. TÍCH PHÂN COI NHƯ MỘT HÀM TẬP HỢP. Giả sử có một hàm số $f(x)$ khả tích trên một không gian X đối với một độ đo μ xác định trên một σ-đại số $\mathcal{F}$ trong X. Ứng với mỗi tập $A \in \mathcal{F}$ có thể xác định số

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu \,. \tag{6}$$

Như thế ta có một hàm tập $\lambda(A)$. Hàm tập này cũng gọi là *tích phân bất định* $f(x)$.

Định lý 6. *Hàm tập $\lambda(A)$ là σ-cộng tính, nghĩa là nếu: $A = \cup_{n=1}^\infty A_n$, các $A_n \in \mathcal{F}$, rời nhau và nếu có $\int_A f$ (chẳng hạn nếu $f \ge 0$) thì*

$$\int_A f = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f. \tag{7}$$

Ngược lại nếu có các tích phân $\int_{A_n} f$ *và nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| < \infty$ *thì sẽ có (7).*

Chứng minh. Giả sử $f \geq 0$, và đặt $B_n = \cup_{k=1}^{n} A_k$ thì theo cộng tính, ta có, với mọi n

$$\int_{B_n} f = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f.$$

Mặt khác vì $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset A$ và $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = A$, nên $0 \leq \chi_{B_n} f \nearrow f (n \to \infty)$ trên A và theo Định lý 3

$$\int_{B_n} f = \int_A \chi_{B_n} f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_A f.$$

Do đó suy ra (7).

Đối với một hàm f có dấu bất kỳ thì theo trên

$$\int_A f^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f^+, \quad \int_A f^- = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^-,$$

và nếu $\int_A f$ có nghĩa thì vế trái của một trong hai đẳng thức này phải hữu hạn do đó vế phải của nó cũng hữu hạn, cho nên ta có thể viết:

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} (f^+ - f^-) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f.$$

Ngược lại giả sử các tích phân $\int_{A_n} f$ đều có nghĩa và $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| < \infty$. Khi ấy theo trên (vì $|f| \geq 0$).

$$\int_A |f| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| < \infty,$$

chứng tỏ rằng $|f|$ khả tích. Vậy f cũng khả tích, nói riêng $\int_A f$ có nghĩa và do đó theo trên ta phải có (7). □

Định lý này cho thấy rằng nếu f là một hàm khả tích, không âm thì hàm tập $\lambda(A)$ xác định theo (6) là một *độ đo* trên σ-đại số $\mathcal{F}$. Rõ ràng nếu $\mu(A) = 0$ thì $\lambda(A) = 0$.

Một hàm tập triệt tiêu trên mọi tập có độ đo μ bằng 0 thường gọi là *tuyệt đối liên tục* đối với độ đo μ. Vậy hàm tập $\lambda(A)$ là tuyệt đối liên tục đối với độ đo μ.

Định lý 7. *Nếu f khả tích trên A thì*

$$(\forall \varepsilon)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall E \subset A)\ [\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f| < \varepsilon\ ].$$

Chứng minh. Chỉ cần xét trường hợp $f \geq 0$. Cho f_n là dãy hàm đơn giản sao cho $0 \leq f_n \nearrow f$, và có thể giả thiết $0 \leq f_n \leq n$. Vì $\int_A f_n \to \int_A f$ nên

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0)\ (\forall n \geq n_0)\ \int_A (f - f_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ta hãy chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2n_0}$. Khi ấy nếu $E \subset A$, $\mu(E) < \delta$ thì ta sẽ có

$$\begin{aligned} \int_E f &= \int_E (f - f_{n_0}) + \int_E f_{n_0} \\ &\leq \int_A (f - f_{n_0}) + \int_E f_{n_0} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + n_0\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

4. TÍCH ĐỘ ĐO VÀ TÍCH PHÂN LẶP

Trong lý thuyết tích phân Riemann có những định lý cho phép qui một tích phân bội về một tích phân lặp. Chẳng hạn tích phân kép của một hàm liên tục $f(x, y)$ qui về hai tích phân đơn theo công thức

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx.$$

Sau đây ta sẽ tìm cách xác lập công thức tương tự cho tích phân Lebesgue.

4.1. ĐỘ ĐO TRONG KHÔNG GIAN TÍCH. Ta gọi *tích trực tiếp* (hay tích Descartes) của hai tập X, Y là tập tất cả các cặp có thứ tự (x, y) trong đó $x \in X$, $y \in Y$. Tổng quát hơn, tích trực tiếp của k tập $X_1, X_2, \ldots, X_k$ là tập tất cả các dãy có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, trong đó $x_i \in X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Ký hiệu: $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ hay $\prod_{i=1}^{k} X_i$.

Ví dụ: không gian tọa độ k chiều $\mathbb{R}^k$ là tích trực tiếp của k đường thẳng số $\mathbb{R}$.

Có thể chứng minh dễ dàng các tính chất sau đây:

1) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

2) Nếu $A \subset X$, $B \subset Y$ thì $(X \times Y) \setminus (A \times B) = [(X \setminus A) \times Y] \cup [A \times (Y \setminus B)]$ và hai tập trong hợp ở vế phải này rời nhau.

Thật vậy, để chứng minh tính chất 1) chẳng hạn ta chú ý rằng nếu (x, y) thuộc tập $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$ thì $(x, y) \in A_1 \times B_1$ và $(x, y) \in A_2 \times B_2$, tức là

$$x \in A_1,\ y \in B_1\ ,\quad \text{và } x \in A_2,\ y \in B_2\ ,$$

hay $x \in A_1 \cap A_2$, $y \in B_1 \cap B_2$. Vậy $(x, y) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

Bây giờ, cho một độ đo μ xác định trên một σ-đại số $\mathcal{M}$ trong một không gian X, và một độ đo ν xác định trên một σ-đại số $\mathcal{N}$ trong một không gian Y. Ta sẽ luôn luôn giả thiết rằng μ và ν là hữu hạn hoặc σ-hữu hạn.

Xét lớp tập

$$\mathcal{E} = \mathcal{M} \times \mathcal{N} = \{A \times B : A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{N}\}.$$

Nói chung, $\mathcal{E}$ không nhất thiết là một σ-đại số trong không gian tích $X \times Y$; σ-đại số nhỏ nhất bao hàm $\mathcal{E}$ sẽ được ký hiệu : $\mathcal{M} \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$.

Vấn đề quan trọng đặt ra ở đây là: xuất phát từ các độ đo μ và ν trên các σ-đại số $\mathcal{M}$ và $\mathcal{N}$, xây dựng một độ đo trên σ-đại số $\mathcal{M} \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$.

Các tập có dạng $A \times B$ với $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$ sẽ gọi là *tập chữ nhật*. Do 1) và 2) ở trên ta thấy rằng:

1*) Giao của hai tập chữ nhật là một tập chữ nhật .

2*) Phần bù của một tập chữ nhật bằng hợp của hai tập chữ nhật rời nhau .

Một lớp tập $\mathcal{R}$ được gọi là một *lớp chính tắc* nếu nó thỏa mãn hai điều kiện:

a) $A_i \in \mathcal{R}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j) \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$;

b) $A_i \in \mathcal{R}$, $A_i \supset A_{i+1} (i = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$.

Bổ đề 5. $\mathcal{M} \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$ *là lớp chính tắc nhỏ nhất bao hàm* $\mathcal{E}$.

Chứng minh. Cho $\mathcal{R}$ là lớp chính tắc nhỏ nhất bao hàm $\mathcal{E}$. Vì một σ-đại số đương nhiên cũng là một lớp chính tắc nên $\mathcal{R} \subset \mathcal{M} \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$. Để chứng minh bao hàm thức ngược lại chỉ cần chứng tỏ rằng $\mathcal{R}$ là một σ-đại số, và muốn thế chỉ cần chứng tỏ rằng $\mathcal{R}$ có hai tính chất sau:

$$\alpha) \quad Q_n \in \mathcal{R} \Rightarrow \cap_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathcal{R};$$

$$\beta) \quad Q \in \mathcal{R} \Rightarrow Q^c = (X \times Y) \setminus Q \in \mathcal{R}.$$

Khi ấy, do $\cup_{n=1}^{\infty} Q_n = (\cap_{n=1}^{\infty} Q_n^c)^c$ nên $\mathcal{R}$ sẽ kín đối với phép hợp đếm được.

$\mathcal{R}$ có tính chất α. Cho $\mathcal{R}_1 = \{Q \in \mathcal{R} : (\forall E \in \mathcal{E})\ Q \cap E \in \mathcal{R}\}$.

Rõ ràng $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_1$ vì nếu $Q \in \mathcal{E}$, $E \in \mathcal{E}$ thì theo nhận xét 1*) $Q \cap E \in \mathcal{E} \subset \mathcal{R}$, tức là $Q \in \mathcal{R}_1$. Vả lại, dễ thấy rằng $\mathcal{R}_1$ là một lớp chính tắc, vì nếu $Q_n \in \mathcal{R}_1$ và các Q_n rời nhau thì $(\cup_{n=1}^{\infty} Q_n) \cap E = \cup_{n=1}^{\infty} (Q_n \cap E)$, trong đó các $Q_n \cap E$ rời nhau và $Q_n \cap E \in \mathcal{R}$ cho nên theo tính chất a) của lớp chính tắc $\mathcal{R}$, $\cup_{n=1}^{\infty} (Q_n \cap E) \in \mathcal{R}$, tức là $(\cup_{n=1}^{\infty} Q_n) \cap E \in \mathcal{R}$, do đó $\cup_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathcal{R}_1$, chứng tỏ rằng $\mathcal{R}_1$ có tính chất a); và cũng bằng cách đó, có thể chứng minh rằng $\mathcal{R}_1$ có tính chất b). Vậy $\mathcal{R}_1$ là một lớp chính tắc bao hàm $\mathcal{E}$, và vì dĩ nhiên $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}$, mà $\mathcal{R}$ lại là lớp chính tắc nhỏ nhất bao hàm $\mathcal{E}$, nên $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$.

Mặt khác cho $\mathcal{R}_2 = \{Q \in \mathcal{R} : (\forall P \in \mathcal{R})\ Q \cap P \in \mathcal{R}\}$.

Dựa vào đẳng thức $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$ và định nghĩa của $\mathcal{R}_1$ ta thấy ngay $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_2$. Hơn nữa, bằng phương pháp tương tự như trên, có thể chứng

minh rằng $\mathcal{R}_2$ là một lớp chính tắc. Từ đó, cũng như trên ta đi đến kết luận $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2$, nghĩa là lớp $\mathcal{R}$ kín đối với phép giao hai tập hợp, và bằng qui nạp, ta suy ra nó cũng kín đối với phép giao một số hữu hạn tập hợp.

Bây giờ cho $Q_i \in \mathcal{R}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Đặt $A_n = \cap_{n=1}^{n} Q_i$ ta có $A_n \in \mathcal{R}$ (vừa chứng minh), $A_n \supset A_{n+1}$, cho nên theo tính chất b) của $\mathcal{R}$: $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ và do đó $\cap_{n=1}^{\infty} Q_i = \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Vậy $\mathcal{R}$ có tính chất α).

$\mathcal{R}$ có tính chất β). Cho $\mathcal{R}_3 = \{Q \in \mathcal{R} : Q^c \in \mathcal{R}\}$ trong đó Q^c là phần bù của Q trong không gian $X \times Y$.

Nếu $Q \in \mathcal{E}$ thì $Q^c \in \mathcal{R}$ theo nhận xét 2*) và theo tính chất a) của $\mathcal{R}$. Vậy $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_3$. Vả lại $\mathcal{R}_3$ cũng là một lớp chính tắc, vì nếu các $Q_n \in \mathcal{R}_3$ và rời nhau thì $(\cup_{n=1}^{\infty} Q_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} Q_n^c \in \mathcal{R}$ (theo tính chất α)), do đó $\cup_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathcal{R}_3$ chứng tỏ $\mathcal{R}_3$ có tính chất a) và bằng cách tương tự ta cũng thấy rằng $\mathcal{R}_3$ có tính chất b). Vậy chỉ có thể $\mathcal{R} = \mathcal{R}_3$, tức là $\mathcal{R}$ có tính chất β).

Tóm lại, $\mathcal{R}$ có cả hai tính chất α) và β). Do đó nó là một σ-đại số, và $\mathcal{R} = \mathcal{M} \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$. □

Bổ đề 6. *Cho một tập bất kỳ $Q \in \mathcal{M} \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$. Ta có*

(i) $(\forall x \in X)\ Q^{(x)} = \{y : (x, y) \in Q\} \in \mathcal{N}$, (8)

$(\forall y \in Y)\ Q^{(y)} = \{x : (x, y) \in Q\} \in \mathcal{M}$. (9)

(ii) *$\nu(Q^{(x)})$ là một hàm số theo x đo được đối với μ; $\mu(Q^{(y)})$ là một hàm số theo y đo được đối với ν.*

(iii) $$\int_X \nu(Q^{(x)}) d\mu = \int_Y \mu(Q^{(y)}) d\nu. \tag{10}$$

Chứng minh. (i) Cho $\mathcal{F}$ là lớp tất cả các tập Q trong $X \times Y$ thỏa mãn điều kiện (8). Có thể thấy ngay rằng $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ vì nếu $Q \in \mathcal{E}$, tức là $Q = A \times B$ $(A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{N})$ thì

$$Q^{(x)} = \begin{cases} \emptyset & x \notin A \\ B & x \in A \end{cases} \tag{11}$$

cho nên $Q^{(x)} \in \mathcal{N}$, tức là $Q \in \mathcal{F}$. Mặt khác $\mathcal{F}$ là một σ-đại số, vì nếu $Q = \cup_{i=1}^{\infty} Q_i$, $Q_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ thì $Q^{(x)} = \cup_{i=1}^{\infty} Q_i^{(x)} \in \mathcal{N}$, tức là

$Q \in \mathcal{F}$, cho nên $\mathcal{F}$ kín đối với phép hợp đếm được, và bằng cách tương tự, cũng có thể thấy rằng $\mathcal{F}$ kín đối với phép lấy phần bù. Vậy $\mathcal{F}$ là một σ-đại số bao hàm $\mathcal{E}$, do đó $\mathcal{F} \supset \mathcal{M} \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$, và điều này có nghĩa rằng mọi tập $Q \in \mathcal{M} \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$ đều thỏa mãn điều kiện (8). Cũng như thế, ta chứng minh rằng Q thỏa mãn điều kiện (9).

(ii) và (iii). Trước hết, xét trường hợp các độ đo μ, ν hữu hạn.

Cho $\mathcal{R} = \{Q \in \mathcal{M} \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}: Q \text{ có (ii) và có (iii)}\}$. Ta chỉ cần chứng minh rằng $\mathcal{R} \supset \mathcal{M} \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$.

Dễ thấy rằng $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$, vì nếu $Q \in \mathcal{E}$ tức là $Q = A \times B$ ($A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$), thì theo (11), $\nu(Q^{(x)}) = 0$ nếu $x \notin A$, và $= \nu(B)$ nếu $x \in A$, cho nên $\nu(Q^{(x)})$ là hàm số đo được theo x, và tương tự như thế, $\mu(Q^{(y)})$ là hàm số đo được theo y; đồng thời

$$\begin{aligned} \int_X \nu(Q^{(x)}) d\mu &= \int_A \nu(B) d\mu = \nu(B) \cdot \mu(A) , \\ \int_Y \mu(Q^{(y)}) d\nu &= \int_B \mu(A) d\nu = \mu(A) \cdot \nu(B) , \end{aligned}$$

cho nên Q nghiệm đúng đẳng thức (10).

Mặt khác $\mathcal{R}$ là một lớp chính tắc. Thật vậy:

• Nếu $Q = \cup_{i=1}^{\infty} Q_i$, các $Q_i \in \mathcal{R}$ ($i = 1, 2, \ldots$) và rời nhau, thì $Q^{(x)} = \cup_{i=1}^{\infty} Q_i^{(x)}$, trong đó các $Q_i^{(x)}$ rời nhau, cho nên

$$\nu(Q^{(x)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(Q_i^{(x)}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \nu(Q_i^{(x)}),$$

do đó $\nu(Q^{(x)})$ là đo được theo x, vì mỗi hàm số $\sum_{i=1}^{n} \nu(Q^{(x)})$ ($n = 1, 2, \ldots$) đều đo được. Vì lý do tương tự, $\mu(Q^{(y)})$ cũng đo được theo y. Đồng thời vì $Q_i \in \mathcal{R}$ nên $\int_X \nu(Q_i^{(x)}) d\mu = \int_Y \mu(Q_i^{(y)}) d\nu$ và chú ý rằng $\nu(Q^{(x)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(Q_i^{(x)})$, $\mu(Q^{(y)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i^{(y)})$ ta suy ra từ đó

$$\int_X \nu(Q^{(x)}) d\mu = \int_Y \mu(Q^{(y)}) d\nu ,$$

nghĩa là Q có (ii) và (iii). Vậy $\mathcal{R}$ có tính chất a) của một lớp chính tắc.

• Nếu $Q = \cap_{i=1}^{\infty} Q_i$, $Q_i \in \mathcal{R}$ và $Q_i \supset Q_{i+1} (i = 1, 2, \ldots)$ thì $Q^{(x)} = \cap_{i=1}^{\infty} Q_i^{(x)}$, trong đó $Q_i^{(x)} \in \mathcal{R}$, $Q_i^{(x)} \supset Q_{i+1}^{(x)}$, độ đo ν hữu hạn nên

$$\nu(Q_i^{(x)}) \searrow \nu(Q^{(x)}) \ (i \to \infty) ,$$

do đó $\nu(Q^{(x)})$ là đo được theo x, vì mỗi hàm số $\nu(Q_i^{(x)})$ đều đo được. Vì lý do tương tự $\mu(Q^{(y)})$ cũng đo được theo y. Đồng thời, theo Định lý 3 về dãy hội tụ đơn điệu ta có

$$\int_X \nu(Q_i^{(x)}) d\mu \to \int_X \nu(Q^{(x)}) d\mu ,$$
$$\int_Y \mu(Q_i^{(y)}) d\nu \to \int_Y \mu(Q^{(y)}) d\nu ,$$

cho nên đẳng thức (10) được nghiệm đúng, tức là Q có (ii) và (iii).

Vậy $\mathcal{R}$ có đủ hai tính chất a) và b) của một lớp chính tắc. Vì $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$ nên suy ra $\mathcal{R} \supset \mu \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$.

Bây giờ giả sử các độ đo μ và ν là σ-hữu hạn:

$$X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i, \text{ các} X_i \text{ rời nhau }, \mu(X_i) < \infty;$$
$$Y = \cup_{i=1}^{\infty} Y_i, \text{ các } Y_i \text{ rời nhau }, \nu(Y_i) < \infty.$$

Khi ấy, mỗi tập $Q \in \mathcal{M} \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$ có thể viết dưới dạng $Q = \cup_{i,j} Q_{i,j}$, trong đó $Q_{i,j} = Q \cap (X_i \times X_j)$ là những tập rời nhau, có các tính chất (ii) và (iii) (theo phần đã chứng minh), cho nên, bằng phương pháp giống như trên, ta suy ra Q cũng có các tính chất (ii) và (iii).

Bổ đề đã được chứng minh. □

Từ bổ đề này ta thấy nếu với mỗi tập $M \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$ ta đặt

$$\lambda(Q) = \int_X \nu(Q^{(x)}) d\mu = \int_Y \mu(Q^{(y)}) d\nu$$

thì $\lambda(Q)$ là một độ đo trên σ-đại số $M \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$. Độ đo ấy là hữu hạn nếu cả μ và ν cũng hữu hạn, và là σ-hữu hạn nếu một trong hai độ đo μ, ν là σ-hữu hạn. Ta gọi nó là *tích của hai độ đo* μ, ν và ký hiệu:

$$\lambda = \mu \times \nu.$$

Dĩ nhiên với $Q = A \times B$ ($A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$) ta có

$$\lambda(Q) = (\mu \times \nu)(Q) = \mu(A) \times \nu(B).$$

Chẳng hạn, nếu $X = Y = R$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{L}^1$, và $\mu = \nu = \mu^1$ (độ đo Lebesgue trên đường thẳng) thì tích $\mu^1 \times \mu^1$ là một độ đo trên σ-đại số $\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1$ trong mặt phẳng. Có thể chứng minh rằng khi "bổ sung" độ đo này bằng cách thêm vào σ-đại số nói trên tất cả những bộ phận của những tập (thuộc σ-đại số ấy) có độ đo 0, thì ta sẽ được độ đo Lebesgue μ^2 trong mặt phẳng.

4.2. TÍCH PHÂN LẶP. Sau khi đã định nghĩa độ đo tích, ta có thể chứng minh định lý quan trọng sau đây:

Định lý 8 (Fubini). *Cho μ là một độ đo σ-hữu hạn trên một σ-đại số $\mathcal{M}$ trong không gian X, ν là một độ đo σ-hữu hạn trên một σ-đại số $\mathcal{N}$ trong không gian Y, $f(x,y)$ là một hàm đo được theo độ đo $\lambda = \mu \times \nu$. Nếu $f(x,y)$ không âm hoặc khả tích trên tập $A \times B \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ thì ta có*

$$\int_{A\times B} f(x,y)d\lambda = \int_B \left(\int_A f(x,y)d\mu\right)d\nu = \int_A \left(\int_B f(x,y)d\nu\right)d\mu\,, \tag{12}$$

và khi $f(x,y)$ khả tích trên $A \times B$ thì, với hầu hết mọi $y \in B$, hàm số $f(x,y)$ xem như hàm số theo một biến x là khả tích trên A; đồng thời, với hầu hết mọi $x \in A$, hàm số $f(x,y)$, xem như hàm số theo một biến y, là khả tích trên B.

Ý nghĩa của định lý này là nó cho phép, trong những điều kiện đã nêu, thay một tích phân bội bằng một tích phân lặp hoặc thay đổi thứ tự lấy tích phân trong một tích phân lặp.

Chứng minh. Bằng cách đặt $f(x,y) = 0$ khi $x \notin A$, hay $x \notin B$, có thể giả thiết rằng $A = X$, $B = Y$. Vả lại chỉ cần chứng minh đẳng thức thứ nhất trong (12) vì đẳng thức thứ hai cũng chứng minh tương tự.

Giả sử $f = \chi_Q$, trong đó Q đo được đối với $\lambda = \mu \times \nu$ (tức là $Q \in \mathcal{M} \overset{\sigma}{\times} \mathcal{N}$). Dĩ nhiên

$$\int_{X\times Y} \chi_Q d\lambda = \lambda(Q),$$

và theo định nghĩa độ đo tích :

$$\lambda(Q) = \int_Y \mu(Q^{(y)})d\nu = \int_X \nu(Q^{(x)})d\mu.$$

Nhưng với mỗi y cố định:

$$\mu(Q^{(y)}) = \int_X \mathcal{X}_Q(x,y)d\mu\,,$$

vì rõ ràng:

$$\mathcal{X}_Q(x,y) = \begin{cases} 0 & x \notin Q^{(y)} \\ 1 & x \in Q^{(y)} \end{cases}$$

Vậy $$\int_{X\times Y} \mathcal{X}_Q(x,y)d\lambda = \int_Y (\int_X \mathcal{X}_Q(x,y)d\mu)d\nu\,,$$

nghĩa là công thức (12) đúng cho các hàm đặc trưng của những tập đo được. Do đó nó cũng phải đúng cho các hàm đơn giản $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{X}_{Q_i}$, và cho cả các hàm $f \geq 0$, vì nếu gọi f_n là dãy hàm đơn giản sao cho $0 \leq f_n \nearrow f$ thì

$$\int_{X\times Y} f_n d\lambda = \int_Y (\int_X f_n d\mu)d\nu\,,$$

và áp dụng định lý về hội tụ đơn điệu để qua giới hạn ta suy ra

$$\int_{X\times Y} f d\lambda = \int_Y (\int_X f d\mu)d\nu.$$

Nếu $f \geq 0$ và khả tích theo độ đo λ thì

$$\int_Y (\int_X f(x,y)d\mu)d\nu = \int_{X\times Y} f(x,y)d\lambda < \infty.$$

chứng tỏ rằng hàm số

$$G(y) = \int f(x,y)d\mu$$

khả tích, do đó phải hữu hạn hầu khắp nơi, nghĩa là $f(x,y)$ khả tích theo μ với hầu hết mọi y.

Trường hợp tổng quát suy ra từ trên bằng cách phân tích $f = f^+ - f^-$. □

Chú ý rằng nếu những điều kiện nêu trong định lý Fubini không được thỏa mãn thì có thể xảy ra trường hợp có tích phân lặp trong (12) nhưng không có tích phân bội, hoặc có các tích phân lặp, nhưng chúng không bằng nhau . [3]

5. TÍCH PHÂN VÀ ĐẠO HÀM TRONG $\mathbb{R}$

Ở trên đã trình bày lý thuyết tích phân một cách tổng quát. Bây giờ ta hãy đi sâu vào trường hợp thường gặp của tích phân trong $\mathbb{R}$ và xét vấn đề liên hệ giữa hai phép toán tích phân và đạo hàm.

Theo một định lý cơ bản trong giải tích cổ điển thì đó là hai phép toán ngược nhau, theo nghĩa : nếu hàm số $f(x)$ liên tục thì tại mỗi điểm x tích phân bất định

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{13}$$

có đạo hàm bằng

$$F'(x) = f(x). \tag{14}$$

Ngược lại, nếu hàm số $F(x)$ có đạo hàm liên tục $F'(x) = f(x)$ thì từ đạo hàm này có thể tìm lại $F(x)$ theo công thức

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt. \tag{15}$$

Ở đây, tích phân hiểu theo nghĩa Riemann, và giả thiết về liên tục rất hệ trọng. Nếu chuyển sang tích phân Lebesgue thì liệu có thể bỏ được giả thiết ấy và thay bằng một giả thiết nhẹ hơn không? (ví dụ: chỉ đòi hỏi $f(x)$ khả tích). Như thế, có hai vấn đề:

I. Nếu $f(x)$ chỉ khả tích (L), chứ không nhất thiết liên tục, thì đẳng thức (14) còn đúng nữa không?

II. Với những điều kiện nào thì $F(x)$ có đạo hàm $f(x)$ khả tích (L) và có thể khôi phục lại được $F(x)$ từ $f(x)$ theo công thức (15) ?

[3] Xem chẳng hạn I.P. Natanson "Lý thuyết hàm số biến số thực", Matxcơva, 1957 (tiếng Nga)

Vì sự thay đổi giá trị của $f(x)$ trên một tập có độ đo 0 không ảnh hưởng gì đến giá trị của tích phân (13) nên trong vấn đề I ta không đòi hỏi đẳng thức (14) phải đúng tại từng điểm, mà chỉ cần nó đúng hầu khắp nơi là được.

Sau đây sẽ lần lượt giải quyết hai vấn đề ấy.

5.1. ĐẠO HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU. Trước khi bàn tới đẳng thức (14), cần xét xem đạo hàm $F'(x)$ của tích phân (13) có nhất thiết tồn tại không.

Ta để ý rằng tích phân bất định của một hàm số $f(x)$ khả tích bao giờ cũng là hiệu của hai hàm số đơn điệu không giảm. Thật vậy, ta có $f = f^+ - f^-$ và

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x f^+(t)dt - \int_a^x f^-(t)dt$$

trong đó các hàm số

$$G(x) = \int_a^x f^+ , \qquad H(x) = \int_a^x f^-$$

không giảm vì $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$. Thành thử vấn đề tồn tại đạo hàm của một tích phân bất định được đưa về vấn đề tồn tại đạo hàm của các hàm số đơn điệu nói chung.

Ta hãy chứng minh vài bổ đề.

Bổ đề 7. *Cho A là một tập bất kỳ nằm trong khoảng (a, b), $\mathfrak{J}$ là một lớp khoảng, sao cho mỗi điểm $x \in A$ đều là mút trái của ít nhất một khoảng $\Delta = (x, x + h_x) \in \mathfrak{J}$. Khi ấy có tồn tại một số hữu hạn khoảng rời nhau $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s \in \mathfrak{J}$ phủ lên một tập con A' của A, với độ đo ngoài $\mu^*(A') > \mu^*(A) - \varepsilon$, và ε là một số dương tùy ý cho trước.*

Thật vậy, cho A_n là tập các điểm $x \in A$ mà có ít nhất một khoảng $(x, x + h_x) \in \mathfrak{J}$, với $h_x > 1/n$. Rõ ràng

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \; A_n \subset A_{n+1} \; (n = 1, 2, \ldots).$$

Theo định nghĩa độ đo ngoài của A_n, ta có thể tìm được một tập mở G_n sao cho $G_n \supset A_n$ và $\mu(G_n) \leq \mu^*(A_n) + \eta$, trong đó η là một số

dương tùy ý. Ta hãy đặt $E_n = \cap_{p=n}^{\infty} G_p$, $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Đương nhiên các tập E_n và do đó tập E là đo được, và $E_n \subset E_{n+1}$ nên $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$. Vả lại, vì $A_n \subset E_n \subset G_n$ nên $\mu^*(A_n) < \mu^*(E_n) = \mu(E_n) \leq \mu(G_n) \leq \mu^*(A_n) + \eta$ và chú ý rằng $\eta > 0$ nhỏ tùy ý ta suy ra, khi $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) = \lim \mu(E_n) = \mu(E)$. Nhưng do $E \supset A$ (vì mỗi $E_n \supset A_n$) nên $\mu(E) \geq \mu^*(A)$. Vậy chọn n đủ lớn, ta sẽ có $\mu^*(A_n) > \mu^*(A) - \varepsilon/2$. Bây giờ cho a_1 và b_1 là các cận dưới đúng và cận trên đúng của A_n, và $l = b_1 - a_1$. Đặt $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2(nl+1)}$, ta hãy lấy trong A_n một điểm x_1 với $a \leq x_1 < a_1 + \delta$, và một khoảng $(x_1, x_1 + h_1) \in \mathcal{J}$ có độ dài $h_1 > 1/n$ (khoảng này tồn tại theo định nghĩa của A_n). Nếu bên phải điểm $x_1 + h_1$ còn có những điểm của A_n thì ta xét cận dưới đúng a_2 của tập các điểm ấy. Cho x_2 là một điểm của A_n với $a_2 \leq x_2 < a_2 + \delta$ và $(x_2, x_2 + h_2)$ là một khoảng trong lớp $\mathcal{J}$ có độ dài $h_2 > 1/n$. Cứ thế tiếp tục mãi, nhất định ta sẽ đạt tới b_1 sau một số s bước với $s < nl + 1$, vì rằng độ dài đoạn $[a_1, b_1]$ là l mà mỗi bước nhích ta gần lại điểm b_1 một khoảng lớn hơn $1/n$. Cho $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$ là các khoảng đã chọn được theo cách đó, và $A' = A_n \cap \cup_{i=1}^{s} \Delta_i$. Rõ ràng các khoảng này phủ lên A', và vì $A_n \setminus A' \subset \cup_{i=1}^{s} [x_i - \delta, x_i]$ nên $\mu^*(A_n \setminus A') \leq s\delta < (nl+1) \times \dfrac{\varepsilon}{2(nl+1)} = \dfrac{\varepsilon}{2}$, do đó $\mu^*(A_n) \leq \mu^*(A') + \mu(A \setminus A') < \mu^*(A') + \dfrac{\varepsilon}{2}$, hay $\mu^*(A') \geq \mu^*(A_n) - \dfrac{\varepsilon}{2} \geq \mu^*(A) - \varepsilon$. □

Bổ đề 8. *Giả thiết thêm rằng với mọi số $\eta > 0$ nhỏ tùy ý, tại mỗi điểm $x \in A$ đều có ít nhất một khoảng $(x, x + h_x) \in \mathcal{J}$ với $h_x < \eta$. Khi ấy, cho trước một tập mở bất kỳ $G \supset A$, ta có thể chọn những khoảng $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$ trong Bổ đề 7 sao cho chúng đều nằm trọn trong tập G.*

Thật vậy, cho $\mathcal{J}_1$ là tập các khoảng của lớp $\mathcal{J}$ nằm trọn trong G. Vì G là tập mở nên mỗi điểm $x \in G$ phải nằm trong một khoảng nào đó $(x - \eta,\ x + \eta) \subset G$. Theo giả thiết bổ sung x là mút trái của ít nhất một khoảng thuộc lớp $\mathcal{J}$ với độ dài nhỏ hơn η, tức là của một khoảng thuộc lớp $\mathcal{J}_1$. Áp dụng Bổ đề 7 cho $\mathcal{J}_1$ ta sẽ suy ra kết quả. □

Định lý 9. *Một hàm số $F(x)$ đơn điệu trên một đoạn $[a, b]$ thì có đạo hàm hầu khắp nơi trên đoạn ấy.*

Chứng minh. Ta đặt

$$\begin{aligned} D_+(x) &= \underline{\lim}_{h\to 0_+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}, \\ D^+(x) &= \overline{\lim}_{h\to 0_+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}, \\ D_-(x) &= \underline{\lim}_{h\to 0_-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}, \\ D^-(x) &= \overline{\lim}_{h\to 0_-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}. \end{aligned}$$

Đương nhiên $D_+(x) \le D^+(x)$, $D_-(x) \le D^-(x)$ và điều kiện cần và đủ để có đạo hàm $F'(x)$ tại x là cả bốn số trên bằng nhau. Ta chứng minh trước hết rằng tập $A = \{x : D_+(x) < D^+(x)\}$ có độ đo 0.

Giả sử $F(x)$ đơn điệu không giảm. Cho p, q là hai số hữu tỉ $(p < q)$ và

$$A_{pq} = \{x : D_+(x) < p < q < D^+(x)\}.$$

Vì $A = \cup_{p,q} A_{pq}$ (hợp một số điểm được tập hợp) nên chỉ cần chứng minh rằng mỗi A_{pq} có độ đo bằng 0.

Giả sử trái lại rằng có một tập A_{pq} với $\mu^*(A_{pq}) = \alpha > 0$. Ta hãy lấy một tập $G \supset A_{pq}$ sao cho $\mu(G) < \alpha + \varepsilon$. Mỗi điểm $x \in A_{pq}$ là mút trái của những khoảng nhỏ tùy ý $(x, x+h)$ với $F(x+h) - F(x) < hp$. Vậy theo Bổ đề 8, có một số hữu hạn khoảng rời nhau $(x_i, x_i + h_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ nằm trọn trong G, và phủ lên một tập $A' \subset A_{pq}$ với $\mu^*(A') > \alpha - \varepsilon$. Dĩ nhiên

$$\sum_{i=1}^{r} h_i < \mu(G) < \alpha + \varepsilon ,$$

và

$$\sum_{i=1}^{r} \{F(x_i + h_i) - F(x_i)\} < p \sum_{i=1}^{r} h_i < p(\alpha + \varepsilon).$$

Nhưng mỗi điểm $x \in A'$ lại là mút trái của những khoảng nhỏ tùy ý $(x, x+h)$ với

$$F(x+h) - F(x) > kq ,$$

nên cũng theo Bổ đề 8, có một số hữu hạn khoảng rời nhau $(y_j, y_j + k_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ nằm trọn trong tập mở $\cup_{i=1}^{r}(x_i, x_i + h_i)$ và phủ lên một tập con của A' có độ đo ngoài lớn hơn $\mu^*(A) - \varepsilon > \alpha - 2\varepsilon$. Ta có

$$\sum_{j=1}^{s}\{F(y_j + k_j) - F(y_j)\} > q\sum_{j=1}^{s} k_j > q(\alpha - 2\varepsilon)\,,$$

và vì $F(x)$ đơn điệu không giảm mà $\cup_j(y_j, y_j + k_j) \subset \cup_i(x_i, x_i + h_i)$ nên

$$\sum_j\{F(y_j + k_j) - F(y_j)\} \leq \sum_i\{F(x_i + h_i) - F(x_i)\}.$$

Vậy $q(\alpha - 2\varepsilon) < p(\alpha + \varepsilon)$, điều này không thể xảy ra nếu ε đủ nhỏ.

Thành thử $\mu(A) = 0$, tức là $D_+(x) = D^+(x)$ hầu khắp nơi. Bằng cách tương tự ta cũng chứng minh rằng $D_-(x) = D^-(x)$ hầu khắp nơi. Mặt khác, trong lập luận trên có thể thay $D^+(x)$ bằng $D^-(x)$: mỗi điểm $x \in A'$ sẽ là mút phải của những khoảng nhỏ tùy ý $(x - k, x)$ với $F(x) - F(x - k) > kq$, và cũng theo cách trên, ta đi tới kết quả $D_+(x) \geq D^-(x)$ hầu khắp nơi. Tương tự như thế $D_-(x) \geq D^+(x)$. Tóm lại $D_-(x) = D^-(x) = D_+(x) = D^+(x)$, tức là $F'(x)$ tồn tại hầu khắp nơi trên đoạn $[a, b]$. Định lý đã được chứng minh . □

Dĩ nhiên hiệu của hai hàm số đơn điệu cũng có đạo hàm hầu khắp nơi. Nói riêng nếu $f(x)$ khả tích thì tích phân bất định $F(x) = \int_a^b f(t)dt$ có đạo hàm hầu khắp nơi. Vấn đề còn lại là $F'(x)$ liên hệ với $f(x)$ như thế nào.

5.2. ĐẠO HÀM CỦA TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH.

Bổ đề 9. *Nếu $F(x)$ không giảm (trên $[a, b]$) thì $F'(x)$ khả tích và* $\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a)$.

Vì $[F(x + h) - F(x)]/h \geq 0$ ($F(x)$ không giảm) và khi $h \to 0$ tỉ số ấy dần tới $F'(x)$ hầu khắp nơi nên theo Bổ đề Fatou :

$$\int_a^b F'(x)dx \leq \varliminf_{h\to 0}\int_a^b \frac{F(x + h) - F(x)}{h}dx. \qquad (16)$$

Ta hãy đặt $F(x) = F(b)$ với $x > b$. Vì $F(x)$ khả tích (R) nên tích phân ở vế phải của (16) có thể hiểu theo nghĩa Riemann. Đổi biến số, ta có thể viết tích phân ấy dưới dạng

$$\frac{1}{h}\int_{a+h}^{b+h} F(t)dt - \frac{1}{h}\int_{a}^{b} F(t)dt$$
$$= \frac{1}{h}\int_{b}^{b+h} F(t)dt - \frac{1}{h}\int_{a}^{a+h} F(t)dt$$
$$\leq \frac{1}{h}\int_{b}^{b+h} F(b)dt - \frac{1}{h}\int_{a}^{a+h} F(a)dt = F(b) - F(a). \qquad \square$$

Bổ đề 10. *Nếu $g(x)$ khả tích và với mọi x trong đoạn $[a,b]$ ta đều có $\int_a^x g(t)dt = 0$ thì $g(x) = 0$ h.k.n.*

Thật vậy, nếu trái lại, $g(x) \neq 0$ trên một tập có độ đo dương thì một trong hai tập $A = \{x : g(x) > 0\}$, $B = \{x : g(x) < 0\}$ phải có độ đo dương, ví dụ $\mu(A) > 0$, và do đó $\mu([a,b]) \setminus A) < b - a$. Ta hãy lấy một tập mở E bao hàm $[a,b] \setminus A$ và có dạng $E = \cup_i \Delta_i$ trong đó Δ_i là những khoảng rời nhau, với $\sum_i |\Delta_i| < b - a$. Ta có

$$\int_E g(x) = \sum_i \int_{\Delta_i} g(x)\,,$$

nhưng dựa theo giả thiết dễ thấy rằng tích phân trên mọi khoảng đều bằng 0 cho nên $\int_E g(x) = 0$, và do đó

$$\int_{[a,b]\setminus E} = \int_{[a,b]} - \int_E = 0. \qquad (17)$$

Mặt khác, vì $\sum_i |\Delta_i| < b - a$ nên $\mu([a,b]) \setminus E) > 0$ và vì rõ ràng $[a,b] \setminus E \subset A$ nên $g(x) > 0$ trên tập $[a,b] \setminus E$. Điều này mâu thuẫn với (17) vì nếu $g(x) \geq 0$ trên $[a,b] \setminus E$ thì đẳng thức (17) kéo theo $g(x) = 0$ h.k.n. trên $[a,b] \setminus E$. Vậy $g(x) = 0$ h.k.n. $\square$

Định lý 10. *Đạo hàm của tích phân bất định*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

của một hàm số khả tích $f(x)$ bằng $F'(x) = f(x)$ hầu khắp nơi.

Như vậy vấn đề I được giải quyết trọn vẹn.

Chứng minh. Trước hết, chú ý rằng $F(x)$ là một hàm số liên tục vì theo Định lý 7, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall h < \delta)\ \ |F(x+h) - F(x)| \leq \int_x^{x+h} |f(t)|dt < \varepsilon$.

Mặt khác, chỉ cần chứng minh rằng

$$(\forall x)\ \int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)\ , \tag{18}$$

vì khi ấy

$$(\forall x)\ \int_a^x F'(t)dt = \int_a^x f(t)dt \quad \text{hay} \quad \int_a^x [F'(t) - f(t)]dt = 0\ ,$$

và do đó theo Bổ đề 10, $F'(x) = f(x)$ h.k.n.

Ta xét hai trường hợp:

1) $f(x)$ bị chặn : $|f(x)| \leq K$. Khi ấy

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt\right| \leq K.$$

Theo Định lý 9,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \to F'(x) \ \text{ h.k.n.}$$

cho nên áp dụng định lý về hội tụ chặn, ta có :

$$\int_a^x \frac{F(t+h) - F(t)}{h}dt \to \int_a^x F'(t)dt.$$

Nhưng cũng như trong chứng minh Bổ đề 9, dễ thấy rằng

$$\int_a^x \frac{F(t+h) - F(t)}{h}dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)dt - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} F(t)dt\ ,$$

và vì $F(x)$ liên tục nên hiệu số này dần tới $F(x) - F(a)$. Do đó

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a).$$

2) $f(x)$ bất kỳ. Bằng cách phân tích $f = f^+ - f^-$ có thể qui về trường hợp $f \geq 0$. Đặt $f_n(x) = \min\{n, f(x)\}$ ta có $f - f_n \geq 0$, nên hàm số

$$\int_a^x [f(t) - f_n(t)]dt$$

không giảm và do đó đạo hàm của nó không âm, tức là

$$\Big[\int_a^x (f - f_n)\Big]' \geq 0 \text{ hay } \Big[\int_a^x f\Big]' \geq \Big[\int_a^x f_n\Big]' \text{ h.k.n..}$$

Nhưng vế trái của bất đẳng thức này chính là $F'(x)$, còn vế phải thì bằng $f_n(x)$ theo phần chứng minh ở trên, vì $f_n(x)$ bị chặn. Thành thử $F'(x) \geq f_n(x)$ h. k.n. và cho $n \to \infty$, ta có

$$F'(x) \geq f(x) \text{ h.k.n.}$$

Vậy

$$\int_a^x F'(t)dt \geq \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)\ ,$$

từ đó suy ra (18) vì theo Bổ đề 9 bất đẳng thức ngược lại cũng đúng. Định lý đã được chứng minh. □

5.3. HÀM SỐ CÓ BIẾN PHÂN BỊ CHẶN VÀ HÀM SỐ TUYỆT ĐỐI LIÊN TỤC. Cho một hàm số $F(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$. Ta gọi biến phân của $F(x)$ trên đoạn ấy và ký hiệu $V_a^b(F)$ là cận trên đúng của các số

$$\sum_{i=0}^{n-1} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| \qquad (19)$$

lấy theo tất cả các cách chia đoạn $[a, b]$ bởi những điểm $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. ($n$ là số tự nhiên tùy ý). Hàm số $F(x)$ gọi là có *biến phân bị chặn (giới nội)* nếu $V_a^b(F) < \infty$.

Một hàm số đơn điệu không giảm $F(x)$ thì bao giờ cũng có biến phân bị chặn, vì tổng (19) đối với nó luôn luôn bằng $F(b) - F(a)$, bất kể chia đoạn $[a, b]$ như thế nào.

Dĩ nhiên $V_a^b(F \pm G) \leq V_a^b(F) + V_a^b(G)$, cho nên tổng hay hiệu của hai hàm số có biến phân bị chặn thì cũng có biến phân bị chặn . Nói

riêng, hiệu của hai hàm số đơn điệu không giảm thì có biến phân bị chặn . Ngược lại cũng đúng, nghĩa là:

Một hàm số $F(x)$ có biến phân bị chặn khi và chỉ khi nó là hiệu của hai hàm số đơn điệu không giảm.

Thật vậy, giả sử $F(x)$ có biến phân bị chặn. Cho $V(x) = V_a^x(F)$ và $F_1(x) = \frac{1}{2}[V(x) + F(x)]$, $F_2(x) = \frac{1}{2}[V(x) - F(x)]$. Nếu $a \leq x' < x'' \leq b$ thì rõ ràng với mọi cách chia đoạn $[a, x']$ bởi những điểm $a = x_0 < x_1 < \ldots < x = x'$, ta có

$$\sum_{i=0}^{p-1} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| + |F(x'') - F(x')| \leq V(x'') ,$$

cho nên $V(x') + |F(x'') - F(x')| \leq V(x'')$, hay $V(x'') - V(x') \geq |F(x'') - F(x')|$, và do đó ta suy ra các hàm số $F_1(x)$, $F_2(x)$ đều là đơn điệu không giảm. Đương nhiên

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x) , \tag{20}$$

đó chính là cách biểu diễn đòi hỏi.

Kết hợp với Định lý 9 ta thấy rằng: *một hàm số có biến phân bị chặn thì có đạo hàm h.k.n.*

Một hàm số $F(x)$ được gọi là *tuyệt đối liên tục* trên đoạn $[a, b]$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước đều có $\delta > 0$ để cho với mọi hệ khoảng $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ rời nhau:

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

Rõ ràng một hàm số tuyệt đối liên tục thì càng phải liên tục theo nghĩa thường, vì trên đây có thể lấy $n = 1$. Vả lại một *hàm số tuyệt đối liên tục thì phải có biến phân bị chặn* vì theo điều kiện trên, biến phân của nó trong một khoảng bất kỳ có độ dài δ sẽ không vượt quá ε, cho nên biến phân của nó trong toàn đoạn $[a, b]$ không vượt quá $\dfrac{(b-a)\varepsilon}{\delta}$. Do đó *một hàm số tuyệt đối liên tục cũng có đạo hàm h.k.n.*

Tổng hay hiệu của hai hàm số tuyệt đối liên tục dĩ nhiên cũng tuyệt đối liên tục.

Ở trên ta đã thấy rằng tích phân bất định của một hàm số khả tích bằng hiệu của hai hàm số không giảm, cho nên có biến phân bị chặn. Hơn nữa: *Tích phân bất định của một hàm số khả tích là tuyệt đối liên tục.*

Thật vậy, theo Định lý 7, nếu f khả tích trên $[a, b]$ thì

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall E \subset [a,b]) \quad [\, \mu(E) < \delta \Rightarrow \int_A |f| < \delta \,].$$

Lấy $E = \cup_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$, ta thấy rằng nếu $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ thì

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| = |\sum_{i=1}^{n} \int_{di}^{bi} f| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{ai}^{bi} \cdot |f| = \int_E |f| < \varepsilon.$$

5.4. VẤN ĐỀ TÌM LẠI NGUYÊN HÀM. Bây giờ ta chuyển sang vấn đề II đã nêu ra: với những điều kiện nào thì có thể khôi phục một hàm số $F(x)$ từ đạo hàm $F'(x)$ của nó bằng công thức

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt. \tag{21}$$

Theo những kết quả trên, $F(x)$ phải tuyệt đối liên tục, vì là một tích phân bất định. Dưới đây sẽ chứng minh rằng điều kiện ấy không những cần mà cũng đủ.

Bổ đề 11. *Nếu một hàm số $F(x)$ tuyệt đối liên tục có đạo hàm $F'(x) = 0$ h.k.n. thì $F(x)$ phải là một hằng số.*

Thật vậy, cho A là tập các điểm x tại đó $F'(x) = 0$. Mỗi điểm x thuộc A là mút trái của những khoảng $(x, x + h)$ nhỏ tùy ý, với $|F(x + h) - F(x)| < \varepsilon h$ ($\varepsilon > 0$ cho trước). Theo Bổ đề 7, có thể tìm được một số hữu hạn khoảng $(x, x + h)$ rời nhau, phủ lên một tập $A' \subset A$ với $\mu^*(A') > \mu(A) - \delta = (b - a) - \delta$ ($\delta > 0$) cho trước bất kỳ.

Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các điểm mút của những khoảng đã chọn, $\sum_1$ là tổng lấy theo các khoảng này, $\sum_2$ là tổng lấy theo các khoảng bù (tức là các khoảng còn lại trên đoạn $[a, b]$ sau khi rút đi khỏi đoạn này các khoảng đã chọn). Ta có

$$|F(b) - F(a)| \leq \sum_1 |F(x_{i+1}) - F(x_i)| + \sum_2 |F(x_{i+1} - F(x_i)|.$$

Nhưng

$$\sum_1 |F(x_{i+1}) - f(x_i)| < \varepsilon \sum_1 (x_{i+1} - x_i) < \varepsilon(b-a) ,$$

còn tổng $\sum_2 |F(x_{i+1}) - F(x_i)|$ thì dần tới 0 khi $\delta \to \infty$ do giả thiết về tuyệt đối liên tục, vì $\sum_2 (x_{i+1} - x_i) < \delta$. Vậy cho $\delta \to 0$ ta có:

$$|F(b) - F(a)| \leq \varepsilon(b-a) ,$$

và vì $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý ta suy ra $F(b) = F(a)$. Thay b trong lập luận trên bằng một điểm x bất kỳ trong đoạn $[a, b]$ ta có $F(x) = F(a)$ với mọi x. □

Định lý 11. *Nếu $F(x)$ là một hàm số tuyệt đối liên tục thì đạo hàm $F'(x)$ của nó khả tích và ta có*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt.$$

Chứng minh. $F(x)$ là tuyệt đối liên tục thì phải có biến phân bị chặn và có thể biểu diễn dưới dạng

$$F(x) = G(x) - H(x) ,$$

trong đó $G(x), H(x)$ là những hàm số đơn điệu không giảm. Theo Bổ đề 9 các hàm số này có đạo hàm $G'(x), H'(x)$ khả tích, cho nên đạo hàm $F'(x) = G'(x) - H'(x)$ cũng khả tích, và tích phân bất định $\int_a^x F'(t)dt$ là một hàm số tuyệt đối liên tục. Do đó hiệu số $L(x) = F(x) - \int_a^x F'(t)dt$ cũng tuyệt đối liên tục, và vì $L'(x) = 0$ h.k.n., nên theo bổ đề trên $L(x) = L(a) = F(a)$ tức là

$$F(x) - \int_a^x F'(t)dt = F(a).$$ □

Như vậy: *một hàm số $F(x)$ là tuyệt đối liên tục khi và chỉ khi nó có thể biểu diễn thành tích phân bất định của một hàm số khả tích.*

Với Định lý 11, vấn đề II có thể coi là giải quyết xong, nếu ta chỉ quan tâm đến điều kiện về nguyên hàm $F(x)$. Nhưng nếu ta quan tâm

đến điều kiện về đạo hàm $F'(x)$ thì vấn đề sẽ phức tạp hơn, và đòi hỏi phải vận dụng *khái niệm tích phân Denjoy* (rộng hơn khái niệm tích phân Lebesgue) thì mới giải quyết triệt để được: có thể chứng minh rằng nếu $F(x)$ có đạo hàm $F'(x)$ hữu hạn tại mọi điểm thì công thức (21) đúng, nhưng trong đó tích phân phải hiểu theo nghĩa Denjoy.

Đối với tích phân Lebesgue ta có kết quả sau đây:

Công thức (21) đúng, nếu đạo hàm $F'(x)$ có tại mọi điểm và bị chặn .

Thật vậy, nếu $|F'(x)| \leq K$ thì $|F(x+h)-F(x)| = |F'(x+\theta h).h| \leq Kh$, cho nên

$$\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| \leq K \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) ,$$

do đó suy ra ngay $F(x)$ tuyệt đối liên tục, và vì thế công thức (21) đúng.

6. TÍCH PHÂN STIELJÈS

6.1. ĐỘ ĐO VÀ TÍCH PHÂN L.S. Trong $\mathbb{R}$, độ đo Lebesgue đã được xây dựng bằng cách xuất phát từ độ dài thông thường và khuếch thành độ đo trên một σ-đại số bao gồm các gian. Độ dài là một "hàm số gian", theo nghĩa: ứng với mỗi gian Δ có một số $|\Delta|$ gọi là độ dài của nó. Dưới đây ta sẽ xuất phát từ một "hàm số gian" tổng quát hơn độ dài và bằng cách tương tự sẽ xây dựng một độ đo tổng quát hơn độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}$, gọi là độ đo Lebesgue-Stieljès (L.S.).

Ta hãy lấy một hàm số đơn điệu không giảm $g(x)$ (bất kỳ) và xác định một hàm số G như sau trên các gian:

$$G[a,b] = g(b+0) - g(a-0); \quad G[a,b) = g(b-0) - g(a-0);$$
$$G(a,b] = g(b+0) - g(a+0); \quad G(a,b) = g(b-0) - g(a+0).$$

Sau đó, trên đại số $\mathcal{C}$ tạo nên do các tập có thể biểu diễn thành hợp của một số hữu hạn gian rời nhau, ta xác định cho mỗi tập $P = \cup_{i=1}^{n} \Delta_i \in \mathcal{C}$ (Δ_i là những gian rời nhau) :

$$m_g(P) = \sum_{i=1}^{n} G(\Delta_i). \tag{22}$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự như đối với độ đo (L) trên đường thẳng t (Chương 3, tiết 3), có thể chứng minh rằng m_g là một độ đo trên đại số $\mathcal{C}$ và là độ đo duy nhất thỏa mãn điều kiện : $m_g(\Delta) = G(\Delta)$ cho mọi gian.

Cách chứng minh dựa vào tính chất sau đây của G: cho trước một gian Δ và một số $\varepsilon > 0$ tùy ý, bao giờ cũng tồn tại một khoảng (mở) $\Delta' \supset \Delta$ sao cho $G(\Delta') \leq G(\Delta) + \varepsilon$. Thật vậy, nếu $\Delta = [a, b)$ chẳng hạn thì $G(\Delta) = g(b-0) - g(a-0)$, và ta phải tìm được một điểm $a' < a$ sao cho $0 < g(a-0) - g(x) \leq \varepsilon$ với mọi $x \in (a', a)$ và do đó $0 < g(a-0) - g(a'+0) \leq \varepsilon$; khi ấy $\Delta' = (a', b) \supset \Delta$ và $G(\Delta') = g(b-0) - g(a'+0) \leq G(\Delta) + \varepsilon$.

Theo Định lý 7, độ đo m_g trên $\mathcal{C}$ có thể khuếch thành một độ đo μ_g trên một σ-đại số $\mathcal{L}_g \supset \mathcal{F}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ (σ-đại số Borel). Độ đo này gọi là *độ đo Lebesgue-Stieljès* (L.S.) cảm sinh bởi hàm số g.

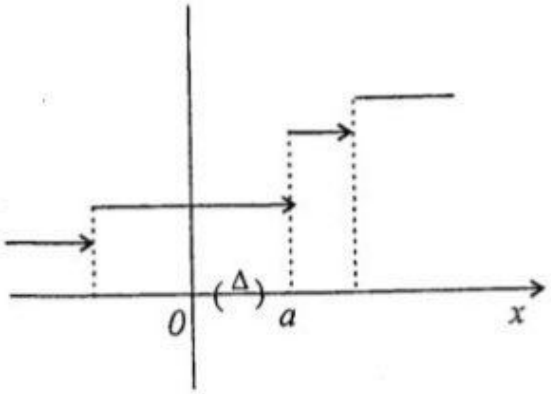
Dễ thấy rằng nếu hai hàm số $g_1(x)$ và $g_2(x)$ (không giảm) có giá trị bằng nhau tại mọi điểm, chỉ trừ tại những điểm gián đoạn, thì $\mu_{g_1} = \mu_{g_2}$, vì theo các công thức xác định $G(\Delta)$ thì giá trị của hàm số $g(x)$ tại những điểm gián đoạn không quan trọng. Do đó khi xác định độ đo L.S. cảm sinh bởi một hàm số $g(x)$ bao giờ cũng có thể coi như $g(x)$ liên tục bên phải (hoặc liên tục bên trái).

Ví dụ. 1. $g(x) = x$. Khi ấy $G(\Delta) = \Delta$: độ đo cảm sinh chính là độ đo Lebesgue trên đường thẳng.

2. $g(x)$ là một hàm bậc thang tăng dần. Ta có $\mu_g(\Delta) = 0$ nếu Δ không chứa điểm nhảy nào, $\mu_g[a] > 0$ đối với mỗi điểm nhảy a.

Độ đo L.S. thường gặp trong nhiều vấn đề thực tế. Chẳng hạn, nếu vật chất được phân bố trên đường thẳng và $g(x)$ biểu thị khối lượng tập trung trên nửa đường thẳng $(-\infty, x]$ thì độ đo $\mu_g(A)$ là khối lượng tập trung trên tập A; hoặc, nếu một đại lượng ngẫu nhiên ξ có thể lấy mọi giá trị thực, và $g(x)$ biểu thị xác suất để $-\infty < \xi \leq x$, thì độ đo $\mu_g(A)$ là xác suất để $\xi \in A$.

Cho μ_g là độ đo L.S. cảm sinh bởi một hàm số không giảm $g(x)$, $f(x)$ là một hàm số μ_g-đo được trên một tập A. Nếu tích phân $\int_A f(x)d\mu_g$ tồn tại thì nó cũng được gọi là *tích phân Lebesgue-Stieljès* (L.S.) của



Hình 15

$f(x)$ theo $g(x)$ trên A và cũng được ký hiệu:

$$(\text{L.S.}) \int_A f(x)dg(x).$$

Chú ý rằng nếu $\mu_g[a] > 0$ thì

$$\int_{[a]} f(x)dg(x) = f(a).\mu_g[a] > 0\ ,$$

cho nên các tích phân L.S. $\int_{(a,b)}$, $\int_{[a,b)}$, $\int_{[a,b]}$, $\int_{(a,b]}$ không nhất thiết bằng nhau. Để tiện, ta qui ước

$$(\text{L.S.}) \int_a^b f(x)dg(x) = \int_{(a,b)} + f(b)[g(b)-g(b-0)]+f(a)[g(a+0)-g(a)].$$

Trong trường hợp $g(x)$ là một hàm số có biến phân bị chặn trên đoạn $[a, b]$ thì theo kết quả ở mục 3,

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)\ ,$$

trong đó $g_1(x), g_2(x)$ đơn điệu không giảm và

$$g_1(x) = \frac{1}{2}[V(x) + g(x)],\ g_2(x) = \frac{1}{2}[V(x) - g(x)]\ ,$$

với $V(x) = V_a^x(g)$. Bằng cách cho $g(x) = 0$ nếu $x < a$ hoặc $x > b$ có thể coi như $g(x), g_1(x), g_2(x)$ được xác định trên toàn đường thẳng. Các

hàm số không giảm $g_1(x), g_2(x)$ cảm sinh những độ đo μ_{g_1}, μ_{g_2} trên các σ-đại số $\mathcal{L}_{g_1}, \mathcal{L}_{g_2} \supset \mathcal{B}$ (σ-đại số Borel). Khi ấy với mỗi $A \in \mathcal{L}_{g_1} \cap \mathcal{L}_{g_2}$ (chẳng hạn $A \in \mathcal{B}$) ta định nghĩa tích phân (L.S.) của $f(x)$ theo $g(x)$ trên A là

$$\int_A f(x)dg(x) = \int_A f(x)dg_1(x) - \int_A f(x)dg_2(x) ,$$

(nếu hiệu số này có nghĩa).

6.2. TÍCH PHÂN R.S. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$, xác định trên đoạn $[a, b]$. Ta hãy chia đoạn $[a, b]$ bởi các điểm

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

và thành lập tổng

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] ,$$

trong đó ξ_i là một điểm bất kỳ của đoạn $[x_i, x_{i+1}]$. Nếu khi $\max_i(x_{i+1} - x_i) \to 0$, tổng S dần tới một giới hạn hữu hạn không phụ thuộc cách chia, và cách chọn các điểm ξ_i, thì giới hạn ấy gọi là *tích phân Riemann-Stieljès (R.S.)* của $f(x)$ theo $g(x)$ và được ký hiệu

$$\text{(R.S.)} \int_a^b f(x)dg(x).$$

Định lý 12. *Nếu $f(x)$ liên tục và $g(x)$ có biến phân bị chặn và liên tục bên phải trên $[a, b]$ thì các tích phân (L.S.) và (R.S.) tồn tại và bằng nhau:*

$$\text{(L.S.)} \int_a^b f(x)dg(x) = \text{(R.S.)} \int_a^b f(x)dg(x).$$

Chứng minh. Cho $\{\sigma_m\}$ là một dãy những cách chia đoạn $[a, b]$ bởi các điểm

$$a = x_{m,0} < x_{m,1} < \ldots < x_{m,n_m} = b$$

sao cho $\max_i(x_{m,i+1} - x_{m,i}) \to 0$ $(m \to \infty)$. Ta hãy lấy trong mỗi đoạn $[x_{m,i}, x_{m,i+1}]$ một điểm $\xi_{m,i}$ và xác định các hàm bậc thang $f_m(x)$ như sau:

$$f_m(x) = f(\xi_{m,i})x_{m,i} \text{ với } x_{m,i} < x < x_{m,i+1} (i = 0, 1, \ldots, n_m - 1).$$

Rõ ràng $\mu_g(x_{m,i},\ x_{m,i+1}] = g(x_{m,i+1}) - g(x_{m,i})$ và

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{m,i})[g(x_{m,i+1}) - g(x_{m,i})] = \\ &= (\text{L.S.}) \int_{(a,b]} f_m(x)dg(x). \end{aligned}$$

Vì $f(x)$ liên tục nên nó bị chặn : $|f(x)| \le K$, và $f_m(x) \le K$ với mọi m. Vả lại $f_m(x) \to f(x)$ $(m \to \infty)$. Vậy theo Định lý 5 (hệ quả 1)

$$(\text{L.S.}) \int_{(a,b]} f_m(x)dg(x) \to (\text{L.S.}) \int_{(a,b]} f(x)dg(x)\ ,$$

hay

$$S_m \to (\text{L.S.}) \int_{(a,b]} f(x)dg(x).$$

Thành thử

$$\begin{aligned} (\text{R.S.}) \int_a^b f(x)dg(x) &= (\text{L.S.}) \int_{(a,b]} f(x)dg(x) \\ &= (\text{L.S.}) \int_{(a,b)} + f(b)[g(b) - g(b-0)] \\ &= (\text{L.S.}) \int_a^b f(x)dg(x)\ , \end{aligned}$$

vì $g(a+0) - g(a) = 0$ theo sự liên tục bên phải của $g(x)$. □

Định lý 13. *Nếu $f(x)$ liên tục và $g(x)$ tuyệt đối liên tục trên $[a, b]$ thì*

$$(R.S.) \int_a^b f(x)dg(x) = (\text{L}) \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Chứng minh. Ta xét hiệu số

$$H = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] - (\text{L}) \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Vì $g(x)$ tuyệt đối liên tục nên $g(x_{i+1}) - g(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(x)dx$, và ta có :

$$H = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)]g'(x)dx.$$

Dựa trên tính liên tục đều của $f(x)$, ta chọn δ đủ nhỏ để $\max_i(x_{i+1} - x_i) < \delta$ kéo theo $\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(\xi_i) - f(x)| < \varepsilon$ với mọi i. Khi ấy

$$|H| = \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |g'(x)|dx = \varepsilon \int_a^b |g'(x)|dx \ ,$$

và vì $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý ta phải có $H \to 0$. □

BÀI TẬP

Tích phân Lebesgue

1. Cho f là một hàm khả tích trên tập A theo độ đo μ và cho $A_n = \{x \in A : |f(x)| \ge n\}$. Chứng minh $n\mu(A_n) \to 0$.

2. Nếu f là một hàm khả tích không âm thì tích phân bất định của nó là một độ đo hữu hạn trên lớp các tập đo được.

3. Nếu f khả tích trên A thì với mọi số $\varepsilon > 0$

$$\mu\{x \in A : |f(x)| \ge \varepsilon\} < \infty.$$

4. Cho A là một tập đo được có độ đo μ hữu hạn và cho f là một hàm số đo được trên A. Tổng

$$S(f, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon.\mu(A_n) \ ,$$

trong đó $\varepsilon > 0$, $A_n = \{x : n\varepsilon \le f(x) < (n+1)\varepsilon\}$, thường gọi là một *tổng Lebesgue* của f. Nếu f khả tích trên A thì với mọi $\varepsilon > 0$ chuỗi $S(f, \varepsilon)$ hội tụ tuyệt đối và $\lim_{\varepsilon \to 0} S(f, \varepsilon) = \int f d\mu$.

Ngược lại, nếu chuỗi $S(f, \varepsilon)$ hội tụ tuyệt đối với một $\varepsilon > 0$ thì f khả tích trên A.

(Chú ý: $|\int_{A_n} f d\mu - n\varepsilon\mu(A_n)| \le \varepsilon\mu(A_n)$).

5. Nếu f là hàm đo được, g là hàm khả tích, và α, β là hai số thực sao cho $\alpha \le f(x) \le \beta$ h.k.n. thì có một số thực $\gamma, \alpha \le \gamma \le \beta$ sao cho

$$\int f|g|d\mu = \gamma . \int |g|d\mu.$$

(định lý giá trị trung bình)

Chỉ dẫn: $\alpha \int |g|d\mu \le \int f|g|d\mu \le \beta \int |g|d\mu.$

6. Cho n tập con đo được $A_1, A_2 \dots A_n$ của một tập đo được X có $\mu(X) < \infty$. Nếu mỗi $x \in X$ thuộc ít nhất q trong số các tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ thì ít nhất một trong các tập này có độ đo $\ge \frac{q}{n}\mu(X)$.

Chỉ dẫn: Xét hàm $f(x) =$ số các tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ chứa x.

7. Cho một hàm đo được $f(x) \ge 0$ trên A, và cho $f_N(x)$ là hàm bằng $f(x)$ khi $f(x) \le N$, và bằng 0 khi $f(x) > N$ (hàm chặt cụt ở N của $f(x)$). Nếu $f(x)$ hữu hạn h.k.n. thì

$$\lim_{N\to\infty} \int_A f_N(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu.$$

Điều kiện $f(x)$ hữu hạn h.k.n. không thể bỏ qua được.

Chỉ dẫn: Dùng Định lý 4.

8. Nếu $f_n \ge 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ và $\int_A f_n d\mu \to 0$ thì $f_n \to 0$ theo độ đo (trên A).

9. Hệ thức $\int \frac{|f_n|}{1+|f_n|}d\mu \to 0$ tương đương với : $f_n \xrightarrow{\mu} 0$.

Chỉ dẫn: Xem bài tập 8.

10. Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} \int_A |f_n|d\mu < \infty$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu$.

11. Nếu $\{f_n\}$ là một dãy hàm đo được trên A, và $|f_n| \le g$ với g khả tích trên A, thì

$$\int_A \overline{\lim} f_n d\mu \ge \overline{\lim} \int_A f_n d\mu \ge \underline{\lim} \int_A f_n d\mu \ge \int_A \underline{\lim} f_n d\mu$$

Tích độ đo và tích phân lặp.

12. Cho $C \subset A \times B$ là một tập có độ đo 0 và $A' \subset A$ là tập các điểm $x \in A$ sao cho tập $\{y \in B : (x, y) \in C\}$ có độ đo 0. Chứng minh rằng A' có độ đo 0 (độ đo trên A là μ, trên B là ν, trên $A \times B$ là $\lambda := \mu \times \nu$).

Chỉ dẫn: Tính $\int_{A\times B} \chi_C$

Nếu E, F là hai tập con của $X \times Y$ sao cho $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ với hầu hết mọi x trong X thì $\lambda(E) = \lambda(F)$.

14. Nếu f, g là hàm khả tích trên X, Y (tương ứng) thì hàm h xác định bởi $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ khả tích trên $X \times Y$ và

$$\int h d(\mu \times \nu) = \int f d\mu \cdot g d\nu$$

Tích phân và đạo hàm trong $\mathbb{R}$.

15. Nếu $f(x)$ hữu hạn tại x và

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt = 0$$

thì điểm x gọi là *điểm Lebesgue* của hàm f. Chứng minh rằng tại mỗi điểm Lebesgue x của hạm f, tích phân $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ có đạo hàm bằng $f(x)$.

Chỉ dẫn: Chứng minh rằng

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt.$$

16. Mọi điểm liên tục của một hàm khả tích đều là điểm Lebesgue của nó.

17. Nếu f khả tích trên $[a, b]$ thì hầu hết mọi điểm trên $[a, b]$ đều là điểm Lebesgue của f.

Chỉ dẫn: cho r là một số hữu tỉ. Chứng minh rằng với mọi x trên một tập E_r nào đó có độ đo bằng $b - a$, ta có:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r|dt = |f(x) - r|$$

(dùng Định lý 10). Khi ấy tập $E = \cap_r E_r$ cũng có độ $b - a$, và mọi $x_0 \in E$ tại đó $f(x_0)$ hữu hạn đều là điểm Lebesgue của f.

18. Một điểm x được gọi là *điểm mật độ* của một tập đo được A nếu $\lim_{|\Delta|\to 0} \frac{\mu(A \cap \Delta)}{|\Delta|} = 1$, trong đó Δ là một khoảng chứa x. Chứng minh rằng hầu hết mọi điểm của một tập đo được A là điểm mật độ của nó.

Chỉ dẫn: Xét tích phân $\int_A^x \chi_A(t)dt$ ($A \subset [a,b]$, χ_A là hàm đặc trưng của A).

19. Tích của hai hàm có biến phân bị chặn cũng là hàm số có biến phân bị chặn. Nếu $F(x) > \alpha > 0$ là hàm có biến phân bị chặn thì $\frac{1}{F(x)}$ cũng là hàm có biến phân bị chặn .

20. Một hàm $f(x)$ *thỏa mãn điều kiện Lipschitz* nếu có một hằng số K sao cho $|f(x'') - f(x')| \leq K|x'' - x'|$ với mọi x', x''. Nếu một hàm f thỏa mãn điều kiện Lipschitz thì nó phải tuyệt đối liên tục và đạo hàm của nó tồn tại và bị chặn hầu khắp nơi. Ngược lại có đúng không?

21. Nếu $f(x)$ tuyệt đối liên tục thì với $p \geq 1$ hàm $|f(x)|^p$ cũng tuyệt đối liên tục.

Chương 5

KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH ĐỊNH CHUẨN

1. KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH ĐỊNH CHUẨN

1.1. QUAN ĐIỂM KHÔNG GIAN TRỪU TƯỢNG VÀ TOÁN TỬ TRONG TOÁN HỌC. Trong toán học ta gặp rất nhiều vấn đề liên quan đến việc giải các phương trình : phương trình đại số, phương trình vi phân thường, phương trình đạo hàm riêng với điều kiện biên, phương trình tích phân, phương trình vi tích phân v.v... Trong đó các phương trình tuyến tính chiếm một vị trí đặc biệt quan trọng.

Mỗi bài toán về phương trình có những đặc điểm và cách giải riêng. Tuy nhiên người ta đã nhận thấy rằng trong cách xử lý tất cả các bài toán đó có những phương pháp cơ bản giống hệt nhau và có những vấn đề tuy hình thức khác nhau nhưng thực chất chỉ là một. Mặt khác, người ta thường không chỉ quan tâm đến một phương trình đơn độc, mà phải chú ý cả một lớp phương trình (chẳng hạn, khi nghiên cứu sự phụ thuộc của nghiệm một bài toán biên đối với vế phải của phương trình, hay đối với các điều kiện biên). Do đó, cần phải khái quát nhiều tình huống cụ thể thành một lý thuyết trừu tượng, để có một cách nhìn mới bao quát được, theo một quan điểm nhất quán, nhiều sự kiện riêng lẻ, đồng thời xây dựng những công cụ chung, có khả năng xử lý cùng một lúc hàng

loạt bài toán liên quan đến các lớp phương trình trong những lĩnh vực khác nhau.

Đi sâu vào một bài toán về phương trình ta gặp: 1) *một* cấu trúc không gian trừu tượng, tức là một tập trong đó có cho những quan hệ giữa các phần tử và những qui tắc tổ hợp các phần tử; 2) *một phép biến đổi* (ánh xạ, toán tử) trong không gian ấy, hoặc tổng quát hơn, từ không gian ấy vào một không gian khác. Chẳng hạn, xét phương trình vi phân cấp k, với hệ số hằng số:

$$ax(t) + a_1x'(t) + \cdots + a_kx^{(k)}(t) = b(t). \tag{1}$$

Nghiệm mà ta cần tìm là phần tử của tập X các hàm số có đạo hàm liên tục đến cấp k; trong tập này, có thể thực hiện các phép toán tuyến tính (cộng hai phần tử, nhân một phần tử với một số) và, nếu xét những nghiệm xấp xỉ, thì phải hiểu, theo một nghĩa nào đó, thế nào là hai phần tử " gần nhau". Phương trình có thể viết lại dưới dạng cô đặc $Ax = b$, trong đó A là toán tử biến mỗi phần tử $x(t)$ của tập nói trên thành vế trái của (1). Như vậy phương trình (1) gắn liền với không gian X (là không gian tuyến tính định chuẩn như sau sẽ thấy), và toán tử A (toán tử tuyến tính vì nó bảo toàn các phép toán tuyến tính).

Tóm lại, đằng sau mỗi bài toán có một cấu trúc không gian trừu tượng và một toán tử. Do đó xây dựng lý thuyết các không gian trừu tượng và các toán tử trong các không gian đó sẽ giúp ta có công cụ để xử lý dễ dàng hơn các bài toán về phương trình.

Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu một lớp không gian trừu tượng thường gặp là không gian tuyến tính định chuẩn, và lớp toán tử quan trọng nhất là toán tử tuyến tính (bao gồm cả phiếm hàm tuyến tính). Những vấn đề này xuất phát từ lý thuyết phương trình nhưng sau đó đã được áp dụng trong rất nhiều lĩnh vực toán học khác nhau: tính biến phân, lý thuyết xấp xỉ, phương pháp tính, lý thuyết xác suất v.v...

1.2. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH. Trong các không gian metric (Chương 2) chúng ta đã nghiên cứu những vấn đề liên quan tới khoảng cách như sự hội tụ (phép tiến qua giới hạn) và tính liên tục. Nhưng trong giải tích còn nhiều vấn đề khác liên quan tới các phép toán tuyến tính: cộng hai phần tử với nhau và nhân một phần tử với một số. Để nghiên cứu các vấn đề này, chúng ta đưa vào khái niệm không gian

tuyến tính.

Đại thể một không gian tuyến tính là một tập trong đó có xác định phép cộng hai phần tử với nhau và phép nhân một phần tử với một số, phép cộng và phép nhân này có các tính chất thông thường của phép cộng vectơ hình học và phép nhân vectơ hình học với số.

Chính xác hơn, một tập X (mà các phần tử có thể là những đối tượng bất kỳ) được gọi là *một không gian tuyến tính* hay (*không gian vectơ*), nếu:

a) Ứng với mỗi cặp phần tử x, y của X ta có, theo một qui tắc nào đó, một phần tử của X, gọi là *tổng của x với y*, và được ký hiệu $x+y$; ứng với mỗi phần tử x của X và mỗi số thực α ta có, theo một qui tắc nào đó, một phần tử của X gọi là *tích của x với α* và được ký hiệu αx.

b) Các qui tắc nói trên thỏa mãn 8 điều kiện (tiên đề) sau đây:

Bốn tiên đề đầu mô tả các tính chất của phép cộng (phép lấy tổng của hai phần tử).

1) $x+y=y+x$ (tính giao hoán của phép cộng).

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (tính kết hợp của phép cộng).

3) Tồn tại một phần tử 0 sao cho $x+0=x$ với mọi $x \in X$ (phần tử này gọi là phần tử không)[1].

4) Ứng với mỗi phần tử $x \in X$ ta có một phần tử $-x \in X$ sao cho $x+(-x)=0$ (phần tử $-x$ gọi là phần tử đối của x).

Ta thấy ngay rằng các phần tử 0 và $-x$, mà các tiên đề 3, 4 đòi hỏi phải có, được xác định một cách duy nhất. Thật vậy nếu có hai phần tử không: 0 và 0' thì một mặt ta có $0+0'=0$, mặt khác $0'+0=0'$ nên theo tiên đề 1 ta suy ra $0=0'$; nếu có hai phần tử đối của x : $-x$ và y, thì ta có $y=y+0=y+x+(-x)=(y+x)+(-x)=(x+y)+(-x)=0+(-x)=(-x)+0=-x$.

Như đã biết trong đại số, các tiên đề 1-4 xác định trong X một cấu trúc nhóm giao hoán (đối với phép cộng).

[1]Đúng ra phải dùng ký hiệu khác để chỉ phần tử không, vì ký hiệu "0" đã được dùng để chỉ số không. Nhưng để tránh bớt cồng kềnh, ở đây dùng cùng một ký hiệu "0" cho cả hai khái niệm. Độc giả có thể phân biệt dễ dàng khi nào "0" chỉ *số không*, khi nào nó chỉ *phần tử không*.

Bốn tiên đề sau mô tả liên hệ giữa phép cộng phần tử và phép nhân phần tử với số.

5) $1.x = x$.
6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (α, β là những số bất kỳ).
7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Từ đây ta suy ra rằng phần tử đối của x là $(-1)x$, và $0x = 0$ ("0" ở vế trái chỉ số không, "0" ở vế phải chỉ phần tử không). Thật vậy, $x+(-1)x = (1+(-1))x = 0x = 0x+(x+(-x)) = (0x+x)+(-x) = (0+1)x+(-x) = x+(-x) = 0$.

Xuất phát từ phép cộng, ta định nghĩa phép trừ, bằng cách gọi *hiệu* của x, y là phần tử $x - y = x + (-y)$. Các tính chất sau đây có thể chứng minh dễ dàng:

1) $y + z = x \Leftrightarrow z = x - y$.

Thật vậy $y + z = x$ lần lượt tương đương với:

$y + z = x + (-y) + y$, $z = x + (-y)$, $z = x - y$.

2) $(\alpha - \beta) = \alpha x - \beta x$.

Vì $(\alpha-\beta)x = (\alpha+(-1)\beta)x = \alpha x+(-1)\beta x = \alpha x+(-\beta x) = \alpha x-\beta x$.

3) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$.

Vì $\alpha(x-y) = \alpha(x+(-y)) = \alpha x+\alpha(-1)y = \alpha x+(-\alpha y) = \alpha x-\alpha y$.

4) Nếu $\alpha \neq 0$ thì $\alpha x = \alpha y \Leftrightarrow x = y$.

Vì $\alpha x = \alpha y$ lần lượt tương đương với $\frac{1}{\alpha}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}(\alpha y)$; $x = y$.

5) Nếu $\alpha \neq \beta$ thì $\alpha x = \beta x \Leftrightarrow x = 0$.

Vì $\alpha x = \beta x$ lần lượt tương đương với $\alpha x-\beta x = 0$; $(\alpha-\beta)x = 0$; $x = 0$.

Trên đây là định nghĩa không gian tuyến tính *thực*. Nếu trong định nghĩa ấy ta thay các số thực bằng số phức thì ta có không gian tuyến tính *phức*.

Không gian tuyến tính cũng thường gọi là *không gian vectơ*, và các phần tử của nó cũng gọi là các *vectơ*.

Các không gian metric mà ta đã gặp trước đây (xem Chương 2) $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{C}_{[a,n]}$ $\mathbb{C}^L_{[a,b]}$ đều là không gian tuyến tính. Trong $\mathbb{R}^k$, tổng của hai vectơ $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ là vectơ $x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_k + \eta_k)$; tích của vectơ $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ với số α là vectơ $\alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_k)$.

Trong $\mathbb{C}_{[a,b]}$ (hoặc $\mathbb{C}^L_{[a,b]}$) tổng của hai phần tử $x = x(t)$, $y = y(t)$ là $x + y = x(t) + y(t)$; tích của phần tử $x = x(t)$ với số α là phần tử $\alpha x = \alpha x(t)$.

Hai không gian tuyến tính X, X' gọi là *đẳng cấu*, nếu có một ánh xạ 1-1 π từ X lên X' bảo toàn các phép cộng và phép nhân với số, nghĩa là sao cho $\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y)$ và $\pi(\alpha x) = \alpha\pi(x)$.

1.3. VECTƠ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, KHÔNG GIAN CON. Một *tổ hợp tuyến tính* của các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ là một tổng có dạng $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$. Các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ gọi là *độc lập tuyến tính* nếu bất cứ tổ hợp tuyến tính nào của các vectơ ấy mà đã bằng không thì phải có mọi hệ số bằng không, nghĩa là : $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$ nhất thiết kéo theo $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ gọi là *phụ thuộc tuyến tính*, nếu chúng không độc lập tuyến tính, tức là tồn tại những số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ trong đó có ít nhất một số khác 0, sao cho $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$. Chẳng hạn, hai vectơ x và $-x$ là phụ thuộc tuyến tính vì $1.x + 1.(-x) = 0$. Nếu trong các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ có một cái bằng 0, thì rõ ràng chúng là phụ thuộc tuyến tính.

Một không gian tuyến tính X được gọi là *không gian k chiều* (thứ nguyên k) nếu trong X có k vectơ độc lập tuyến tính và không có $k+1$ vectơ độc lập tuyến tính. Trong trường hợp này một tập k vectơ độc lập tuyến tính của X gọi là một *cơ sở* của nó. Các không gian k chiều, với k là một số nguyên bất kỳ ≥ 0 gọi là *không gian hữu hạn chiều*. Một không gian không hữu hạn chiều, tức là sao cho với mọi k đều tìm được k vectơ độc lập tuyến tính của nó, gọi là *không gian vô số chiều*.

Chẳng hạn không gian $\mathbb{R}^k$ là k chiều, với cơ sở là $x_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $x_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, x_k = (0, \ldots, 0, 1)$. Không gian gồm một phần tử duy nhất là phần tử không (0) là 0 chiều, (vì sao?). Không gian $\mathbb{C}_{[a,b]}$ là vô số chiều vì dù k lớn bao nhiêu cũng có k phần tử của nó

độc lập tuyến tính, đó là $x_1(t) \equiv t,\ x_2(t) \equiv t^2, \ldots, x_k(t) \equiv t^k$ (rõ ràng $\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_k t^k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$).

Nếu X là không gian k chiều và $x_1, x_2, \ldots, x_k$ là một cơ sở của nó thì mọi $x \in X$ đều được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_k x_k, \tag{2}$$

Thật vậy, vì X là k chiều nên các vectơ $x, x_1, x_2, \ldots, x_k$ phải phụ thuộc tuyến tính, tức là tồn tại các số $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ không cùng bằng 0 tất cả, sao cho $\alpha x + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$. Ta phải có $\alpha \neq 0$ vì nếu $\alpha = 0$ thì sẽ có $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$ và các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sẽ phụ thuộc tuyến tính, trái với giả thiết đó là một cơ sở của X.

Vậy $x = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha} x_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha} x_2 - \cdots - \dfrac{\alpha_k}{\alpha} x_k$ nghĩa là ta có (2), với $\xi_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha}$. Nếu ta cũng có

$$x = \xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \cdots + \xi_k' x_k,$$

thì trừ từng vế đẳng thức này vào (2) ta được $0 = (\xi_1 - \xi_1') x_1 + (\xi_2 - \xi_2') x_2 + \cdots + (\xi_k - \xi_k') x_k$, từ đó, do sự độc lập tuyến tính của các $x_1, x_2, \ldots, x_k$, suy ra $\xi_1 - \xi_1' = 0,\ \xi_2 - \xi_2' = 0, \ldots, \xi_k - \xi_k' = 0$, tức là $\xi_i = \xi_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, chứng tỏ cách biểu diễn (2), là duy nhất.

Các số $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ gọi là các *tọa độ* của vectơ x đối với cơ sở $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Nếu ta làm phép ánh xạ $1 - 1 : x \leftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, thì rõ ràng đó là một phép đẳng cấu giữa X và $\mathbb{R}^k$ (không gian Euclide k chiều). Như vậy *một không gian tuyến tính k chiều bao giờ cũng đẳng cấu với không gian $\mathbb{R}^k$*. Chính vì lý do ấy mà người ta đã mở rộng ra, gọi chung các không gian tuyến tính (dù là hữu hạn chiều hay vố số chiều) là không gian vectơ và gọi các phần tử của chúng là vectơ.

Một tập con không rỗng M của một không gian tuyến tính X gọi là một *không gian con*, nếu nó kín đối với phép cộng phần tử và phép nhân phần tử với số, nghĩa là : 1) $x \in M,\ y \in M \Rightarrow x + y \in M$; 2) $x \in M \Rightarrow \alpha x \in M$ (α là số bất kỳ). Rõ ràng bản thân M cũng là không gian tuyến tính, nếu giữ các phép cộng vectơ và nhân vectơ với số như trong X. Chẳng hạn, tập các hàm $x(t) \in \mathbb{C}_{[a,b]}$ triệt tiêu tại một điểm cố định $t_0 \in [a, b]$ làm thành một không gian con của $\mathbb{C}_{[a,b]}$.

Dĩ nhiên không gian con nhỏ nhất của một không gian tuyến tính X là $\{0\}$, còn không gian con lớn nhất là chính X.

Bây giờ cho A là một tập con bất kỳ, không rỗng của X. Dĩ nhiên bao giờ cũng có ít nhất một không gian con bao hàm A, đó chính là X. Vậy họ các không gian con bao hàm A là không rỗng . Giao của họ ấy rõ ràng cũng là một không gian con, và là không gian con nhỏ nhất bao hàm A. Ta gọi nó là *không gian con sinh bởi tập* A (hay là *bao tuyến tính* của tập A). Dễ thấy rằng:

Không gian con sinh bởi tập A chẳng qua là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính hữu hạn: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$ của những phần tử của A.

Thật vậy, tập tất cả các tổ hợp đó đúng là một không gian con chứa A, vì tổng của hai tổ hợp cũng là một tổ hợp, tích của một tổ hợp với một số bất kỳ cũng là một tổ hợp, và mỗi phần tử $x \in A$ có thể coi là một tổ hợp. Mặt khác bất kỳ không gian con nào chứa A thì phải chứa tất cả các tổ hợp đó, cho nên tập tất cả các tổ hợp đó chính là không gian con nhỏ nhất chứa A.

1.4. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN. Các không gian tuyến tính đơn thuần là đối tượng nghiên cứu của đại số tuyến tính. Còn trong giải tích hàm ta chú ý những không gian tuyến tính nào đồng thời cũng là không gian metric , bởi vì ta không chỉ quan tâm đến các phép toán đại số, mà còn chú ý các phép toán giải tích (như tiến qua giới hạn) là những phép toán có nghĩa trong các không gian metric . Tuy nhiên, nếu giữa các phép toán đại số và metric của không gian không có sự liên hệ gì cả, thì việc nghiên cứu không gian đó sẽ không đưa lại điều gì mới, vì các tính chất của nó sẽ suy ra một cách độc lập từ lý thuyết các không gian tuyến tính và lý thuyết các không gian metric . Vì vậy, để có một lý thuyết phong phú mà các sự kiện kết hợp chặt chẽ các khái niệm đại số với các khái niệm metric , người ta đưa vào một lớp không gian vừa metric , vừa tuyến tính, nhưng trong đó metric không tách rời với các phép toán đại số, mà được xác định tương hợp với các phép toán này.

Hãy xét không gian $\mathbb{R}^k$ chẳng hạn. Đó là một không gian tuyến tính, đồng thời nó có metric là $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - \eta_i)^2}$. Dễ thấy rằng metric này liên hệ như sau với các phép toán cộng vectơ và nhân vectơ

với số: a) $\rho(x+z,\ y+z) = \rho(x,y)$, với mọi x, y, z, nghĩa là khoảng cách giữa x, y không thay đổi khi ta tịnh tiến x, y cùng một vectơ z ; b) $\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\rho(x,y)$ với mọi x, y và mọi số α, nghĩa là: khoảng cách giữa x, y được nhân lên với $|\alpha|$ khi ta nhân cả hai vectơ x, y với cùng một số α. Tính chất a) nói lên tính *bất biến* của metric trong tịnh tiến, tính chất b) nói lên tính *thuần nhất* của nó trong vị tự. Người ta đã nhận thấy rằng chính sự tương hợp đó giữa metric với các phép toán tuyến tính đẻ ra nhiều tính chất quan trọng mới cần được nghiên cứu. Từ đó, khái quát lên, người ta đi đến khái niệm không gian tuyến tính định chuẩn sau đây.

Một *không gian tuyến tính định chuẩn* (hoặc vắn tắt : *không gian định chuẩn*) là một tập X vừa là không gian tuyến tính, vừa là không gian metric, trong đó metric $\rho(x,y)$ liên hệ với các phép toán tuyến tính bởi các điều kiện:

a) Bất biến (trong tịnh tiến),
$\rho(x+z,\ y+z) = \rho(x,y)$ với mọi $x, y, z \in X$.
b) Thuần nhất (trong vị tự):
$\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\rho(x,y)$ với mọi $x, y \in X$, và mọi số α.

Do điều kiện a) ta thấy rằng $\rho(x,y) = \rho(x-y,\ y-y) = \rho(x-y,\ 0)$, tức là: khoảng cách giữa hai điểm x, y bằng khoảng cách từ hiệu $x-y$ của chúng đến điểm không. Vì vậy, chỉ cần biết khoảng cách từ điểm không tới các điểm khác là suy ra được khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ. Khoảng cách $\rho(x,0)$ từ điểm không tới x gọi là *chuẩn* (hay độ dài) của x, và được ký hiệu $\|x\|$. Từ các tiên đề về metric và các điều kiện a) và b) ta suy ra dễ dàng các tính chất sau đây của chuẩn:

1. $\|x\| > 0$ nếu $x \neq 0$; $\|x\| = 0$ nếu $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |a|\|x\|$ (tính thuần nhất của chuẩn) ,
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác).

Ngược lại, nếu trong một không gian tuyến tính X ta xác định một chuẩn, nghĩa là cho ứng với mỗi phần tử x một số $\|x\| \geq 0$ thỏa mãn ba điều kiện trên, thì ta biến nó thành một không gian định chuẩn, với metric :

$$\rho(x,y) = \|x-y\|. \tag{3}$$

(Rõ ràng các điều kiện a) và b) được thỏa mãn). Vì vậy người ta cũng định nghĩa:

Một không gian định chuẩn là một không gian tuyến tính X, trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in X$, ta có một số $\|x\|$, gọi là chuẩn của nó, sao cho các điều kiện 1,2,3 được thỏa mãn, với mọi $x, y \in X$, và mọi số α.

Định nghĩa này không qua khái niệm metric, và là định nghĩa thường dùng nhất, vì trong nhiều trường hợp cụ thể khái niệm chuẩn đi trước khái niệm metric .

Các không gian tuyến tính (và metric) đã xét ở tiết 1: $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{C}^L_{[a,b]}$ đều là không gian định chuẩn, với các chuẩn như sau:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &: \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2}, \\ \mathbb{C}_{[a,b]} &: \|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|, \\ \mathbb{C}^L_{[a,b]} &: \|x\| = \int_a^b |x(t)|dt. \end{aligned}$$

Không gian $\mathbb{D}^k_{[a,b]}$, gồm tất cả các hàm $x(t)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm liên tục cho đến cấp k, cũng là không gian định chuẩn: các phép toán tuyến tính như trong $\mathbb{C}_{[a,b]}$, còn chuẩn được xác định bởi:

$$\|x\| = \max_{a \le t \le b} \{|x(t)|,\ |x'(t)|, \ldots, |x^{(k)}(t)|\}$$

$(x^{(i)}(t))$ là đạo hàm cấp i của $x(t)$.

Không gian $\mathbb{V}_{[a,b]}$ gồm tất cả các hàm có biến phân bị chặn trên đoạn $[a, b]$, với các phép toán tuyến tính thông thường, cũng là không gian định chuẩn, với chuẩn là $\|x\| = V_a^b(x)$ (biến phân của x trên đoạn $[a, b]$).

Ngoài ra trong tiết 2 ta sẽ nghiên cứu một lớp không gian định chuẩn quan trọng nữa là các không gian $\mathbb{L}^p$.

Để ý rằng cùng một không gian tuyến tính, hoặc nói rộng hơn, hai không gian tuyến tính đẳng cấu, có thể có cách định chuẩn khác nhau, chẳng hạn $\mathbb{C}_{[a,b]}$ và $\mathbb{C}^L_{[a,b]}$. Nếu hai không gian định chuẩn mà vừa đẳng cấu về phương diện không gian tuyến tính, vừa đẳng cự về phương diện

không gian metric , thì ta nói chúng là *tuyến tính đẳng cự* (hoặc đôi khi cũng nói là đẳng cấu). Chẳng hạn $\mathbb{C}_{[0,1]}$ và $\mathbb{C}_{[0,2]}$ là tuyến tính đẳng cự (cho mỗi $x(t) \in \mathbb{C}_{[0,1]}$ ứng với $x(2t) \in \mathbb{C}_{[0,2]}$).

1.5. SỰ HỘI TỤ TRONG KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN. Vì không gian định chuẩn là trường hợp riêng của không gian metric nên tất cả các sự kiện đã chứng minh cho không gian metric đều đúng cho không gian định chuẩn. Nhưng vì tầm quan trọng của không gian định chuẩn nên cần nhắc lại một số sự kiện ấy, và phát biểu theo chuẩn (thay cho metric).

1) $x_n \to x_0$ (dãy x_n hội tụ tới x_0) có nghĩa là $\|x_n - x_0\| \to 0$, vì $\rho(x_n, x_0)$ ở đây là $\|x_n - x_0\|$ (theo (3)).

2) Nếu $x_n \to x_0$ thì $\|x_n\| \to \|x_0\|$, nói khác đi, *chuẩn* $\|x\|$ *là một hàm liên tục của* x.

Để chứng minh điều này, trước hết ta để ý rằng với mọi x, y:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|. \tag{4}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức tam giác $\|x\| \le \|y\| + \|x - y\|$, hay $\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|$, và đổi vai trò của x và y ta lại có $\|y\| - \|x\| \le \|x - y\|$, từ đó suy ra (4) .

Áp dụng công thức (4) ta có:

$$\big|\|x_n\| - \|x_0\|\big| \le \|x_n - x_0\|.$$

Vậy nếu $\|x_n - x_0\| \to 0$ thì càng phải có $\big|\|x_n\| - \|x_0\|\big| \to 0$, chính là điều đã khẳng định.

3) *Mọi dãy hội tụ đều bị chặn*, tức là : nếu x_n hội tụ thì $(\exists K)$ $(\forall n)$ $\|x_n\| \le K$.

Thật vậy, giả sử $x_n \to x_0$. Theo trên $\|x_n\| \to \|x_0\|$, cho nên $(\exists n_0)$ $(\forall n \ge n_0)$ $\|x_n\| \le \|x_0\| + 1$. Đặt K là số lớn nhất trong các số: $\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|$, $\|x_0\| + 1$, thì rõ ràng $(\forall n)$ $\|x_n\| \le K$.

4) Nếu $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ thì $x_n + y_n \to x_0 + y_0$. Nếu $x_n \to x_0$, $\alpha_n \to \alpha_0$, thì $\alpha_n x_n \to \alpha_0 x_0$. Nói khác đi, *các phép toán* $x + y$ *và* αx *là liên tục*.

Thật vậy, $\|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \to 0$, và $\|a_n x_n - \alpha_0 x_0\| = \|(\alpha_n x_n - \alpha_n x_0) + (\alpha_n x_0 - \alpha_0 x_0)\| \leq |\alpha_n| . \|x_n - x_0\| + |\alpha_n - \alpha_0| . \|x_0\| \to 0$.

5) Một *dãy cơ bản* trong không gian định chuẩn X là một dãy $x_n \in X$ sao cho $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$. Nếu trong không gian định chuẩn X mọi dãy cơ bản đều hội tụ, tức là : $\|x_n - x_m\| \to 0$ kéo theo sự tồn tại một $x_0 \in X$ sao cho $x_n \to x_0$, thì không gian ấy được gọi là *đủ* (theo định nghĩa trước đây về không gian metric đủ). Vì người đầu tiên xây dựng lý thuyết không gian định chuẩn là Banach (nhà toán học Ba Lan) đã chú trọng nhiều nhất các không gian đủ, nên người ta thường gọi các không gian định chuẩn đủ là *không gian Banach.*

Một không gian định chuẩn X không đủ bao giờ cũng có thể *bổ sung* (thêm những phần tử mới) thành một không gian Banach. Muốn như thế người ta xem nó là một không gian metric không đủ để bổ sung nó thành không gian metric đủ $\widehat{X}$ (chương II, tiết 3), sau đó các phép toán đại số và chuẩn được mở rộng cho các phần tử mới để biến $\widehat{X}$ thành không gian định chuẩn đủ. Ta không đi sâu vào vấn đề này.

6) Một điều mới trong không gian định chuẩn so với các không gian metric và các không gian tuyến tính, là trong không gian định chuẩn ta có thể xét các *chuỗi* vô tận:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \tag{5}$$

Chuỗi này gọi là *hội tụ* nếu các tổng bộ phận $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ của nó lập thành một dãy hội tụ. Trong trường hợp đó giới hạn của s_n sẽ gọi là *tổng* của chuỗi (5).

Chuỗi (5) gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi số $\|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \cdots$ hội tụ. Đáng chú ý là:

Trong không gian Banach, mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối đều hội tụ và ta có ước lượng:

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

Thật vậy, với $n > m$: $\|s_n - s_m\| = \|x_{n+1} + \ldots + x_m\| \leq \|x_{n+1}\| + \ldots + \|x_m\|$, cho nên nếu chuỗi $\|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \ldots$ hội tụ thì dãy

s_n là cơ bản, và vì không gian đủ, nên s_n phải có giới hạn, nghĩa là chuỗi (5) hội tụ. Ta có, với mọi n,

$$\|s_n\| = \|\sum_{k=1}^{n} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

từ đó, tiến qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta được ước lượng nói trên.

2. KHÔNG GIAN CÁC HÀM CÓ LŨY THỪA BẬC p KHẢ TÍCH

Trong các không gian định chuẩn có một lớp không gian Banach đặc biệt quan trọng là các không gian $\mathbb{L}^p$ mà dưới đây ta sẽ khảo sát.

2.1. HAI BẤT ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH PHÂN. Trước hết để chuẩn bị ta chứng minh hai bất đẳng thức cơ bản.

Bất đẳng thức Hölder. Cho một không gian E và một độ đo μ trên một σ-đại số $\mathcal{F}$ các tập con của E. Nếu $f(x), g(x)$ là những hàm số đo được xác định trên E, và p, q là hai số thực sao cho $1 < p < \infty$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ thì

$$\int_E |fg| d\mu \leq \Big(\int_E |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_E |g|^q d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{6}$$

Cách chứng minh dựa vào bổ đề sau:

Bổ đề: *Nếu a, b không âm, và p, q là những số như trên thì ta có:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{7}$$

Thật vậy, xét $\varphi(t) = \frac{t}{p} + \frac{1}{q} - t^{1/p}$ $(t \geq 0)$, ta thấy $\varphi(1) = 0$ và $\varphi'(t) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}t^{1/p-1}$ dương với $t > 1$, âm với $t < 1$, chứng tỏ rằng $\varphi(t)$ đạt cực tiểu tại $t = 1$. Do đó với mọi $t \geq 0$ ta có $\frac{t}{p} + \frac{1}{q} - t^{1/p} \geq 0$. Nói riêng với $t = a^p b^{-q} \geq 0$ (có thể giả thiết $b > 0$ vì nếu $b = 0$ thì (7) hiển nhiên) ta có $\frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q} - ab^{p/q} \geq 0$ hay $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \geq 0$, đó chính là bất đẳng thức (7).

Áp dụng bất đẳng thức này cho $a = \dfrac{|f|}{\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$, $b = \dfrac{|g|}{\left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$,

ta được:

$$\frac{|fg|}{\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|f|^p}{p\left(\int |f|^p\right)} + \frac{|g|^q}{q\left(\int |g|^q\right)}.$$

Lấy tích phân hai vế ta có:

$$\frac{\int |fg|}{\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\int |f|^p}{p\left(\int |f|^p\right)} + \frac{\int |g|^q}{q\left(\int |g|^q\right)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

từ đó suy ra bất đẳng thức Hölder. Trong suy luận vừa rồi đã mặc nhiên giả thiết rằng các tích phân ở vế trái của (6) là hữu hạn và dương. Nhưng nếu một trong các tích phân ấy bằng vô cực thì bất đẳng thức (6) hiển nhiên. Còn nếu một trong các tích phân bằng 0, chẳng hạn $\int |f|^p = 0$ thì ta biết rằng $f(x) = 0$ hầu khắp nơi trên E (Hệ quả 2 của tính chất bảo toàn thứ tự của tích phân ở Chương 4, mục 2.3), cho nên $f(x).g(x) = 0$ hầu khắp nơi và bất đẳng thức (6) cũng hiển nhiên. Vậy bất đẳng thức Hölder luôn luôn đúng.

Khi $p = q = 2$ ta có bất đẳng thức sau đây gọi là bất đẳng thức Schwarz-Buniakowski:

$$\int |fg| \leq \left(\int |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Bất đẳng thức Minkowski. Nếu $f(x), g(x)$ là hai hàm số đo được trên E, và $1 \leq p < \infty$ thì

$$\left(\int_E |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (8)$$

Với $p = 1$ bất đẳng thức rõ ràng đúng nên chỉ cần xét $1 < p < \infty$.

Chọn q sao cho $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ và dựa vào bất đẳng thức (6) ta có

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p &\le \int \big(|f|+|g|\big)|f+g|^{p-1} = \\ &= \int |f|\,|f+g|^{p-1} + \int |g|\,|f+g|^{p-1} \le \\ &\le \Big(\int |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int |f+g|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}} + \\ &+ \Big(\int |g|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int |f+g|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \Big|\Big(\int |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \int |g|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big|\Big(\int |f+g|^p\Big)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

từ đó

$$\Big(\int |f+g|^p\Big)^{1-\frac{1}{q}} \le \Big(\int |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int |g|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

và để ý rằng $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ ta được (3).

Bây giờ ta định nghĩa không gian $\mathbb{L}^p$.

2.2. KHÔNG GIAN $\mathbb{L}^p$. Cho một không gian E và một độ đo μ trên một σ-đại số $\mathcal{F}$ các tập con của E. Họ tất cả các hàm số $f(x)$ có lũy thừa bậc p $(1 \le p < \infty)$ của modun khả tích trên E, tức là sao cho

$$\int_E |f|^p d\mu < \infty$$

gọi là không gian $\mathbb{L}^p(E,\mu)$.

Khi E là một tập đo được Lebesgue trong $\mathbb{R}^k$, và μ là độ đo Lebesgue, thì ta viết $\mathbb{L}^p(E)$. Nếu $E=[a,b]\subset\mathbb{R}^1$, và μ là độ đo Lebesgue thì ta viết $\mathbb{L}^p(a,b)$ hoặc $\mathbb{L}^p_{[a,b]}$ và nếu $E=[0,1]$ thì ta viết đơn giản $\mathbb{L}^p$.

Ta có sự kiện sau đây: *Tập hợp $\mathbb{L}^p(E,\mu)$, trong đó ta không phân biệt các hàm tương đương nhau (nghĩa là bằng nhau hầu khắp nơi), là một không gian tuyến tính định chuẩn*, với các phép toán thông thường về cộng hàm số và nhân hàm số với số, và với chuẩn:

$$\|f\| = \Big(\int_E |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Thật vậy, giả sử $f, g \in \mathbb{L}^p(E,\mu)$. Ta có $|f+g| \leq 2 \max\{|f|,|g|\}$ từ đó $|f+g|^p \leq 2^p(\max\{|f|,|g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$, bất đẳng thức này chứng tỏ rằng, do $|f|^p, |g|^p$ khả tích nên $|f+g|^p$ cũng khả tích, nghĩa là $f+g \in \mathbb{L}^p(E,\mu)$.

Mặt khác, nếu $f \in \mathbb{L}^p(E,\mu)$, α là một số bất kỳ thì dĩ nhiên $\alpha f \in \mathbb{L}^p(E,\mu)$. Như thế $\mathbb{L}^p(E,\mu)$ kín đối với các phép cộng hàm số và phép nhân hàm số với số, và vì các phép toán này rõ ràng thỏa mãn các tiên đề về không gian tuyến tính, nên $\mathbb{L}^p(E,\mu)$ đúng là một không gian tuyến tính.

Theo những định lý đã biết về tích phân (Chương 4, tiết 2) ta có:

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ h.k.n.}$$

chứng tỏ rằng tiên đề 1 về chuẩn được thỏa mãn, vì ta không phân biệt hai hàm bằng nhau h.k.n. Điều kiện thuần nhất của chuẩn cũng rõ ràng:

$$\|\alpha f\| = |\alpha|.\|f\|$$

và cuối cùng bất đẳng thức tam giác:

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

được nghiệm đúng do bất đẳng thức Minkowski. Vậy quả $\mathbb{L}^p(E,\mu)$ là không gian tuyến tính định chuẩn.

Hơn nữa, ta có:

Định lý 1. *$\mathbb{L}^p(E,\mu)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn đủ (không gian Banach).*

Chứng minh. Cho $\{f_n\}$ là một dãy cơ bản trong $\mathbb{L}^p(E,\mu)$ tức là sao cho $\|f_n - f_m\| \to 0$ $(n,m \to \infty)$. Bao giờ ta cũng có thể tìm được n_1 đủ lớn để cho $\|f_n - f_m\| < 1/2$ với mọi $n, m \geq n_1$; sau đó có thể tìm được $n_2 > n_1$ để cho $\|f_n - f_m\| < 1/2^2$ với mọi $n, m \geq n_2$, v.v... Như vậy ta có thể chọn một dãy $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ để cho với mọi k ta có:

$$(\forall n, m \geq n_k)\ \|f_n - f_m\| < 1/2^k.$$

Nói riêng:

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1/2^k.$$

Áp dụng bổ đề Fatou (Chương 4, tiết 3) cho dãy hàm không âm:

$$g_s(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{s} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in \mathbb{L}^p(E, \mu)$$

và chú ý rằng với mỗi x cố định $g_s(x)$ không giảm theo s nên tồn tại $\lim_{s\to\infty} g_s(x)$ (hữu hạn hay vô hạn) ta có:

$$\int_E \lim_{s\to\infty} (g_s(x))^p d\mu \le \lim_{s\to\infty} \int_E (g_s(x))^p d\mu = \lim_{s\to\infty} \|g_s\|^p$$

Nhưng $\|g_s\| \le \|f_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{s} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \|f_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{s} 1/2^k < \|f_{n_1}\| + 1$, nên $\lim_{s\to\infty} \|g_s\|^p < \infty$, do đó

$$\int_E \lim_{s\to\infty} (g_s(x))^p d\mu < \infty. \tag{9}$$

Điều này chứng tỏ (theo Hệ quả 1 của tính bảo toàn thứ tự của tích phân, Chương 4, tiết 2) rằng $\lim_{s\to\infty} |g_s(x)|^p$ hữu hạn h.k.n., tức là $\lim_{s\to\infty} g_s(x)$ tồn tại và hữu hạn h.k.n. Vậy chuỗi

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

hội tụ tuyệt đối h.k.n., do đó hội tụ h.k.n., tức là khi $s \to \infty$ thì hầu khắp nơi sẽ tồn tại giới hạn hữu hạn của hàm

$$f_{n_{s+1}}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{s} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)).$$

Ta hãy gọi giới hạn này là $f_0(x)$: $f_{n_{s+1}}(x) \to f_0(x)$ h.k.n. Vì $|f_{n_{s+1}}(x)| \le \lim_{s\to\infty} g_s(x) \in \mathbb{L}^p(E, \mu)$ (theo (9)) nên theo định lý hội tụ chặn (Chương 4, tiết 3).

$$\int |f_0(x)|^p d\mu = \lim_{s\to\infty} \int |f_{n_{s+1}}(x)|^p d\mu,$$

tức là $f_0 \in \mathbb{L}^p(E,\mu)$. Lại áp dụng bổ đề Fatou lần nữa ta có

$$\|f_0 - f_{n_k}\|^p = \int_E \lim_{s\to\infty} |f_{n_{s+1}}(x) - f_{n_k}(x)|^p d\mu$$

$$\leq \lim_{s\to\infty} \int_E |f_{n_{s+1}}(x) - f_{n_k}(x)|^p d\mu = \lim_{s\to\infty} \|f_{n_{s+1}} - f_{n_k}\|^p$$

$$= \lim_{s\to\infty} \|\sum_{t=k}^{s} (f_{n_{t+1}} - f_{n_t})\|^p \leq \lim_{s\to\infty} \sum_{t=k}^{s} \|f_{n_{t+1}} - f_{n_t}\|^p$$

$$\leq \lim_{s\to\infty} \sum_{t=k}^{s} \frac{1}{2^t} = \sum_{t=k}^{\infty} \frac{1}{2^t}.$$

Từ đó, suy ra $\lim_{k\to\infty} \|f_0 - f_{n_k}\| = 0$: Cuối cùng, vì $\{f_n\}$ là dãy cơ bản nên với n, n_k đủ lớn (chẳng hạn, $n, n_k \geq n_0$) ta sẽ có $\|f_{n_k} - f_n\| < \varepsilon$; và khi ấy ta chọn k đủ lớn để vừa có $n_k \geq n_0$ và $\|f_0 - f_{n_k}\| < \varepsilon$ thì sẽ có với mọi $n \geq n_0$: $\|f_0 - f_n\| \leq \|f_0 - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f_n\| \leq \varepsilon + \varepsilon$, chứng tỏ dãy f_n hội tụ tới f_0. □

Qua chứng minh trên ta còn thấy rằng:

Hệ quả: *Nếu một dãy $f_n(x)$ hội tụ trong $\mathbb{L}^p(E,\mu)$ thì nó chứa một dãy con $f_{n_k}(x)$ hội tụ hầu khắp nơi.*

Thật vậy nếu $\{f_n\}$ hội tụ thì nó là dãy cơ bản, và theo trên có thể trích ra dãy con $\{f_{n_k}\}$ hội tụ h.k.n.

Sự hội tụ trong $\mathbb{L}^p(E,\mu)$ cũng gọi là *sự hội tụ trung bình* cấp p, và người ta cũng dùng ký hiệu $f_n(x) \xrightarrow{(p)} f(x)$ để chỉ sự hội tụ đó.

Với mọi số $\eta > 0$, đặt $B = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\}$, ta có

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^p \geq \int_B |f_n - f|^p \geq \int_B \eta^p = \eta^p.\mu(B),$$

điều này cho thấy rằng $\mu(B) \to 0$ khi $n \to \infty$, nếu $f_n \xrightarrow{(p)} f$. Vậy

Một dãy hội tụ trung bình thì cũng hội tụ theo độ đo. Thành thử giữa các kiểu hội tụ có liên hệ như sau:

hội tụ hầu khắp nơi ⇐ hội tụ trung bình

⇓ ⇑ ⇓

hội tụ theo độ đo

(↑↑ chỉ rằng có thể trích ra một dãy con hội tụ; ↓ chỉ rằng phải có giả thiết $\mu(X) < \infty$)

Định lý 2. *Nếu $\mu(E) < \infty$, và $1 \leq p \leq p' < \infty$, thì*

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p'} \cdot \mu(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \tag{10}$$

và $\mathbb{L}^{p'}(E,\mu) \subset \mathbb{L}^p(E,\mu) \subset \mathbb{L}^1(E,\mu)$. Nói riêng, với $1 \leq p \leq p' < \infty$ ta có $\mathbb{L}^{p'} \subset \mathbb{L}^p \subset \mathbb{L}^1$.

($\|f\|_p$ biểu thị chuẩn của f trong $\mathbb{L}^p(E,\mu)$).

Chứng minh. Thật vậy, bất đẳng thức Hölder có thể viết

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Lấy $g \equiv 1$, và thay f bởi $|f|^p$, thay p và q bởi p'/p và $p'/(p'-p)$ ta được:

$$\begin{aligned} \| |f|^p \|_1 &\leq \| |f|^p \|_{\frac{p'}{p}} \cdot \mu(E)^{\frac{p'-p}{p'}}, \\ (\|f\|_p)^p &\leq (\|f\|_{p'})^p \cdot \mu(E)^{\frac{p'-p}{p'}}, \end{aligned}$$

từ đó suy ra (10) và phần sau của định lý. Chú ý rằng định lý không còn đúng nếu $\mu(E) = \infty$. □

2.3. TÍNH TÁCH ĐƯỢC CỦA $\mathbb{L}^p$

Sau đây E là một tập đo được Lebesgue trong $\mathbb{R}^k$ và μ là độ đo Lebesgue thu hẹp trên E.

Định lý 3. *Mỗi họ hàm sau đây là trù mật trong $\mathbb{L}^p(E)$:*
1) Các hàm đơn giản, tức là các hàm có dạng

$$\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}(x), \tag{11}$$

trong đó các tập A_i đo được và rời nhau.
2) Các hàm liên tục.

Chứng minh. Như đã định nghĩa trước đây, một họ hàm được gọi là trù mật trong $\mathbb{L}^p(E)$ nếu với mọi $f \in \mathbb{L}^\mu(E)$ và mọi $\varepsilon > 0$, đều tồn tại một hàm g thuộc họ đó sao cho $\|f - g\| < \varepsilon$. Rõ ràng nếu một họ

M trù mật trong $\mathbb{L}^p(E)$, và một họ N trù mật trong M, thì họ N cũng trù mật trong $\mathbb{L}^p(E)$. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh rằng họ 1) trù mật trong $\mathbb{L}^p(E)$ và họ 2) trù mật trong họ 1).

Xét một hàm bất kỳ $f \in \mathbb{L}^p(E)$. Ta có $f = f^+ - f^-$, với $f^+, f^- \geq 0$. Theo Định lý 13, Chương 3, tồn tại một dãy hàm đơn giản không âm $f_n^+ \nearrow f^+$. Vì $(f^+ - f_n^+)^p \searrow 0$ nên theo Định lý 4, Chương 4,

$$\int (f^+ - f_n^+)^p \searrow \int 0 = 0$$

nghĩa là $\|f^+ - f_n^+\| \to 0$. Vậy với n đủ lớn ta sẽ có $\|f^+ - f_n^+\| < \varepsilon/2$, và cũng tương tự như thế, với n đủ lớn ta sẽ có một hàm đơn giản f_n^- với $\|f^- - f_n^-\| < \varepsilon/2$. Khi ấy đặt $g = f_n^+ - f_n^-$ ta sẽ được $\|f - g\| \leq \|f^+ - f_n^-\| + \|f^- - f_n^-\| < \varepsilon$. Hàm g là hiệu của hai hàm đơn giản thì cũng đơn giản, vậy họ 1) trù mật trong $\mathbb{L}^p(E)$.

Bây giờ ta chứng minh họ 2) trù mật trong họ 1). Muốn thế, trước tiên xét một hàm số có dạng $\mathcal{X}_A(x)$(A đo được). Theo Định lý 10, Chương 3 (đúng với $\mathbb{R}^k, k \geq 1$), với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một tập mở $G \supset A$ và một tập đóng $F \subset A$ sao cho $\mu(G \setminus A) < \varepsilon^p/2$, $\mu(A \setminus F) < \varepsilon^p/2$, tức là $\mu(G \setminus F) < \varepsilon^p$. Ta hãy lấy,

$$g(x) = \frac{\rho(x, \mathbb{R}^k \setminus G)}{\rho(x, \mathbb{R}^k \setminus G) + \rho(x, F)}$$

trong đó $\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$ chỉ khoảng cách từ x đến tập M. Rõ ràng hàm g bằng 0 trên tập $\mathbb{R}^k \setminus G$ và bằng 1 trên tập F, và do các hàm $\rho(x, \mathbb{R}^k \setminus G)$, $\rho(x, F)$ đều liên tục[2] và có tổng khác 0 nên g cũng liên tục. Hiệu $\mathcal{X}_A(x) - g(x)$ có trị gồm giữa 0 và 1 trên tập $G \setminus F$ và bằng 0 ngoài tập đó, cho nên

$$\|\mathcal{X}_A - g\| = \left(\int (\mathcal{X}_A(x) - g(x))^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (\mu(G \setminus F))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

[2]Sự liên tục của hàm $r(x) = \rho(x, M)$ (M là một tập tuỳ ý trong một không gian metric) có thể chứng minh đơn giản như sau. Cho x_0 một điểm bất kỳ, x một điểm sao cho $\rho(x, x_0) < \varepsilon/2$. Theo định nghĩa hàm $r(x)$, có thể tìm một điểm $y \in M$ sao cho $\rho(x, y) < r(x) + \varepsilon/2$, và một điểm $y_0 \in M$ sao cho $\rho(x_0, y_0) < r(x_0) + \varepsilon/2$. Khi đó $r(x) \leq \rho(x, y_0) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y_0) < r(x_0) + \varepsilon$ và $r(x_0) \leq \rho(x_0, y) \leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) < r(x) + \varepsilon$. Do đó $|r(x) - r(x_0)| < \varepsilon$, có nghĩa là $r(x)$ liên tục tại x_0.

Thành thử mỗi hàm có dạng $\mathcal{X}_A(x)$, với A đo được đều có thể xấp xỉ tùy ý bởi một hàm liên tục. Từ đó suy ra họ 2) trù mật trong họ 1), vì với mỗi hàm có dạng (11) chỉ việc chọn các hàm liên tục $g_i(x)$ sao cho $\|\mathcal{X}_{A_i} - g_i\| < \dfrac{\varepsilon}{\nu|\alpha_i|}$ thì sẽ được hàm liên tục $g(x) = \sum \alpha_i g_i(x)$, với

$$\|\sum \alpha_i \mathcal{X}_{A_i} - g\| \le \sum_1^\nu \alpha_i \|\mathcal{X}_{A_i} - g\| < \varepsilon. \qquad \square$$

Hệ quả. *Không gian $\mathbb{L}^p$ tách được* (nghĩa là có chứa một tập con đếm được trù mật trong nó).

Thật vậy, cho $f \in \mathbb{L}^p$, $\varepsilon > 0$ tùy ý. Theo định lý trên tồn tại một hàm liên tục $g(x)$ trên đoạn $[0, 1]$ sao cho $\|f - g\| < \varepsilon/2$. Mặt khác theo Định lý Weierstrass I (Chương 2, tiết 6) tồn tại một đa thức $P(x)$ với hệ số hữu tỉ sao cho $\max\limits_{0\le x\le 1} |g(x) - P(x)| < \varepsilon/2$ hay

$$\|g - P\| = \left(\int_0^1 |g(x) - P(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\int_0^1 \left(\varepsilon/2\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon/2.$$

Vậy $\|f - P\| \le \|f - g\| + \|g - P\| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Nghĩa là họ các đa thức với hệ số hữu tỉ trù mật trong $\mathbb{L}^p$. Vì họ này đếm được nên $\mathbb{L}^p$ tách được.

Dĩ nhiên đối với $\mathbb{L}^p_{[a,b]}$ cũng có thể suy luận tương tự như trên, và sẽ thấy rằng $\mathbb{L}^p_{[a,b]}$ cũng tách được.

3. TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH

3.1. ĐỊNH NGHĨA. Cho hai không gian tuyến tính bất kỳ X và Y. Một ánh xạ $A : X \to Y$ gọi là một *ánh xạ tuyến tính* hay *toán tử tuyến tính* nếu:

1) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ với mọi $x_1, x_2 \in X$.
2) $A(\alpha x) = \alpha Ax$ với mọi $x \in X$ và mọi số α.

Ở đây để cho gọn ta viết Ax thay cho $A(x)$ để chỉ phần tử ứng với x trong ánh xạ A.

Dĩ nhiên hai điều kiện 1) và 2) tương đương với

$$A(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 Ax_1 + \ldots + \alpha_k Ax_k$$

với mọi $x_1, \ldots, x_k \in X$ và mọi số $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Nếu $Y = X$ thì ta cũng nói A là một toán tử trong X.

Ta ký hiệu ImA là *miền trị* (hay *phạm vi*) của toán tử A, tức là tập tất cả các $y \in Y$ sao cho $y = Ax$ với một $x \in X$ nào đó. Rõ ràng nếu $y_1 \in \text{Im}A$, $y_2 \in \text{Im}A$ thì $\alpha_1 y_1$, $\alpha_2 y_2 \in \text{Im}A$ với mọi số α_1, α_2 nên ImA bao giờ cũng là một không gian con của Y.

Sau đây là một số ví dụ về toán tử tuyến tính.

1) $X = \mathbb{R}^k$, $Y = \mathbb{R}^m$, $A(\xi_1, \ldots, \xi_k) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ với

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\xi_j \ (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{12}$$

trong đó a_{ij} là những hằng số. Ma trận

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

gọi là *ma trận của toán tử A*.

Dễ thấy rằng (12) là dạng tổng quát của mọi toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^k$ vào $\mathbb{R}^m$. Thật vậy cho A là một toán tử tuyến tính bất kỳ từ $\mathbb{R}^k$ vào $\mathbb{R}^m$. Gọi $e_1, e_2, \ldots, e_k$ và $f_1, f_2, \ldots, f_m$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^k$ và $\mathbb{R}^m$ sao cho với mọi $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$ và $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$:

$$x = \sum_{j=1}^{k} \xi_j e_j \qquad y = \sum_{i=1}^{m} \eta_i f_i$$

(chẳng hạn lấy $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_k = (0, \ldots, 0, 1)$ và lấy các $f_1, f_2, \ldots, f_m$ cũng tương tự). Vì A là tuyến tính nên $Ax = \sum_{j=1}^{k} \xi_j (Ae_j)$. Vậy đặt $Ax = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$, $Ae_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$, ta sẽ có (12).

2) $X = Y = D^k_{[a,b]}$ (không gian các hàm số có đạo hàm liên tục đến cấp k trên đoạn $[a, b]$), $Ax(t) = a_0(t) + a_1 x'(t) + \cdots + a_k x^{(k)}(t)$, trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_k$ là những hằng số (hoặc những hàm số cho trước của t, thuộc $D^k_{[a,b]}$). Toán tử này gọi là một *toán tử vi phân*.

3) $X = Y = \mathbb{C}_{[a,b]}$, $Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$, trong đó $K(t,s)$ là một hàm số liên tục của t và s trong hình vuông $a \le t,\ s \le b$. Toán tử này gọi là một *toán tử tích phân* với *hạch* là $K(t,s)$.

4) Dĩ nhiên toán tử biến mỗi phần tử $x \in X$ thành phần tử 0 *(toán tử không)* và toán tử biến mỗi phần tử $x \in X$ thành chính x *(toán tử đồng nhất)* cũng là toán tử tuyến tính.

3.2. ĐIỀU KIỆN LIÊN TỤC. Giả sử X, Y là hai không gian định chuẩn. Theo định nghĩa chung về ánh xạ liên tục (Chương 2, tiết 5), một toán tử A từ X vào Y gọi là *liên tục* nếu $x_n \to x_0$ luôn luôn kéo theo $Ax_n \to Ax_0$.

Một toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^k$ vào $\mathbb{R}^m$ bao giờ cũng liên tục. Thật vậy, như trên đã thấy, một toán tử như thế có dạng (12). Nếu $x_n = (\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}) \to x_0 = (\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_k^{(0)})$ thì, do sự hội tụ trong $\mathbb{R}^k$ là hội tụ theo tọa độ (Chương 2, tiết 1), ta có $\xi_j^{(n)} \to \xi_j^{(0)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, do đó $\eta_i^{(n)} = \sum_j a_{ij}\xi_j^{(n)} \to \sum_j a_{ij}\xi_j^{(0)} = \eta_i^{(0)}$ tức là $Ax_n \to Ax_0$.

Nhưng trong không gian định chuẩn bất kỳ thì toán tử tuyến tính không nhất thiết liên tục. Ở đây điều kiện liên tục tương đương với tính bị chặn định nghĩa như sau:

Một toán tử A từ X vào Y gọi là *bị chặn* (*giới nội*) nếu có một hằng số $K > 0$ để cho

$$(\forall x \in X) \quad \|Ax\| \le K\|x\| \tag{13}$$

(để ý rằng chuẩn bên trái bất đẳng thức là chuẩn trong Y, còn chuẩn bên phải là chuẩn trong X).

Định lý 4. *Một toán tử tuyến tính A từ X vào Y là liên tục khi và chỉ khi nó bị chặn.*

Chứng minh. Giả sử toán tử A liên tục. Ta chứng minh trước hết rằng phải có một hằng số K để cho $\|Ax\| \le K$ với mọi x có $\|x\| = 1$. Thật vậy, nếu trái lại, tức là $(\forall n)\ (\exists x_n)\|x_n\| = 1,\ \|Ax_n\| > n$, thì lấy $x'_n = x_n/n$ ta có $x'_n \to 0$ và $\|Ax'_n\| = \|Ax_n/n\| = \|Ax_n\|/n > 1$, trái với giả thiết A liên tục. Vậy phải có số K với tính chất trên. Với mọi $x \ne 0$ ta có $\|x/\|x\|\| = 1$, cho nên $\|Ax\|/\|x\| \le K$, do đó $\|Ax\| \le K.\|x\|$.

Ngược lại, giả sử có hằng số K với tính chất (4), và $x_n \to x_0$. Ta sẽ có $\|Ax_n - Ax_0\| = \|A(x_n - x_0)\| \le K\|x_n - x_0\| \to 0$. Vậy A liên tục tại x_0. □

Số $K \ge 0$ nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện (13) gọi là *chuẩn* của toán tử A, và được ký hiệu $\|A\|$. Như vậy:

1) $(\forall x \in X) \quad \|Ax\| \le \|A\|.\|x\|.$ (14)

2) Nếu $(\forall x \in X)\|Ax\| \le K\|x\|$ thì $\|A\| \le K.$ (15)

Định lý 5. *Ta có*

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \tag{16}$$

Chứng minh. Số $K \ge 0$ nhỏ nhất thỏa mãn (13) dĩ nhiên cũng là số $K \ge 0$ nhỏ nhất thỏa mãn

$$(\forall x \in X,\ x \ne 0) \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le K,$$

do đó

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \ne 0} \|A\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|. \qquad \square$$

Hệ quả. *Toán tử tuyến tính A bị chặn (liên tục) nếu tập các trị của nó trên một mặt cầu (tùy ý) bị chặn.* (Mặt cầu tâm x_0, bán kính α, ký hiệu $S(x_0, \alpha)$, là tập các x sao cho $\|x - x_0\| = \alpha$).

Thật vậy, nếu chẳng hạn, $\|Ax\| \le N$ với mọi x thuộc mặt cầu $S = S(x_0, \alpha)$, thì với mọi x mà $\|x\| = 1$ ta sẽ có $\alpha x + x_0 \in S$, cho nên $\|A(\alpha x + x_0)\| \le N$, và do đó $\|\alpha Ax + Ax_0\| \le N$, hay $\alpha\|Ax\| \le N + \|Ax_0\|$, từ đó $\|Ax\| \le (N + \|Ax_0\|)/\alpha$. Vậy, theo (16), $\sup_{x \ne 0}\|Ax\|/\|x\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| \le K$, với $K = (N + \|Ax_0\|/\alpha)$.

Trở lại ví dụ 3) về toán tử tuyến tính ở mục 3.1, ta có

$$\|Ax\| = \max_{a \le t \le b} |\int_a^b K(t,s)x(s)ds| \le \|x\| \max_{a \le t \le b} \int_a^b |K(t,s)|ds,$$

cho nên đối với toán tử này:

$$\|A\| \le \max_{a \le t \le b} \int_a^b |K(t,s)|ds.$$

Có thể chứng minh rằng ở đây có dấu = thật sự, nhưng điều đó không đơn giản.

3.3. TOÁN TỬ NGHỊCH ĐẢO. Xét phương trình

$$Ax = y, \tag{17}$$

trong đó A là toán tử tuyến tính từ X vào Y. Hai vấn đề thường đặt ra là:

1) *Tồn tại:* phương trình (17) có chăng một nghiệm với mọi $y \in Y$? Nói cách khác phải chăng miền trị của toán tử A trùng với Y : $\mathrm{Im}A = Y$?

2) *Duy nhất:* Nếu phương trình (7) có nghiệm thì nghiệm đó có duy nhất không ? Nghĩa là phải chăng từ $Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$ bao giờ cũng suy ra được $x_1 = x_2$? Đặt $x = x_1 - x_2$ ta thấy rằng vấn đề chung qui là: phải chăng $Ax = 0$ kéo theo $x = 0$?

Tập các nghiệm của phương trình $Ax = 0$ thường được gọi là *hạch* (hạt nhân) của toán tử A và ký hiệu Ker$A$ (tiếng Anh Kernel nghĩa là hạt nhân). Dễ kiểm tra lại rằng do A là tuyến tính nên *Ker$A$ là một không gian con của X*. Nếu A lại liên tục thì Ker$A$ là một không gian con *đóng* của X (vì rằng Ker$A$ chẳng qua là nghịch ảnh bởi A của tập đóng $\{0\}$).

Như vậy, vấn đề "duy nhất" cũng là vấn đề: phải chăng Ker$A = \{0\}$?

Nếu điều kiện này được thỏa mãn thì với mỗi $y \in \mathrm{Im}A$ ứng một x hoàn toàn xác định sao cho $Ax = y$. Khi ấy toán tử biến y thành x theo cách đó gọi là *toán tử nghịch* đảo của A và được ký hiệu A^{-1}. Thành thử :

Toán tử A có nghịch đảo khi và chỉ khi Ker$A = \{0\}$, tức là phương trình $Ax = 0$ chỉ có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

Dễ thấy rằng A^{-1} là một toán tử tuyến tính từ ImA lên X và

$$(\forall x \in X) \quad A^{-1}Ax = x; \qquad (\forall y \in \mathrm{Im}A) \quad AA^{-1}y = y.$$

Ví dụ: Cho G là một tập mở, không rỗng , bị chặn, và liên thông trong mặt phẳng x, y; H là tập các hàm thực $u(x, y)$ liên tục trên bao đóng $\overline{G}$ của G và điều hoà trong G, C là tập các hàm $f(x, y)$ liên tục

trên biên của G. Với các phép toán đại số thông thường, H và C là hai không gian tuyến tính. Gọi A là toán tử biến mỗi hàm $u(x,y) \in H$ thành hàm $f(x,y) \in C$, bằng thu hẹp của $u(x,y)$ trên biên của G, thì A là một toán tử tuyến tính từ H vào C, và các vấn đề tồn tại và duy nhất ở đây chẳng qua là nội dung lý thuyết thế vị:

Vấn đề tồn tại: $\mathrm{Im}A = C$? chính là bài toán Dirichlet: với mỗi hàm $f \in C$ cho trước, phải chăng có một hàm $u \in H$ sao cho f là thu hẹp của u trên biên G ? (Câu trả lời không phải lúc nào cũng là khẳng định).

Vấn đề duy nhất: $\mathrm{Ker}A = \{0\}$? có nghĩa là nếu một hàm $u(x,y) \in H$ triệt tiêu trên biên của G thì phải chăng nó bằng 0 trên toàn G ? Câu trả lời, như đã biết, là khẳng định. Vậy ở đây A có nghịch đảo.

Khi một toán tử tuyến tính liên tục có nghịch đảo thì nghịch đảo ấy không nhất thiết phải liên tục. Ta có

Định lý 6. *Nếu một toán tử tuyến tính liên tục $A : X \to Y$ có nghịch đảo A^{-1} liên tục thì*

$$(\forall x \in X) \quad \|Ax\| \geq m\|x\| \tag{18}$$

với mọi số $m \leq \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$. Ngược lại nếu có $m > 0$ nghiệm đúng (18) thì A^{-1} tồn tại , liên tục và có $\|A^{-1}\| \leq \dfrac{1}{m}$.

Chứng minh. Nếu A^{-1} tồn tại và liên tục thì nó có chuẩn $\|A^{-1}\|$ và $\|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\|.\|y\|$ với mọi $y \in \mathrm{Im}A$, hay $\|x\| \leq \|A^{-1}\|.\|Ax\|$ với mọi $x \in X$, cho nên ta có (18) với mọi $m \leq \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$. Ngược lại, nếu có (18) với $m > 0$ thì $Ax = 0$ kéo theo $0 \geq m\|x\|$ tức là $x = 0$, cho nên A^{-1} tồn tại, và khi ấy (18) có thể viết $(\forall y \in \mathrm{Im}A) \quad \|y\| \geq m\|A^{-1}y\|$, hay $\|A^{-1}y\| \leq \dfrac{1}{m}\|y\|$, chứng tỏ A^{-1} bị chặn, do đó liên tục, đồng thời $\|A^{-1}\| \leq \dfrac{1}{m}$. □

Một toán tử tuyến tính liên tục $A : X \to Y$ sao cho $\mathrm{Im}A = Y$ và nghịch đảo A^{-1} tồn tại và liên tục, được gọi là một phép *đẳng cấu* từ X lên Y. Ký hiệu $A \in \mathrm{Isom}\,(X,Y)$ (tiếng Anh Isomorphism có nghĩa là đẳng cấu).

Định lý 7. *Cho X, Y là hai không gian Banach. Nếu $A : X \to Y$ là một đẳng cấu thì mọi toán tử tuyến tính liên tục $B : X \to Y$ sao cho $\|A - B\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ cũng là đẳng cấu.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh rằng $\mathrm{Im}B = Y$. Muốn thế, cho $y \in Y$ bất kỳ. Ta xét ánh xạ $T : X \to X$ xác định bởi $T(x) = A^{-1}y + A^{-1}(A-B)x$. Ta có với mọi $x, x' \in X$: $\|Tx - Tx'\| = \|A^{-1}(A-B)(x-x')\| \le \|A^{-1}\|.\|A-B\|.\|x-x'\| = \theta\|x-x'\|$, mà theo giả thiết $\theta = \|A^{-1}\|.\|A-B\| < 1$ nên T là ánh xạ co. Vậy theo Định lý điểm bất động Banach phải có một x nghiệm đúng $x = Tx$, tức là $x = A^{-1}y + A^{-1}(A-B)x = A^{-1}y + x - A^{-1}Bx$, do đó $A^{-1}(y - Bx) = 0$ và điều này kéo theo $y - Bx = 0$. Thành thử với mọi $y \in Y$ tồn tại x sao cho $Bx = y$.

Mặt khác, với mọi $x \in X$ ta có : $\|Bx\| = \|Ax - (A-B)x\| \ge \|Ax\| - \|(A-B)x\| \ge \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}\|x\| - \|A-B\|.\|x\| = m\|x\|$, với $m = \dfrac{1}{\|A^{-1}\|} - \|A-B\| > 0$. Vậy theo định lý trước, B^{-1} tồn tại và liên tục. □

3.4. KHÔNG GIAN CÁC TOÁN TỬ. Cho hai không gian định chuẩn X, Y. Ta ký hiệu $\mathbb{L}(X,Y)$ là tập tất cả các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y.

Trong $\mathbb{L}(X,Y)$ ta có thể định nghĩa các phép toán tuyến tính như sau:

Ta gọi *tổng* của hai toán tử A, B là toán tử $A + B$ sao cho

$$(\forall x \in X) \qquad (A+B)x = Ax + Bx,$$

và tích của toán tử A với số α là toán tử αA sao cho

$$(\forall x \in X) \qquad (\alpha A)x = \alpha Ax.$$

Rõ ràng các toán tử $A + B$ và αA cũng tuyến tính và liên tục, tức là thuộc $\mathbb{L}(X,Y)$, và với các phép toán tuyến tính như trên, $\mathbb{L}(X,Y)$ trở thành một không gian tuyến tính.

Hơn nữa, trong $\mathbb{L}(X,Y)$ ta đã định nghĩa chuẩn $\|A\|$ của mỗi toán tử A theo công thức (16). Chuẩn ấy thỏa mãn đầy đủ các tiên đề về chuẩn, cụ thể là:

1) Nếu $\|A\| = 0$ thì do (14) ta có $Ax = 0$ với mọi x, tức $A = 0$ (toán tử không). Ngược lại nếu $A = 0$ thì đĩ nhiên $\|A\| = 0$.

2) $\|\alpha A\| = |\alpha|.\|A\|$ là do với mọi x: $\|\alpha Ax\| = |\alpha|.\|Ax\|$.

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ là do với mọi x: $\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$.

Như vậy $\mathbb{L}(X, Y)$ là *một không gian định chuẩn.*

Cũng như trong mọi không gian định chuẩn, trong $\mathbb{L}(X, Y)$ ta có thể nói đến sự hội tụ: một dãy toán tử $A_n \in \mathbb{L}(X, Y)$ hội tụ tới toán tử $A \in \mathbb{L}(X, Y)$ nếu $\|A_n - A\| \to 0$. Sự hội tụ này gọi là sự *hội tụ theo chuẩn*, để phân biệt với sự *hội tụ từng điểm*, định nghĩa như sau: một dãy toán tử A_n *hội tụ từng điểm* đến A nếu $(\forall x \in X)\ A_n x \to Ax$ (nghĩa là $\|A_n x - Ax\| \to 0$).

Rõ ràng sự hội tụ theo chuẩn kéo theo sự hội tụ từng điểm vì $\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\|\ \|x\|$. Nhưng ngược lại không đúng.

Định lý 8. *Nếu không gian Y đủ thì không gian $\mathbb{L}(X, Y)$ cũng đủ* (tức là không gian Banach).

Chứng minh. Giả sử dãy A_n là cơ bản trong $\mathbb{L}(X, Y)$. Ta có:

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\|.\|x\|, \qquad (19)$$

cho nên với $x \in X$ cho trước, $\|A_n x - A_m x\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Vậy dãy $A_n x$ là cơ bản trong Y, mà theo giả thiết Y là không gian đủ, nên dãy đó phải dần tới một giới hạn. Ta hãy đặt

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$$

và chứng minh rằng $A \in \mathbb{L}(X, Y)$. Thật vậy A rõ ràng là tuyến tính. Vả lại với $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có thể chọn N đủ lớn để $\|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$ với mọi $n, m \geq N$. Khi ấy dựa theo (19) ta có $\|A_n x - A_m x\| \leq \varepsilon\|x\|$, và cho $m \to \infty$ ta được

$$(\forall n \geq N)\quad \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon\|x\|,$$

chứng tỏ rằng

$$A_n - A \in \mathbb{L}(X, Y)$$

và

$$(\forall n \geq N)\ \|A_n - A\| \leq \varepsilon.$$

Nhưng như thế thì $A = A_n - (A_n - A) \in \mathbb{L}(X, Y)$ và bất đẳng thức vừa rồi chứng tỏ $\|A_n - A\| \to 0$. Vậy dãy A_n có giới hạn $A \in \mathbb{L}(X, Y)$ và định lý đã được chứng minh. □

Bây giờ giả sử $X = Y$, nghĩa là ta xét không gian $\mathbb{L}(X, X)$ các toán tử tuyến tính liên tục *trong* X. Khi ấy ta có thể định nghĩa phép nhân hai toán tử như sau: *tích của hai toán tử* A, B trong X là toán tử AB trong X sao cho

$$(\forall x \in X) \quad ABx = A(Bx).$$

Rõ ràng AB cũng là toán tử tuyến tính. Vả lại vì $\|ABx\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\|.\|Bx\| \leq \|A\|.\|B\|.\|x\|$ nên AB cũng bị chặn (tức là liên tục) và

$$\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|. \tag{20}$$

Như vậy trong $\mathbb{L}(X, X)$ có xác định phép cộng và phép nhân hai phần tử. Dễ kiểm tra lại rằng phép cộng và phép nhân này thỏa mãn các tiên đề của một vành. Thành thử $\mathbb{L}(X, X)$ là:

1) Một vành ;
2) Một không gian định chuẩn ;
3) Thỏa mãn điều kiện (20) ;
4) Có phần tử đơn vị la toán tử đồng nhất I với $\|I\| = 1$.

Người ta nói $\mathbb{L}(X, X)$ là một *vành định chuẩn.*

Trong vành $\mathbb{L}(X, X)$, đương nhiên có thể nói đến các lũy thừa của một toán tử.

$$A^0 = I, \; A^n = A^{n-1}A \;\; (n = 1, 2, \ldots).$$

3.5. TOÁN TỬ TRÊN KHÔNG GIAN TÍCH. Cho hai không gian tuyến tính X, Y, nếu trên tích trực tiếp của hai tập X, Y ta xét các phép toán

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, \; y_1 + y_2), \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, \alpha y), \end{aligned}$$

thì ta có một không gian tuyến tính mới gọi là tích *trực tiếp của hai không gian tuyến tính* X *và* Y. Nếu ta lại đưa vào đó một chuẩn bằng cách qui định:

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \tag{21}$$

thì ta được một không gian định chuẩn, gọi là *tích trực tiếp của hai không gian định chuẩn X và Y*. Tích trực tiếp của hai không gian tuyến tính (định chuẩn) X và Y, cũng được ký hiệu $X \times Y$.

Mỗi cặp có dạng $(x, 0)$, với $x \in X$, $0 \in Y$ ("phần tử không" của Y), có thể đồng nhất với $x \in X$, cho nên X có thể xem là một không gian con của $X \times Y$. Cũng tương tự, Y có thể xem là một không gian con của $X \times Y$. Khi ấy, mỗi phần tử (x, y) của không gian tích được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y). \tag{22}$$

Từ (21) ta suy ra

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \text{ khi và chỉ khi } x_n \to x,\ y_n \to y.$$

Thật vậy: $\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \|(x_n - x, y_n - y)\| = \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$.

Hơn nữa: *Nếu X, Y đều là không gian Banach thì tích $X \times Y$ cũng là không gian Banach.*

Thật vậy, nếu $\{(x_n, y_n)\}$ là một dãy cơ bản trong không gian tích thì, vì

$$\|x_m - x_n\| \le \|x_m - x_n\| + \|y_m - y_n\| = \|(x_m - x_n, y_m - y_n)\|$$

cho nên $\{x_n\}$, và, tương tự, $\{y_n\}$, cũng là dãy cơ bản. Vậy $x_n \to x \in X$, $y_n \to y \in Y$ và do đó $(x_n, y_n) \to (x, y) \in X \times Y$.

Định lý 9. *Cho hai không gian tuyến tính X, Y. Mỗi toán tử tuyến tính A từ $X \times Y$ vào một không gian tuyến tính Z, đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng*

$$A(x, y) = A_1(x) + A_2(y), \tag{23}$$

trong đó $A_1 (A_2)$ là một toán tử tuyến tính từ X (Y, tương ứng) vào Z. Nếu X, Y là không gian định chuẩn thì toán tử A liên tục khi và chỉ khi cả A_1 và A_2 đều liên tục.

Chứng minh. Do (22) và do A là tuyến tính ta có $A(x, y) = A(x, 0) + A(0, y)$, cho nên muốn có (23) ta chỉ cần định nghĩa $A_1(x) = A(x, 0)$, $A_2(y) = A(0, y)$. Ngược lại, nếu ta có (23) thì phải có $A(x, 0) = A_1(x)$, $A(0, y) = A_2(y)$. Vậy cách biểu diễn là duy nhất.

Nếu X, Y là không gian định chuẩn và A liên tục (do đó bị chặn) thì ta có với mọi $x \in X$:

$$\|A_1(x)\| = \|A(x,0)\| \leq \|A\|.\|(x,0)\| = \|A\|.\|x\|,$$

chứng tỏ A_1 bị chặn, do đó liên tục. Cũng tương tự như thế, A_2 liên tục. Ngược lại nếu cả A_1, A_2 đều liên tục thì ta có với mọi $(x,y) \in X \times Y$:

$$\begin{aligned} \|A(x,y)\| &= \|A_1(x) + A_2(y)\| \leq \|A_1\|.\|x\| + \|A_2\|.\|y\| \leq \\ &\leq \max(\|A_1\|, \|A_2\|) \times \|(x,y)\|, \end{aligned}$$

cho nên A liên tục . □

3.6. TOÁN TỬ SONG TUYẾN TÍNH. Cho X, Y, Z là ba không gian tuyến tính định chuẩn, A là một ánh xạ từ $X \times Y$ vào Z, biến mỗi cặp $x \in X$, $y \in Y$ thành phần tử $z = A(x,y) \in Z$. Ta nói A là một toán tử song tuyến tính nếu với mỗi y cố định $A(x,y)$ là một toán tử tuyến tính từ X vào Z và với mỗi x cố định $A(x,y)$ là một toán tử tuyến tính từ Y vào Z. Toán tử A gọi là *liên tục* nếu với mọi dãy $x_n \to x$, $y_n \to y$ ta có $A(x_n, y_n) \to A(x,y)$; gọi là *bị chặn* nếu có một hằng số $K > 0$ để cho

$$(\forall x \in X)\ (\forall y \in Y) \quad \|A(x,y)\| \leq K.\|x\|.\|y\|. \tag{24}$$

Cũng như đối với toán tử tuyến tính ta có sự kiện sau đây:

Một toán tử song tuyến tính là liên tục khi và chỉ khi bị chặn.

Cách chứng minh tương tự như đối với Định lý 4. Nếu A liên tục, thì phải có một số $K > 0$ sao cho $\|A(x,y)\| \leq K$ với mọi $x \in X$, $y \in Y$ có $\|x\| = \|y\| = 1$, vì nếu trái lại thì $(\forall n)\ (\exists (x_n, y_n)\ \|x_n\| = \|y_n\| = 1,\ \|A(x_n, y_n)\| \geq n$, và đặt $x'_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$, $y'_n = \dfrac{y_n}{\sqrt{n}}$ ta sẽ có $x'_n \to 0$, $y'_n \to 0$, trong khi đó $\|A(x'_n, y'_n)\| = \dfrac{1}{n}\|A(x_n, y_n)\| \geq 1$, trái với giả thiết A liên tục. Vậy tồn tại số $K > 0$ với tính chất đã nói và với mọi $x \neq 0$, $y \neq 0$ ta sẽ có $\|A\Big(\dfrac{x}{\|x\|}, \dfrac{y}{\|y\|}\Big)\| \leq K$ từ đó suy ra (24).

Ngược lại nếu A bị chặn, nghĩa là tồn tại $K > 0$ với tính chất (24) thì với mọi $x_n \to x$, $y_n \to y$ ta có $\|A(x_n, y_n) - A(x,y)\| \leq \|A(x_n, y_n) - A(x_n, y)\| + \|A(x_n, y) - A(x,y)\| = \|A(x_n, y_n - y)\| +$

$\|A(x_n - x, y)\| \leq K\|x_n\|.\|y_n - y\| + K\|x_n - x\|.\|y\|$. Biểu thức này dần tới 0, vì dãy x_n bị chặn (do hội tụ). Vậy A liên tục. □

Số $K \geq 0$ nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện (24) gọi là *chuẩn* của A và được ký hiệu $\|A\|$. Bằng suy luận tương tự như đối với toán tử tuyến tính ta có

$$(\forall x \in X)\ (\forall y \in Y) \quad \|A(x,y)\| \leq \|A\|.\|x\|.\|y\|$$
$$\|A\| = \sup\{\|A(x,y)\| : \|x\| = 1,\ \|y\| = 1\}.$$

Một toán tử B, từ một không gian định chuẩn X vào một không gian định chuẩn Z được gọi là *toán tử toàn phương* nếu tồn tại một toán tử song tuyến tính A từ $X \times X$ vào Z sao cho với mọi x:

$$B(x) = A(x,x). \tag{25}$$

Trong định nghĩa này ta có thể giả thiết A đối xứng, nghĩa là $A(x,y) = A(y,x)$, vì nếu cần ta có thể thay $A(x,y)$ bởi $\frac{1}{2}[A(x,y) + A(y,x)]$.

Cho trước một toán tử toàn phương B từ X vào Z, bao giờ cũng tồn tại một toán tử song tuyến tính đối xứng duy nhất A thỏa mãn điều kiện (25), đó là toán tử xác định bởi công thức

$$A(x,y) = \frac{1}{2}[B(x+y) - B(x) - B(y)], \tag{26}$$

vì rằng nếu A đối xứng thì $A(x+y, x+y) = A(x,x) + A(y,y) + 2A(x,y)$, do đó nếu A thỏa mãn điều kiện (25) thì ta phải có (26).

Do trên một toán tử toàn phương B là *liên tục* khi và chỉ khi có một hằng số $K > 0$ để cho

$$(\forall x \in X) \quad \|Bx\| \leq K\|x\|^2.$$

Một ví dụ quan trọng về toán tử song tuyến tính là *tích chập* $f * g$ của hai hàm số $f(x), g(x)$, định nghĩa bởi:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt, \tag{27}$$

Ta nói tích chập tồn tại nếu tích phân bên phải tồn tại và hữu hạn với hầu hết mọi số thực x.

Định lý 10. *Nếu* $f, g \in \mathbb{L}^1_{(-\infty,+\infty)}$ *thì tích chập* $f * g$ *tồn tại và* $f * g \in \mathbb{L}^1_{(-\infty,\infty)}$ *đồng thời*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 . \|g\|_1. \tag{28}$$

Nếu $f \geq 0$, $g \geq 0$ *thì trong bất đẳng thức trên ta có dấu* =.

Chứng minh. Trước hết, xét trường hợp $f \geq 0$, $g \geq 0$. Định lý Fubini cho:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dtdx = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dx\Big)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(g(t)\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)dx\Big)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(g(t)\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy\Big)dt$$
$$= \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt\Big) = \|f\|_1 . \|g\|_1 < \infty$$

(đẳng thức thứ ba là do phép đổi biến số $y = x - t$). Vậy cũng theo định lý Fubini, tích phân (27) tồn tại với hầu hết mọi x, nghĩa là $f * g$ tồn tại. Vả lại các đẳng thức trên cũng cho thấy rằng

$$\|f * g\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt)dx = \|f\|_1 . \|g\|_1.$$

Trong trường hợp tổng quát, nếu $f, g \in \mathbb{L}^1_{(-\infty,\infty)}$ thì $|f| * |g|$ có, tức là $|(f(x-t)g(t)|$ khả tích với hầu hết mọi x, do đó $f(x-t)g(t)$ cũng khả tích với hầu hết mọi x. Vậy $f * g$ cũng tồn tại và

$$\|f * g\|_1 \leq \| \, |f| * |g| \, \|_1 = \|f\|_1 . \|g\|_1. \qquad \square$$

Hệ quả. *Tích chập của hai hàm số khả tích trên đường thẳng là một toán tử song tuyến tính liên tục, có chuẩn bằng 1, từ* $\mathbb{L}^1_{(-\infty,\infty)} \times \mathbb{L}^1_{(-\infty,\infty)}$ *vào* $\mathbb{L}^1_{-(\infty,\infty)}$.

Việc $f * g$ là song tuyến tính thì đã rõ ràng. Còn tính liên tục của nó là do (28). Đồng thời Định lý 10 cũng cho thấy rằng 1 là chuẩn của toán tử ấy. $\square$

Dĩ nhiên bằng cách thay t bởi $x - t$ ta cũng có

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt,$$

và điều này cho thấy rằng

$$f * g = g * f.$$

Dựa vào định lý Fubini cũng có thể chứng minh:

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Vậy tích chập có cả tính chất giao hoán và kết hợp.

4. PHIẾM HÀM TUYẾN TÍNH

4.1. ĐỊNH NGHĨA. Cho một không gian tuyến tính X. Một hàm số $f(x)$ xác định trên X và lấy trị là số (thực hay phức, tùy theo X là không gian thực hay phức) gọi là một *phiếm hàm* trên X. Phiếm hàm đó gọi là *tuyến tính* nếu

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ với mọi $x_1, x_2 \in X$.
2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ với mọi $x \in X$ và mọi số α.

Như vậy một phiếm hàm tuyến tính trên X chẳng qua là một toán tử tuyến tính từ X vào $\mathbb{R}$ hay $\mathbf{C}$ (tùy theo X là không gian thực hay phức). Do đó tất cả các khái niệm và sự kiện đã chứng minh cho toán tử tuyến tính đều áp dụng cho phiếm hàm tuyến tính. Giả sử X là không gian định chuẩn. Khi ấy, một phiếm hàm tuyến tính f gọi là *bị chặn* nếu có một hằng số $K > 0$ để cho

$$(\forall x \in X) \quad |f(x)| \leq K\|x\|. \tag{29}$$

Theo Định lý 4 một *phiếm hàm tuyến tính bị chặn khi và chỉ khi nó liên tục*, nghĩa là $x_n \to x_0$ luôn luôn kéo theo $f(x_n) \to f(x_0)$.

Số $K \geq 0$ nhỏ nhất thỏa mãn (29) gọi là *chuẩn* của phiếm hàm và được ký hiệu $\|f\|$. Ta có, theo Định lý 5:

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Vả lại trong trường hợp X là không gian tuyến tính thực *nếu các trị của một phiếm hàm tuyến tính f trên một mặt cầu nào đó (tùy ý) mà bị chặn trên (hoặc dưới) thì phiếm hàm ấy bị chặn, do đó liên tục.* Thật vậy,

nếu chẳng hạn với mọi x thuộc một mặt cầu S tâm x_0 ta có $f(x) \leq N$ thì với các x ấy ta cũng có $f(2x_0 - x) \leq N$ (vì $2x_0 - x$ cũng thuộc S, do $\|(2x_0 - x) - x_0)\| = \|x - x_0\|$), nên $2f(x_0) - f(x) \leq N$ hay $f(x) \geq 2f(x_0) - N$. Vậy tập các trị của f trên S bị chặn. Do đó theo hệ quả Định lý 5, f phải bị chặn.

Trong nhiều vấn đề quan trọng, người ta thường xét không gian định chuẩn lập thành bởi tập các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X, gọi là *không gian liên hợp* (hay *không gian đối ngẫu*) của X và được ký hiệu X^*. Vì $\mathbb{R}$ (hay C) là không gian đủ nên theo Định lý 8, *không gian liên hợp của bất cứ không gian định chuẩn nào cũng là không gian đủ* (không gian Banach). Điều đó có nghĩa là bất cứ dãy cơ bản các phiếm hàm tuyến tính liên tục $\{f_n\}$ nào trên X cũng có một giới hạn là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X.

4.2. VÍ DỤ. Sau đây ta xét các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên một số không gian định chuẩn đã gặp.

1) *Phiếm hàm tuyến tính trên* $\mathbb{R}^k$. Nếu $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ là một vectơ bất kỳ của $\mathbb{R}^k$, thì tích vô hướng của a với $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$:

$$(a, x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \xi_i \tag{30}$$

rõ ràng là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{R}^k$. Ngược lại như đã thấy trong ví dụ 1) ở mục 3.1, ứng với mỗi phiếm hàm tuyến tính $f(x)$ trên $\mathbb{R}^k$ (tức là một toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^k$ vào $\mathbb{R}$) đều có một vectơ $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ sao cho $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \xi_i = (a, x)$.

Như vậy (30) là dạng tổng quát của một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{R}^k$. Nếu ta cho mỗi phiếm hàm $f = (a, x)$ ứng với vectơ a, thì ta có một ánh xạ 1-1 từ $(\mathbb{R}^k)^*$ (không gian liên hợp của $\mathbb{R}^k$) lên $\mathbb{R}^k$. Ánh xạ đó rõ ràng bảo toàn các phép toán tuyến tính. Hơn nữa nó cũng bảo toàn chuẩn, cụ thể là:

$$\|f\| = \|a\| \tag{31}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy (Chương 2, tiết 1)

$$(\Sigma \alpha_1 \xi_i)^2 \leq (\Sigma \alpha_i^2)(\Sigma \xi_i^2)$$

tức là

$$|(a, x)| \leq \|a\|.\|x\|.$$

Bất đẳng thức này trở thành đẳng thức khi $a = x$ nên theo định nghĩa chuẩn của một phiếm hàm ta suy ra (31).

Tóm lại ánh xạ nói trên là một phép đẳng cấu (tuyến tính đẳng cự), và $(\mathbb{R}^k)^*$ có thể coi là đồng nhất với $\mathbb{R}^k$. Trong ý nghĩa đó người ta nói rằng *không gian* $\mathbb{R}^k$ *là tự liên hợp* (không gian liên hợp của nó trùng với chính nó). Sau này ta sẽ thấy rằng đó là một trường hợp riêng của một sự kiện tổng quát về một lớp không gian định chuẩn gọi là không gian Hilbert (Chương 6).

2) *Phiếm hàm tuyến tính trên* $\mathbb{C}_{[a,b]}$. Có thể thấy ngay rằng:

2a). Cho t_0 là một điểm bất kỳ trong đoạn $[a, b]$. Phiếm hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{C}_{[a,b]}$ bởi $f(x) = x(t_0)$ là tuyến tính và liên tục.

2b) *Tích phân.*

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt$$

cũng là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{C}_{[a,b]}$.

2c) *Tích phân Stieljès* (Chương 4, tiết 6)

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t) \tag{32}$$

trong đó $g(t)$ là một hàm số cho trước có biến phân bị chặn trên $[a, b]$, xác định một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{C}_{[a,b]}$. Thật vậy, đó rõ ràng là một phiếm hàm tuyến tính. Mặt khác, theo định nghĩa, tích phân (32) bằng giới hạn của tổng

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} x(\xi_i)[g(t_{i+1}) - g(t_i)],$$

khi $\max(t_{i+1} - t_i) \to 0$. Ở đây $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ là một cách chia đoạn $[a, b]$ và ξ_i là một điểm bất kỳ của đoạn $[t_i, t_{i+1}]$. Ta có:

$$|S| \leq \max_{a \leq b \leq b} |x(t)| \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1} - g(t_i)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.V_b^a(g),$$

cho nên qua giới hạn ta sẽ được :

$$|f| \leq V_a^b(g)\|x\|,$$

chứng tỏ rằng f bị chặn (do đó liên tục) và $\|f\| \leq V_a^b(g)$.

Có thể chứng minh rằng ngược lại mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên không gian $\mathbb{C}_{[a,b]}$ đều có dạng (32) và hơn nữa có thể chọn $g(t)$ thích hợp để $\|f\| = V_a^b(g)$. Chẳng hạn, phiếm hàm trong ví dụ 2a) ứng với hàm $g(t) = 0$ với $0 \leq t < t_0$ và $g(t) = 1$ với $t_0 \leq t \leq b$; phiếm hàm trong ví dụ 2b) ứng với hàm $g(t) = t$.

Như vậy có thể lập một ánh xạ 1-1 từ tập các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{C}_{[a,b]}$ lên một tập con V_0 của không gian $V_{[a,b]}$ (không gian lập thành bởi các hàm có biến phân bị chặn trên $[a, b]$). Ánh xạ đó vừa bảo toàn các phép toán tuyến tính, vừa bảo toàn chuẩn. Do đó có thể đồng nhất V_0 với không gian liên hợp của $\mathbb{C}_{[a,b]}$.

3) *Phiếm hàm trên* $\mathbb{L}^p(E, \mu)$ $(p > 0)$. Tích phân

$$f(x) = \int_E x(t)\varphi(t)d\mu \tag{33}$$

trong đó $\varphi(t) \in \mathbb{L}^q(E, \mu)$ cho trước $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, xác định một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{L}^p(E, \mu)$.

Thật vậy theo bất đẳng thức Hölder,

$$\left|\int_E x(t)\varphi(t)d\mu\right| \leq \|x\|_p \cdot \|\varphi\|_q$$

cho nên tích phân (33) hữu hạn với mọi $x(t) \in \mathbb{L}^p(E, \mu)$. Vả lại bất đẳng thức vừa rồi cũng chứng tỏ

$$\|f\| \leq \|\varphi\|_q.$$

Nếu lấy $x_0(t) = |\varphi(t)|^{q-1}\text{sign } \varphi(t)$ thì [3]

$$\begin{aligned}\left|\int x_0(t)\varphi(t)d\mu\right| &= \int |\varphi(t)|^q = \left(\int |\varphi|^q\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int |\varphi|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|x_0\|_p \cdot \|\varphi\|_q.\end{aligned}$$

[3]Hàm sign φ (đọc xic-num φ) là hàm xác định như sau : sign $\varphi = 1$ nếu $\varphi > 0$, sign $\varphi = -1$ nếu $\varphi < 0$ và sign $\varphi = 0$ nếu $\varphi = 0$.

Do đó

$$\|f\| = \|\varphi\|_q$$

Ngược lại có thể chứng minh rằng mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{L}^p(E,\mu)$ $(p>1)$ đều có dạng (33) với một $\varphi(t)$ nào đó, thuộc $\mathbb{L}^q(E,\mu)$, hoàn toàn xác định. Như vậy phép tương ứng $f \leftrightarrow \varphi$ cho ta một ánh xạ 1-1 từ không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{L}^p(E,\mu)$ lên $\mathbb{L}^q(E,\mu)$. Ánh xạ đó vừa bảo toàn các phép toán tuyến tính vừa bảo toàn chuẩn. Do đó có thể coi không gian $\mathbb{L}^q(E,\mu)$ là đồng nhất với không gian liên hợp của $\mathbb{L}^p(E,\mu)$.

Trong trường hợp riêng $p = q = 2$ thì không gian liên hợp của $\mathbb{L}^2(E,\mu)$ trùng với chính nó. Vậy $\mathbb{L}^2(E,\mu)$ là một không gian tự liên hợp.

4) *Phiếm hàm tuyến tính trên không gian tích.* Nếu X, Y là hai không gian định chuẩn thì áp dụng Định lý 9 (với $Z = \mathbb{R}$) ta thấy rằng mọi phiếm hàm tuyến tính trên $X \times Y$ đều có dạng

$$f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$$

với $f_1(x) = f(x,0)$, $f_2(y) = f(0,y)$, và f là liên tục khi và chỉ khi f_1, f_2 liên tục.

4.3. PHIẾM HÀM SONG TUYẾN TÍNH. Cho một không gian định chuẩn X. Một hàm số $f(x,y)$ xác định trên $X \times X$ gọi là một phiếm hàm *song tuyến tính*, nếu với mỗi x cố định nó tuyến tính theo y và với mỗi y cố định nó tuyến tính theo x. Như vậy phiếm hàm song tuyến tính là một trường hợp riêng của toán tử song tuyến tính.

Chẳng hạn trong $\mathbb{R}^k$ tích vô hướng $(x,y) = \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_i$ là một phiếm hàm song tuyến tính.

Theo những kết quả ở mục 3.6, một phiếm hàm song tuyến tính là liên tục khi và chỉ khi nó *bị chặn*, tức là có một số $K > 0$ để cho

$$(\forall x, y \in X) \quad |f(x,y)| \le K\|x\|.\|y\|.$$

Khi ấy số $K \ge 0$ nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện này (*chuẩn* của phiếm hàm) là số

$$\|f\| = \sup\{|f(x,y)| : \|x\| = 1,\ \|y\| = 1\}.$$

Một phiếm hàm $g(x)$ gọi là *toàn phương* nếu có một phiếm hàm song tuyến tính $f(x,y)$ sao cho $g(x) = f(x,y)$. Cũng như đối với toán tử toàn phương, ở đây có thể giả thiết $f(x,y)$ là đối xứng nghĩa là $f(x,y) = f(y,x)$. Một phiếm hàm toàn phương g là liên tục khi và chỉ khi tồn tại một số $K > 0$ để cho

$$(\forall x \in X) \quad |g(x)| \leq K\|x\|^2.$$

5. ÁNH XẠ KHẢ VI

5.1. VI PHÂN CỦA MỘT ÁNH XẠ. Cho $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm số n biến số. Trong giải tích sơ cấp, hàm số f được gọi là khả vi tại $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nếu tồn tại những hằng số $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sao cho

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = A_1h_1 + A_2h_2 + \ldots + A_nh_n + \varepsilon\|h\|,$$

trong đó $\|h\|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2$ và $\varepsilon \to 0$ khi $\|h\| \to 0$. Biểu thức $A_1h_1 + A_2h_2 + \ldots + A_nh_n$ gọi là *vi phân (toàn phần)* của hàm f.

Ta nhận xét $A_1h_1 + A_2h_2 + \ldots + A_nh_n$ là một hàm tuyến tính của $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$. Từ đó có thể mở rộng khái niệm trên như sau:

Cho hai không gian định chuẩn X, Y bất kỳ. Ta nói một ánh xạ $f : X \to Y$ là *khả vi* tại điểm $x \in Y$ nếu tồn tại một toán tử tuyến tính liên tục $L : X \to Y$ sao cho

$$f(x + h) - f(x) = L(h) + r(h),$$

trong đó $r(h) = o(\|h\|)$, nghĩa là $\dfrac{r(h)}{\|h\|} \to 0$ khi $\|h\| \to 0$. Phần tử $L(h)$ gọi là *vi phân* (hay *biến phân*) cấp một của f tại x với gia lượng h, và được ký hiệu $\delta f(x,h)$. Bản thân toán tử tuyến tính L gọi là *đạo hàm cấp một (theo nghĩa Fréchet)* của f tại x và được ký hiệu $f'(x)$. Thành thử

$$\delta f(x,h) = f'(x).h$$

(chú ý rằng ở đây $f'(x)$ là một toán tử, cho nên ký hiệu ở vế phải có nghĩa là: trị của toán tử $f'(x)$ tại h; đôi khi để khỏi nhầm lẫn ta cũng viết $[f'(x)](h)$).

Đạo hàm của một ánh xạ, nếu có, là duy nhất. Thật vậy, nếu có hai toán tử tuyến tính liên tục L_1, L_2 cùng là đạo hàm của f tại x thì khi $h \to 0$:

$$\frac{L_1(h) - L_2(h)}{\|h\|} = \frac{r_1(h) - r_2(h)}{\|h\|} \to 0.$$

Nhưng với mọi phần tử $k \in X$ và mọi $\varepsilon > 0$ ta có:

$$\frac{L_1(k) - L_2(k)}{\|k\|} = \frac{L_1(\varepsilon k) - L_2(\varepsilon k)}{\|\varepsilon k\|}.$$

Khi $\varepsilon \to 0$ thì $\varepsilon k \to 0$ nên vế phải sẽ dần tới 0, vậy vế trái phải bằng 0, tức là $L_1(k) = L_2(k)$, hay $L_1 \equiv L_2$.

Thực chất của tính khả vi là: nếu một ánh xạ f khả vi tại x thì ở "địa phương" điểm x (trong một lân cận điểm x) ta có thể coi f xấp xỉ như một ánh xạ tuyến tính (cụ thể là vi phân của f).

Ví dụ: 1) Nếu f là toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y thì $\delta f(x, h)$ tồn tại ở mọi điểm x và bằng $f(h)$, vì

$$f(x + h) - f(x) = f(h).$$

Chẳng hạn, phiếm hàm

$$J(x) = \int_a^b x(t)dt, \ x(t) \in \mathbb{C}_{[a,b]}$$

có vi phân $\delta J(x, h) = J(h)$.

2) Nếu ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có đạo hàm riêng theo $x_1, \ldots, x_n$ liên tục thì như đã biết trong giải tích:

$$\delta f(x, h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$$

và đạo hàm của f tại x là $f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Vậy đạo hàm của f trong trường hợp này là gradien của f.

3) Nếu mỗi ánh xạ $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ khả vi tại $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thì ánh xạ $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ khả vi tại x, và

$$\delta f(x, h) = (\delta f_1(x, h), \delta f_2(x, h), \ldots, \delta f_m(x, h)).$$

Thật vậy, gọi $L(h)$ là vế thứ hai của đẳng thức này ta có:

$$f(x+h)-f(x) = L(h)+(f_1(x+h)-f_1(x)-\delta f_1(x,h), \ldots, f_n(x+h)-f_n(x)-\delta f_n(x,h))$$

cho nên

$$\|f(x+h)-f(x)-L(h)\| \le \sum_{i=1}^{m} |f_i(x+h)-f_i(x)-\delta f_i(x,h)| = o(\|h\|)$$

chứng tỏ rằng $L(h)$ chính là vi phân của f.

Đạo hàm của f trong trường hợp này là một ma trận $m \times n$, với dòng thứ i bằng $f_i'(x)$, nghĩa là $f'(x) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ (*ma trận Jacobi* của ánh xạ f).

5.2. ĐẠO HÀM THEO PHƯƠNG. Trong giải tích sơ cấp, một hàm số khả vi thì có đạo hàm theo mọi phương. Sự kiện ấy được mở rộng như sau:

Định lý 11. *Nếu ánh xạ $f : X \to Y$ khả vi tại $x \in X$ thì*

$$(\forall h \in X) \quad \delta f(x,h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}. \tag{34}$$

Chứng minh. Do giả thiết khả vi $f(x+th)-f(x) = \delta f(x,th) + r(th) = t\delta f(x,h) + r(th)$ với $r(th) = o(\|th\|) = o(\|t\|)$ khi cố định h. Vậy khi $t \to 0$,

$$\frac{1}{t}[f(x+th)-f(x)] = \delta f(x,h) + \frac{1}{t}r(th) \to \delta f(x,h). \qquad \square$$

Chú ý. Nếu với mọi $h \in X$ giới hạn bên phải (34) tồn tại thì không nhất thiết f khả vi tại x. Tuy vậy khi ấy người ta vẫn ký hiệu giới hạn đó là $\delta f(x,h)$ và gọi ánh xạ $L_G : h \mapsto \delta f(x,h)$ là *vi phân Gateaux* của f tại x. Nói chung ánh xạ này có thể không tuyến tính liên tục; khi nó tuyến tính liên tục thì ta gọi nó là *đạo hàm Gateaux* của f tại x và cũng nói ánh xạ f *khả vi Gateaux* tại x. Như vậy, một ánh xạ khả vi Frechet (cũng gọi là khả vi theo nghĩa mạnh) thì cũng khả vi Gateaux (cũng gọi là khả vi yếu) -- và khi ấy hai vi phân (Fréchet, Gateaux) trùng nhau

-- nhưng ngược lại có thể không đúng. Dưới đây khi nói khả vi ta hiểu ngầm khả vi Fréchet.

Đối với phiếm hàm , trong phần sau ta sẽ cần dùng tính chất tổng quát hơn:

Nếu phiếm hàm $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi tại mọi x thì hàm số $\varphi(t, s) = f(x, th + sk)$ với x, h, k cố định, là khả vi tại mọi điểm $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, và

$$\frac{\partial \varphi(t, s)}{\partial t} = \delta f(x + th + sk, h) \tag{35}$$

Thật vậy, do f khả vi tại $x_0 = x + th + sk$ và do $\|\tau h + \sigma k\| \leq \|\tau h\| + \|\sigma k\| \leq (\|h\| + \|k\|)\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}$ nên $\varphi(t + \tau, s + \sigma) - \varphi(t, s) = \delta f(x_0, \tau h + \sigma k) + o(\|\tau h + \sigma k\|) = \tau \delta f(x_0, h) + \sigma \delta f(x_0, k) + o(\sqrt{\tau^2 + \sigma^2})$, chứng tỏ rằng $\varphi(t, s)$ khả vi và ta có (35).

5.3. VI PHÂN CỦA ÁNH XẠ PHỨC HỢP. Cho một ánh xạ $f : X \to Y$ và một ánh xạ $g : Y \to Z$. Tích của hai ánh xạ f, g (hay phức hợp của hai ánh xạ f, g) là ánh xạ $g \circ f : X \to Z$ được xác định bởi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Định lý 12. *Nếu $f : X \to Y$ khả vi tại $x \in X$ và $g : Y \to Z$ khả vi tại $y = f(x) \in Y$ thì $g \circ f$ khả vi tại x và*

$$(g \circ f)\,(x) = g'(y) \circ f'(x) \tag{36}$$

Chứng minh. Đặt $L(h) = [f'(x)](h)$, $M(k) = [g'(y)](k)$, $\alpha = \|L\| = \|f'(x)\|$, $\beta = \|M\| = \|g'(y)\|$. Theo định nghĩa vi phân, với ε cho trước $(0 < \varepsilon < 1)$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\|h\| < \delta$ kéo theo

$$\|f(x + h) - f(x) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|$$

và tồn tại $\eta > 0$ sao cho $\|k\| < \eta$ kéo theo

$$\|g(y + k) - g(y) - M(k)\| < \varepsilon \|k\|. \tag{37}$$

Do đó với $\|h\| < \delta$.

$$\|f(x + h) - f(x)\| < \|L(h)\| + \varepsilon \|h\| < (\alpha + \varepsilon)\|h\| < (\alpha + 1)\|h\|$$

và đặt $k = f(x + h) - f(x)$, ta thấy rằng (37) sẽ được thỏa mãn nếu $\|h\| < \min\left(\delta, \dfrac{\eta}{\alpha + 1}\right)$. Lúc đó với ánh xạ phức hợp $p = g \circ f$ ta có

$$\|p(x + h) - p(x) - M(k)\| < \varepsilon \|k\| < \varepsilon(\alpha + 1)\|h\|.$$

Nhưng vì $\|k - L(h)\| < \varepsilon\|h\|$ nên $\|M(k) - M[L(h)]\| \leq \beta\varepsilon\|h\|$ và rốt cục $\|p(x+h) - p(x) - M[L(h)]\| \leq \|p(x+h) - p(x) - M(k)\| + \|(M(h) - M(L(h)))\| < \varepsilon(\alpha + \beta + 1).\|h\|$, có nghĩa là $\delta p(x,h) = M(L(h))$ và (36) là đúng. □

Nếu đặt $\delta f = f'(x).\delta x,\ \delta g = g'(y).\delta y$ thì ta có thể viết $\delta(g \circ f) = [g'(y) \circ f'(x)].\delta x = g'(y).\delta f$. Thành thử vi phân của $g \circ f$ có thể suy ra từ vi phân của g bằng cách thay δy bởi $\delta f = f'(x).\delta x$. Đó là tính chất thường được diễn đạt bằng cách nói "vi phân là bất biến qua phép đổi biến".

Trong trường hợp g là ánh xạ tuyến tính liên tục thì $g'(y) = g$, cho nên

Hệ quả : *Nếu $f : X \to Y$ khả vi tại x và $g : Y \to Z$ là tuyến tính liên tục thì $g \circ f$ khả vi tại x và có vi phân bằng*

$$g(\delta f(x,h)). \tag{38}$$

Ví dụ: Xét phiếm hàm $J(y) = \int_0^1 y(x).\sqrt{1+3x^2}dx$.

Phiếm hàm này có thể coi là tích của hai ánh xạ (dưới đây $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{[0,1]}$):

1) Ánh xạ $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, biến đổi phần tử $y(x) \in \mathbb{C}$ thành $F(y) = y.\sqrt{1+3x^2} \in \mathbb{C}$.

2) Ánh xạ $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, biến mỗi phần tử $u(x) \in \mathbb{C}$ thành số $g(u) = \int_0^1 u(x)dx$.

Rõ ràng g là tuyến tính liên tục, cho nên

$$\delta J(y,h) = g(\delta F(y,h)) = \int_0^1 \delta F(y,h)dx.$$

Như vậy muốn tính vi phân của J chỉ cần tìm vi phân của F : $y(x) \to y(x)\sqrt{1+3x^2}$.

Tổng quát hơn, cho D là một không gian định chuẩn làm thành bởi một họ nào đó các hàm số $y(x)$ liên tục trên một tập $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, và giả

sử chuẩn trong D nghiệm đúng $\|y\| \geq \max_{x\in\Omega}|y(x)|$. Khi ấy nếu ánh xạ $F : y(x) \in D \mapsto [F(y)](x) \in D$ khả vi thì phiếm hàm

$$J(y) = \int_\Omega [F(y)](x)dx$$

cũng khả vi và

$$\delta J(y,h) = \int_\Omega \delta F(y,h)dx. \tag{39}$$

Thật vậy, J là tích của ánh xạ F và ánh xạ

$$g : u(x) \in D \mapsto g(u) = \int_\Omega u(x)dx \in \mathbb{R},$$

mà g là tuyến tính liên tục, vì nếu $\|u_k(x) - u(x)\| \to 0$ thì

$$\begin{aligned} |g(u_k) - g(u)| &\leq \int_\Omega |u_k(x) - u(x)|dx \leq \\ &\leq \mu(\Omega) \times \max_{x\in\Omega} |u_k(x) - u(x)| \to 0. \end{aligned}$$

5.4. VI PHÂN CẤP HAI. Giả sử ánh xạ $f : X \to Y$ khả vi tại mọi điểm thuộc một tập mở $\Omega \subset X$, tức là đạo hàm $f'(x)$ tồn tại với mọi $x \in \Omega$. Đạo hàm này, như đã định nghĩa ở trên, là một toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y, tức là một phần tử của không gian $\mathbb{L}(X,Y)$ (không gian các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y). Với mỗi $x \in \Omega$ ứng một $f'(x) \in \mathbb{L}(X,Y)$, cho nên ta có một ánh xạ $f' : \Omega \to \mathbb{L}(X,Y)$. Ta nói ánh xạ f đã cho là *hai lần khả vi* tại x, nếu ánh xạ f' vừa xét khả tại x, nói khác đi, nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục $Q : \Omega \to \mathbb{L}(X,Y)$ sao cho

$$f'(x+k) - f'(x) = Q(k) + u(k) \tag{40}$$

với $\dfrac{\|u(k)\|}{\|k\|} \to 0$ khi $\|k\| \to 0$.

Ở đây $u(k) \in \mathbb{L}(X,Y)$ cho nên $\|u(k)\|$ biểu thị chuẩn của toán tử tuyến tính $u : X \to Y$, và điều kiện $\dfrac{\|u(k)\|}{\|k\|} \to 0$ khi $\|k\| \to 0$ có

nghĩa: với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, có thể tìm được $\delta > 0$ sao cho hễ $\|k\| < \delta$ thì tức khắc $\|u(k)\| \leq \varepsilon\|k\|$, tức là

$$(\forall h \in X) \quad \|u(k).h\| \leq \varepsilon\|k\| \, \|h\|.$$

Theo (40) ta có, với mọi $h \in X$:

$$f'(x+k).h - f'(x).h = Q(k).h + u(k).h,$$

hay là

$$\delta f(x+k,h) - \delta f(x,h) = Q(k).h + u(k).h.$$

Đặt $Q(k,h) = Q(k).h$ ta nhận thấy rằng Q là một toán tử biến mỗi cặp phần tử k, h của X thành phần tử $Q(k).h$ của Y, và toán tử ấy là tuyến tính liên tục theo h khi cố định k, đồng thời là tuyến tính liên tục theo k khi cố định h. Vậy $Q(k,h)$ là một toán tử song tuyến tính liên tục từ $X \times X$ vào Y và rốt cục có thể nói: ánh xạ $f : X \to Y$ hai lần khả vi tại x, nếu tồn tại một toán tử song tuyến tính liên tục $Q(k,h)$ từ $X \times X$ vào Y sao cho

$$(\forall \varepsilon > 0) \; (\exists \delta > 0) \; (\forall k \in X, \; \|k\| < \delta) \; (\forall h \in X) :$$

$$\|\delta f(x+k,h) - \delta f(x,h) - Q(k,h)\| \leq \varepsilon\|k\|.\|h\| \qquad (41)$$

(ở đây chuẩn ở vế phải là chuẩn trong X, chuẩn ở vế trái là chuẩn trong Y).

Toán tử Q gọi là *đạo hàm cấp hai* của f tại x và được ký hiệu $f''(x)$, còn phần tử $Q(k,h) \in Y$ gọi là *vi phân cấp hai* của ánh xạ f tại x, với các gia lượng k, h, và được ký hiệu $\delta^2 f(x;k,h)$. Thành thử

$$\delta^2 f(x;k,h) = f''(x).(k,h).$$

Khi $k = h$ ta cũng viết $\delta^2 f(x,h)$ thay cho $\delta^2 f(x;k,h)$, và cũng thường gọi $\delta^2 f(x,h)$ *là vi phân cấp hai của* f *tại* x *với gia lượng* h. Đương nhiên ánh xạ biến h thành $\delta^2 f(x,h)$ là một toán tử toàn phương liên tục từ X vào Y.

Ở trên đã thấy rằng nếu một phiếm hàm $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi tại mọi x thì hàm số $\varphi(t) = f(x+th)$ có đạo hàm $\varphi'(t) = \delta f(x+th,h)$. Nay

có thể nói thêm: *Nếu phiếm hàm f hai lần khả vi tại mọi x thì hàm số $\varphi(t) = f(x + th)$ có đạo hàm cấp hai*

$$\varphi''(t) = \delta^2 f(x + th, h). \tag{42}$$

Thật vậy, theo Định lý 12 áp dụng cho ánh xạ $f' : \Omega \to \mathbb{L}(X, Y)$ ta có

$$Q(k) = \lim_{t \to 0} \frac{f'(x + tk) - f'(x)}{t},$$

cho nên, với mọi $h \in X$,

$$Q(k).h = \lim_{t \to 0} \frac{f'(x + tk).h - f'(x).h}{t},$$

do đó

$$\delta^2 f(x, h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\delta f(x + th, h) - \delta f(x, h)]$$

và thay x bởi $x + t_0 h$ ta được

$$\begin{aligned} \delta^2 f(x + t_0 h, h) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\delta f(x + t_0 h + th, h) - \delta f(x + t_0 h, h)] \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\varphi'(t_0 + t) - \varphi'(t_0)] = \varphi''(t_0). \end{aligned}$$

Thành thử nếu ánh xạ f hai lần khả vi thì hàm số $\varphi(t) = f(x + th)$ có đạo hàm cấp hai. Áp dụng cho hàm số đó công thức Taylor

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + o(t^2)$$

ta suy ra :

$$f(x + th) = f(x) + t\delta f(x, h) + \frac{t^2}{2}\delta^2 f(x, h) + o(t^2). \tag{43}$$

Ngoài ra ta chú ý tính chất sau đây:

Nếu $f : X \to Y$ hai lần khả vi và $g : Y \to Z$ tuyến tính liên tục thì ánh xạ phức hợp $g \circ f$ cũng hai lần khả vi và có vi phân cấp hai bằng:

$$g(\delta^2 f(x, h))$$

(nói cách khác $(g \circ f)'' = g \circ f''$)

Thật vậy nếu có (40) thì sẽ có

$$g \circ f'(x+k) - g \circ f'(x) = g \circ Q(k) + g \circ u(k).$$

Nhưng theo Định lý 12: $g \circ f' = (g \circ f)'$. Mặt khác $g \circ Q(k)$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ Ω vào $\mathbb{L}(X, Z)$ và do $\|g \circ u(k)\| \leq \|g\|.\|u(k)\|$ nên

$$\frac{\|g \circ u(k)\|}{\|k\|} \leq \|g\|.\frac{\|u(k)\|}{\|k\|} \to 0 \quad (\|k\| \to 0).$$

Vậy $g \circ Q$ quả là vi phân cấp hai của $g \circ f$.

6. CỰC TRỊ CỦA CÁC PHIẾM HÀM KHẢ VI

Từ đây đến cuối chương, X là không gian tuyến tính thực.

Cho một phiếm hàm khả vi $f : X \to \mathbb{R}$, và một tập $E \subset X$. Ta hãy áp dụng các khái niệm và kết quả ở tiết trước vào vấn đề tìm cực trị (cực đại hay cực tiểu) của phiếm hàm f trên tập E tức là tìm một điểm $x_0 \in E$ sao cho

$$(\forall x \in E) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

nếu là bài toán cực đại, hoặc

$$(\forall x \in E) \quad f(x) \geq f(x_0)$$

nếu là bài toán cực tiểu.

Cực trị vừa nói là *cực trị tuyệt đối (toàn cục)* trong toàn bộ E. Nhiều khi người ta chỉ xét cực trị tương đối (hay cực trị địa phương) định nghĩa như sau: $x_0 \in E$ là một điểm *cực đại (cực tiểu) tương đối* (hay *địa phương)* của $f(x)$ trên E nếu có một lân cận S của x_0 sao cho x là điểm cực đại (cực tiểu) của $f(x)$ trên tập $S \cap E$.

Sau đây khi nói cực trị ta hiểu ngầm cực trị tương đối.

6.1. ĐIỀU KIỆN CÓ CỰC TRỊ. Trong các bài toán cực trị thường gặp tập E trên đó ta phải tìm cực trị của $f(x)$ là một *đa tạp tuyến tính*, nghĩa là một tập sao cho: hễ x, y thuộc E thì mọi điểm có dạng

$$\alpha x + (1-\alpha)y \quad (-\infty < \alpha < +\infty) \tag{44}$$

cũng thuộc E.

Tập hợp các điểm có dạng (44) gọi là *đường thẳng* đi qua x, y cho nên một đa tạp tuyến tính cũng có thể định nghĩa là một tập E sao cho: bất cứ đường thẳng nào đã đi qua hai điểm thuộc E thì hoàn toàn chứa trong E.

Để xét xem một điểm x_0 có phải là điểm cực trị của $f(x)$ hay không, người ta so sánh $f(x_0)$ với các trị $f(x)$ tại các điểm gần x_0, tức là các điểm có dạng $x = x_0 + th$, với $h \in X$ và t là một số dương đủ nhỏ. Ta nói h là *chấp nhận được* (tại x_0) nếu $x_0 + h \in E$, và do đó $x_0 + th \in E$ với mọi t.

Trong giải tích sơ cấp, muốn tìm cực trị của một hàm số khả vi ta xét những điểm tại đấy vi phân của nó triệt tiêu.

Định lý sau đây suy rộng trực tiếp sự kiện ấy.

Định lý 13. *Nếu x_0 là điểm cực trị của phiếm hàm khả vi $f(x)$ trên đa tạp tuyến tính E thì với mọi h chấp nhận được:*

$$\delta f(x_0, h) = 0.$$

Chứng minh. Giả sử chẳng hạn x_0 là điểm cực đại. Với $|t|$ đủ nhỏ ta có $f(x_0 + th) - f(x_0) \leq 0$ nên chia cho $t > 0$ và cho $t \to 0+$, suy ra (theo Định lý 11) $\delta f(x_0, h) \leq 0$, đồng thời, chia cho $t < 0$ và cho $t \to 0-$, ta lại được $\delta f(x_0, h) \geq 0$. Vậy

$$\delta f(x_0, h) = 0. \qquad \square$$

Một điểm x_0 sao cho $\delta f(x_0, h) = 0$ với mọi h chấp nhận được gọi là một *điểm dừng* của phiếm hàm f trên tập E.

Định lý trên cho thấy rằng các điểm cực trị đều phải là điểm dừng. Nhưng ngược lại, một điểm dừng không nhất thiết là điểm cực trị.

Muốn biết một điểm dừng nào đó có phải là cực trị không, và là điểm cực đại hay cực tiểu, cần phải dựa vào các vi phân cấp cao (tình hình cũng tương tự như trong giải tích sơ cấp).

Định lý 14. (i) *Nếu x_0 là điểm cực tiểu của $f(x)$ trên E thì*

$$\delta^2 f(x_0, h) \geq 0$$

với mọi h chấp nhận được.

(ii) *Nếu x_0 là điểm dừng của f trên E và có một hằng số $c > 0$ để cho*

$$\delta^2 f(x_0, h) \geq c\|h\|^2$$

với mọi h chấp nhận được, thì x_0 là một điểm cực tiểu của $f(x)$ trên E.

Đối với cực đại cũng có mệnh đề tương tự (thay dấu $\geq$ bởi $\leq$).

Chứng minh. (i) Nếu x_0 là điểm cực tiểu thì nó là điểm dừng và với mọi h chấp nhận được ta có theo công thức (43):

$$f(x_0 + th) - f(x_0) = \frac{t^2}{2}\delta^2 f(x_0, h) + o(t^2). \tag{45}$$

Vả lại với $t > 0$ đủ nhỏ ta phải có $f(x_0 + th) - f(x_0) \geq 0$, tức là $\frac{t^2}{2}\delta^2(x_0, h) + o(t^2) \geq 0$. Do đó cho $t \to 0$ ta được $\delta^2 f(x_0, h) \geq 0$.

(ii) Nếu x_0 là điểm dừng ta có thể viết

$$\delta f(x_0 + h, h) = [\delta f(x_0 + h, h) - \delta f(x_0, h) - \delta^2 f(x_0, h)] + \delta^2 f(x_0, h).$$

Áp dụng công thức (41) với $\varepsilon < c/2$ ta sẽ có khi $\|h\|$ đủ nhỏ :

$$|\delta f(x_0 + h, h) - \delta f(x_0, h) - \delta^2 f(x_0, h)| \leq \frac{c}{2}\|h\|^2$$

và theo giả thiết $\delta^2 f(x_0, h) \geq c\|h\|^2$. Vậy với $\|h\|$ đủ nhỏ (chẳng hạn $\|h\| < \delta$):

$$\delta f(x_0 + h, h) \geq c\|h\|^2 - \frac{c}{2}\|h\|^2 = \frac{c}{2}\|h\|^2 \geq 0.$$

Khi ấy với $0 \leq t \leq 1$ ta vẫn có $\|h\| < \delta$ nên $\delta f(x_0 + th, h) \geq 0$, do đó $\varphi(t) = \delta f(x_0 + th, h) \geq 0$, và vì $\varphi'(0) = \delta f(x_0, h) = 0$, điều đó cho thấy hàm số $\varphi(t)$ đạt cực tiểu ở $t = 0$, tức là $\varphi(t) \geq \varphi(0)$ với mọi $0 \leq t \leq 1$. Do đó $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ với mọi $\|h\| < \delta$, và x_0 đúng là điểm cực tiểu. □

Một trường hợp đặc biệt nhưng khá quan trọng, trong đó điều kiện dừng *đủ* để có cực trị, hơn nữa, có cực trị tuyệt đối, là như sau.

Ta nói một phiếm hàm $f(x)$ là *lồi* trên đa tạp tuyến tính E nếu với mọi $x, y \in E$ và mọi số thực α, $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Từ đó có thể suy ra ngay

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \delta f(x_0, h) \tag{46}$$

với mọi $x_0 \in E$ và mọi h chấp nhận được. Thật vậy với $0 < t < 1$ ta có $x_0 + th = t(x_0 + h) + (1-t)x_0$ nên

$$f(x_0 + th) \leq tf(x_0 + h) + (1-t)f(x_0),$$

do đó

$$\frac{1}{t}[f(x_0 + th) - f(x_0)] \leq f(x_0 + h) - f(x_0),$$

và cho $t \to 0$ ta sẽ được (46) vì giới hạn của vế thứ nhất, theo Định lý 11, chính là $\delta f(x_0, h)$.

Vậy nếu x_0 là điểm dừng, tức là $\delta f(x_0, h) = 0$ với mọi h chấp nhận được thì $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$ với mọi h ấy. Do đó:

Nếu $f(x)$ lồi trên E thì mọi điểm dừng của nó đều là điểm cực tiểu tuyệt đối.

Dấu hiệu để nhận ra một hàm lồi là:

Một phiếm hàm $f(x)$ hai lần khả vi tại mọi điểm mà có $\delta^2 f(x, h) \geq 0$ với mọi $x \in E$ và mọi h chấp nhận được thì lồi trên E.

Thật vậy, cho hai điểm bất kỳ $x, y \in E$ và $h = y - x$. Như trên đã thấy, hàm số $\varphi(t) = f(x + th)$ có $\varphi''(t) = \delta^2 f(x + th, h)$. Vậy $\varphi''(t) \geq 0$ với mọi t và $\varphi'(t)$ là một hàm số đơn điệu tăng theo t, cho nên với $0 < \alpha < 1$:

$$\alpha \int_0^1 [\varphi'(t) - \varphi'(\alpha t)]dt \geq 0,$$

do đó

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha\Big[\varphi(1) - \varphi(0) - \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} + \frac{\varphi(0)}{\alpha}\Big] \\ &= \alpha[f(x+h) - f(x)] - f(x + \alpha h) + f(x) \\ &= (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) - f((1-\alpha)x + \alpha y), \end{aligned}$$

chứng tỏ $f(x)$ lồi.

Thành thử:

Nếu $\delta^2 f(x,h) \geq 0$ với mọi $x \in E$ và mọi h chấp nhận được thì mỗi điểm dừng của $f(x)$ trên E đều là điểm cực tiểu tuyệt đối trên E.

Ta nói $f(x)$ *lõm* nếu $-f(x)$ *lồi*. Những kết quả trên cho thấy rằng: Nếu $\delta^2 f(x,h) \leq 0$ với mọi $x \in E$ và mọi h chấp nhận được thì mỗi điểm dừng của $f(x)$ trên E đều là điểm *cực đại tuyệt đối* trên E.

6.2. CỰC TRỊ RÀNG BUỘC. Trong nhiều bài toán cụ thể, ngoài điều kiện x phải thuộc một đa tạp tuyến tính E, người ta còn đòi hỏi điều kiện phụ

$$g(x) = 0 \tag{47}$$

trong đó $g(x)$ là một phiếm hàm cho trước. Khi ấy việc tìm cực trị của $f(x)$ trên tập các phần tử $x \in E$ nghiệm đúng phương trình (4) gọi là bài toán *cực trị có điều kiện* hay *cực trị ràng buộc*. Phương pháp giải quyết cũng giống như phương trình Lagrange trong giải tích sơ cấp, là dựa vào mệnh đề sau đây để đưa về một bài toán cực trị tự do (không ràng buộc).

Định lý 15. *Giả thiết phiếm hàm $g(x)$ khả vi liên tục (nghĩa là có đạo hàm $g'(x)$ liên tục theo x) trong một lân cận của điểm $x_0 \in E$ và x_0 không phải là một điểm dừng của $g(x)$ trên E. Nếu x_0 là một điểm cực trị tương đối của $f(x)$ trên E, với ràng buộc (47), thì tồn tại một số thực λ để cho x_0 là một điểm dừng của phiếm hàm $f + \lambda g$, trên E, nghĩa là với mọi h chấp nhận được:*

$$\delta f(x_0, h) + \lambda \delta g(x_0, h) = 0$$

Chứng minh. Vì x_0 không phải là điểm dừng của g nên có ít nhất một k chấp nhận được sao cho $\delta g(x_0, k) \neq 0$. Ta hãy xét một vectơ h bất kỳ chấp nhận được và đặt

$$\varphi(t,s) = f(x_0 + th + sk),\ \psi(t,s) = g(x_0 + th + sk).$$

Phương trình

$$\psi(t,s) = 0$$

nghiệm đúng với $t = s = 0$. Do giả thiết về $g(x)$ nên theo các kết quả ở mục 5.3, hàm số $\psi(t, s)$ khả vi liên tục và

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}\Big|_{\substack{t=0\\s=0}} = \delta g(x_0 + th + sk, k)\Big|_{\substack{t=0\\s=0}} = \delta g(x_0, k) \neq 0.$$

Vậy theo định lý hàm ẩn, tồn tại một hàm $s = s(t)$ xác định và khả vi trong một lân cận của $t = 0$ sao cho $s(0) = 0$, $\psi(t, s(t)) = 0$ và

$$\frac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = \Big(-\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{\substack{t=0\\s=0}}\Big) \Big/ \Big(\frac{\partial \psi}{\partial s}\Big|_{\substack{t=0\\s=0}}\Big) = -\frac{\delta g(x_0, h)}{\delta g(x_0, k)}.$$

Mà $\varphi(t, s)$ cũng khả vi nên hàm số $\Phi(t) = \varphi(t, s(t))$ khả vi theo t. Đương nhiên $\Phi(t)$ đạt cực trị tại $t = 0$, vậy

$$\frac{d\Phi}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{\substack{t=0\\s=0}} + \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt}\Big)\Big|_{\substack{t=0\\s=0}} = 0.$$

Chú ý rằng $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{\substack{t=0\\s=0}} = \delta f(x_0, h)$ và đặt $\lambda = -\dfrac{\delta g(x_0, k)}{\delta g(x_0, k)}$, ta suy ra

$$\delta f(x_0, h) + \lambda \delta g(x_0, h) = 0. \qquad \square$$

Dựa vào định lý trên, muốn tìm cực trị của $f(x)$ với ràng buộc (47), người ta coi λ là một tham số chưa biết để tìm một điểm dừng của phiếm hàm $f + \lambda g$. Khi có điểm dừng này: $x_0 = x_0(\lambda)$ thì phương trình $g(x_0(\lambda)) = 0$ giúp ta xác định λ và nhờ đó có thể suy ra một lời giải của bài toán.

Trong phát biểu Định lý 15 nếu muốn bỏ giả thiết: "x_0 không phải là điểm dừng của $g(x)$ trên E ", thì kết luận phải đổi lại là : "tồn tại hai số thực μ, λ với $|\mu| + |\lambda| > 0$, để cho x_0 là điểm dừng của phiếm hàm

$$\mu f(x) + \lambda g(x)$$

trên đa tạp E ".

Thật vậy, nếu x_0 không phải là điểm dừng của $g(x)$ thì có thể cho $\mu = 1$, nếu x_0 là điểm dừng của $g(x)$ thì cho $\mu = 0$.

Dưới dạng này định lý có thể mở rộng cho trường hợp ràng buộc có dạng

$$g_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{48}$$

nghĩa là trong đẳng thức (47) $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x))$ là một ánh xạ từ X vào $\mathbb{R}^m$.

Khi ấy :

Nếu mỗi phiếm hàm $g_i(x)$ đều khả vi liên tục trong một lân cận của điểm $x_0 \in E$ và x_0 là một điểm cực trị tương đối của $f(x)$ trên E, với ràng buộc (48), thì tồn tại các số thực $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ với $|\mu| + \sum_i |\lambda_i| > 0$ sao cho x_0 là điểm dừng trên E của phiếm hàm

$$\mu f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

Muốn chứng minh mệnh đề này, trước hết ta để ý rằng:

Cho $G_1(h), G_2(h), \ldots, G_m(h)$ là m hàm số tùy ý xác định trên một tập H. Nếu với mọi $k_1, k_2, \ldots, k_m \in H$ định thức $\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ của ma trận lập thành bởi các số $G_i(k_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ đều bằng 0 thì tồn tại những số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ với $\Sigma|\lambda_i| > 0$, sao cho

$$(\forall h \in H) \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i(h) = 0.$$

Thật vậy điều đó hiển nhiên với $m = 1$. Giả sử nó đúng với $m = N - 1$ ta hãy chứng minh cho $m = N$.

Gọi $\Delta'(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1})$ là định thức của ma trận lập thành bởi các số $G_i(k_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N-1)$. Nếu với mọi $k_1, k_2, \ldots, k_{N-1} \in H$ ta có $\Delta'(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}) = 0$ thì theo giả thiết qui nạp phải tồn tại các số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-1}$ với $\Sigma|\lambda_j| > 0$ sao cho với mọi $h \in H$: $\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i G_i(h) = 0$. Lúc đó đặt $\lambda_N = 0$ ta sẽ có $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i G_i(h) = 0$. Vậy có thể coi như tồn tại những phần tử $k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}$ sao cho

$$\Delta'(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}) \neq 0. \tag{49}$$

Cho h là một phần tử bất kỳ của H. Ta hãy lấy λ_i bằng phần bù đại số của phần tử $G_i(h)$ (tức là phần tử ở giao của dòng i với cột N) trong định thức $\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}, h)$. Rõ ràng λ_i là hằng số (không phụ thuộc h) và ta có

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i G_i(h) = \Delta(k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}, h) = 0.$$

Vả lại do (49) nên $\lambda_N \neq 0$. Vậy tính chất nêu trên là đúng với $m = N$, và do đó đúng với mọi m.

Bây giờ ta trở lại định lý đã phát biểu. Cho x_0 là một điểm cực trị tương đối của $f(x)$ trên E với điều kiện (48). Nếu với mọi $k_1, k_2, \ldots, k_m$ chấp nhận được định thức $\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ của ma trận lập thành bởi các số $\delta g_i(x_0, k_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ đều bằng 0 thì theo trên sẽ tồn tại các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ với $\sum |\lambda_i| > 0$, sao cho với mọi h chấp nhận được:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta g_i(x_0, h) = 0.$$

Khi ấy lấy $\mu = 0$ ta sẽ được những số $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ đòi hỏi. Vậy có thể cho rằng tồn tại $k_1, k_2, \ldots, k_m$ chấp nhận được sao cho

$$\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_m) \neq 0.$$

Cho một vectơ chấp nhận được h (bất kỳ). Ta hãy đặt

$$\varphi(t, s_1, \ldots, s_m) = f(x_0 + th + s_1 k_1 + \ldots + s_m k_m),$$

$\psi_i(t, s_1, \ldots, s_m) = g_i(x_0 + th + s_1 k_1 + \ldots + s_m k_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Hệ phương trình $\psi_i(t, s_1, \ldots, s_m) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ nghiệm đúng với $t = s_1 = \ldots = s_m = 0$ và các hàm số $\psi_i(t, s_1, \ldots, s_m)$ khả vi liên tục, với

$$\left.\frac{\partial \psi_i}{\partial s_j}\right|_{\substack{t=0 \\ s_1 = \ldots = s_m = 0}} = \delta g_i(x_0, k_j).$$

Vì định thức $\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ của ma trận lập thành bởi các $\delta g_i(x_0, k_j)$ là khác 0 nên theo định lý hàm ẩn, tồn tại các hàm $s_i = s_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, xác định và khả vi trong một lân cận của $t = 0$ sao cho $s_i(0) = 0$, và $\psi_i(t, s_1(t), \ldots, s_m(t)) = 0$. Từ đó suy ra hàm số $\Phi(t) =$

$\varphi(t, s_1(t), \ldots, s_m(t))$ khả vi theo t, rồi do $t = 0$ là điểm cực trị của nó, ta phải có $\Phi'(0) = 0$. Đến đây việc hoàn thành chứng minh tương tự như trong trường hợp $m = 1$.

7. BÀI TOÁN BIẾN PHÂN CƠ BẢN

7.1. NỘI DUNG BÀI TOÁN. Cho $D^1_{[a,b]}$ là không gian định chuẩn lập thành bởi tập các hàm số $y(x)$ khả vi liên tục trên $[a, b]$, với chuẩn xác định bởi: [4]

$$\|y(x)\|_1 = \max_{a \le x \le b} \{|y(x)|,\ |y'(x)|\}.$$

Nhiều vấn đề hình học, cơ học đưa đến bài toán cực trị sau đây: cho một hàm số $f(x, u, v)$ có mọi đạo hàm riêng đến cấp 2 liên tục đối với toàn thể các đối số, hãy tìm cực trị của phiếm hàm

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \tag{50}$$

trên đa tạp tuyến tính E tạo nên bởi các hàm số $y(x)$ thỏa mãn các điều kiện biên

$$y(a) = \alpha \qquad y(b) = \beta \tag{51}$$

(dễ nghiệm lại rằng tập các $y(x)$ thỏa mãn các điều kiện này đúng là một đa tạp tuyến tính).

Ví dụ: 1) *Mặt tròn xoay có diện tích nhỏ nhất.* Trong tất cả các đường cong $y = y(x)$ nối hai điểm (a, α) và (b, β) cho trước hãy tìm đường nào khi quay xung quanh trục Ox sẽ gây ra mặt tròn xoay có diện tích nhỏ nhất.

Theo công thức tính diện tích mặt tròn xoay:

$$J(y) = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y^2}dx,$$

vậy vấn đề là tìm cực tiểu của tích phân này trên tập các hàm số $y = y(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta.$$

[4] Để tránh nhầm lẫn trong phần này ta dùng ký hiệu $\|.\|_1$ để chỉ chuẩn trong $D^1_{[a,b]}$ và dành ký hiệu $\|.\|$ cho chuẩn trong $C_{[a,b]}$.

2) *Đường đoản thời.* Trong mặt phẳng thẳng đứng cho hai điểm $A(0,0)$ và $B(b,\beta)$ $(b \neq 0)$, hãy tìm đường cong $y = y(x)$ nối hai điểm đó sao cho một chất điểm trượt theo đường cong ấy dưới tác dụng trọng lực sẽ đi từ A đến B trong khoảng thời gian ngắn nhất.

Theo cơ học, tại điểm (x,y) vận tốc của chất điểm bằng $v = \sqrt{2gy}$, cho nên

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

và thời gian đi từ A đến B là

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx.$$

Vậy vấn đề là tìm cực tiểu của tích phân này trên tập các hàm số $y(x)$ thỏa mãn điều kiện: $y(0) = 0,\ y(b) = \beta$.

Bài toán này đã được J. Bernouilli nêu ra từ năm 1696.

7.2. PHƯƠNG TRÌNH EULER. Để tìm cực trị của phiếm hàm (50) ta hãy xác định biến phân của nó.

Cho $F : D^1_{[a,b]} \to \mathbb{C}_{[a,b]}$ là ánh xạ biến $y = y(x)$ thành $F(y) = f(x, y(x), y'(x))$. Theo hệ quả Định lý 12 ta có

$$\delta J(y,h) = \int_a^b \delta F(y,h)dx.$$

Vậy ta hãy tính biến phân của ánh xạ F. Ta có

$$\begin{aligned} &F(y+h) - F(y) \\ &= f(x, y(x)+h(x), y'(x)+h'(x)) - f(x, y(x), y'(x)) \\ &= \bar{f}_y h(x) + \bar{f}_{y'} h'(x), \end{aligned}$$

với $\bar{f}_y = f_y(x, y(x)+\theta h(x), y'(x)+\theta h'(x))$, $(0 < \theta < 1)$ và $\bar{f}_{y'}$ cũng có ý nghĩa tương tự. Thay $\bar{f}_y$ và $\bar{f}_{y'}$ bởi f_y và $f_{y'}$ ta có thể viết

$$F(y+h) - F(y) = f_y h(x) + f_{y'} h'(x) + r(h).$$

trong đó

$$r(h) = (\bar{f}_y - f_y)h(x) + (\bar{f}_{y'} - f_{y'})h'(x).$$

Dễ thấy rằng $r(h) = o(\|h\|_1)$.

Thật vậy, với $\|h\|_1 \leq 1$ thì $\|y + h\| \leq K$, $\|y' + h'\| \leq K$ $(K = \|y\|_1 + 1)$. Nhưng trong miền compac: $a \leq x \leq b$, $|u| \leq K$, $|v| \leq K$, các đạo hàm riêng của $f(x, u, v)$ liên tục đều, cho nên với $\|h\|_1$ đủ nhỏ, chẳng hạn, $\|h\|_1 < \delta$, ta có với mọi x trong đoạn $[a, b]$.

$$|\bar{f}_y - f_y| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |\bar{f}_{y'} - f_{y'}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Khi ấy

$$\|r(h)\| = \max_{a \leq x \leq b} |r(h(x))| < \varepsilon \|h\|_1,$$

chứng tỏ

$$\delta F(y, h) = f_y h(x) + f_{y'} h'(x),$$

do đó

$$\delta J(y, h) = \int_a^b [f_y h(x) + f_{y'} h'(x)] dx. \tag{52}$$

Ở đây gia lượng $h(x)$ chấp nhận được khi và chỉ khi $h(a) = 0$, $h(b) = 0$. Vậy điều kiện để $y = y(x)$ đạt cực trị của $J(y)$ là

$$\int_a^b [f_y h(x) + f_{y'} h'(x)] dx = 0 \tag{53}$$

với mọi $h(x) \in D^1_{[a,b]}$ sao cho $h(a) = h(b) = 0$.

Để biến đổi biểu thức (53) ta dựa vào bổ đề sau đây:

Bổ đề 1 (Dubois-Raymond). *Cho $A(x)$, $B(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$. Nếu với mọi $h(x) \in D^1_{[a,b]}$ nghiệm đúng $h(a) = h(b) = 0$ ta luôn có*

$$\int_a^b [A(x)h(x) + B(x)h'(x)] dx = 0$$

thì $B(x)$ có đạo hàm và $B'(x) = A(x)$.[5]

Chứng minh. Đặt $P(x) = \int_a^b A(t)dt + C$, trong đó C là một hằng số sẽ xác định sau. Vì $P'(x) = A(x)$ nên lấy tích phân từng phần ta

[5]Trường hợp riêng của bổ đề này khi $B(x) \equiv 0$ thường gọi là Bổ đề Lagrange.

được

$$\int_a^b A(x)h(x)dx = P(x)h(x)\Big|_a^b - \int_a^b P(x)h'(x)dx = \\ = -\int_a^b P(x)h'(x)dx.$$

Do đó với mọi $h \in D^1_{[a,b]}$ mà $h(a) = h(b) = 0$ ta có

$$\int_a^b (Ah + Bh')dx = \int_a^b (B - P)h'dx = 0. \tag{54}$$

Lấy $h(x) = \int_a^x [B(t) - P(t)]dt$, thì rõ ràng $h(a) = 0$. Chọn hằng số C sao cho

$$h(b) = \int_a^b [B(t) - P(t)]dt = 0$$

tức là

$$\int_a^b B(x)d(x) - \int_a^b \Big(\int_a^b A(t)dt\Big)dx - C(b-a) = 0.$$

Hiển nhiên $h(x)$ có đạo hàm, và $h'(x) = B(x) - P(x)$. Vậy theo (54) ta có

$$\int_a^b [B(x) - P(x)]^2 dx = 0,$$

từ đó suy ra $B(x) = P(x)$ với mọi $a \le x \le b$, vì nếu $B(x_0) \ne P(x_0)$, thì, do liên tục $|B(x) - P(x)| \ge \varepsilon > 0$ trong một đoạn $[\alpha, \beta]$ bao gồm x_0 và tích phân trên sẽ lớn hơn

$$\int_\alpha^\beta [B(x) - P(x)]^2 \ge \varepsilon^2(\beta - \alpha) > 0.$$

Do đó $B'(x) - P'(x) = A(x)$, đúng như khẳng định trong bổ đề. □

Áp dụng bổ đề cho (53) với $A = f_y$, $B = f_{y'}$, ta suy ra:

Định lý 16. *Với những giả thiết đã nêu (tức $f(x, u, v)$ có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục đối với toàn thể đối số) mọi hàm $y = y(x)$ đạt cực*

trị của $J(y)$ đều phải thỏa mãn điều kiện sau đây, gọi là phương trình Euler

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0. \tag{55}$$

Một đường cong $y = y(x)$ nghiệm đúng phương trình Euler, dù có thực hiện được hay không cực trị của phiếm hàm đã cho, được gọi là một *đường cực trị* của phiếm hàm (50).

Nếu $y = y(x)$ là đường cực trị thì $f_{y'}$ phải có đạo hàm theo x. Đạo hàm đó là giới hạn của tỉ số

$$\frac{1}{\Delta x}[f_{y'}(x + \Delta x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - f_{y'}(x, y, y')]$$
$$= \bar{f}_{y'x}\frac{\Delta x}{\Delta x} + \bar{f}_{y'y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \bar{f}_{y'y'}\frac{\Delta y'}{\Delta x},$$

trong đó ngang trên biểu thị trị của biểu thức tương ứng ở một điểm trung gian nào đó giữa (x, y, y') và $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ y' + \Delta y')$. Khi $\Delta x \to 0$ thì hai hạng tử đầu dần tới $f_{y'x} + f_{y'y}.y'$, vậy nếu $f_{y'y'} \neq 0$ thì $\dfrac{\Delta y'}{\Delta x}$ phải dần tới một giới hạn xác định. Thành thử:

Nếu $y = y(x)$ là một đường cực trị thì $y(x)$ phải có đạo hàm cấp hai $y''(x)$ tại mọi điểm mà ở đấy $f_{y'y'} \neq 0$.

Phương trình (55) có thể viết dưới dạng

$$f_y - f_{xy'} - f_{yy'}y' - f_{y'y'}.y'' = 0. \tag{56}$$

Đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp hai, cho nên nghiệm tổng quát của nó phụ thuộc hai tham số: C_1 và C_2 và có dạng $y(x, C_1, C_2)$. Dựa vào các điều kiện biên:

$$y(a, C_1, C_2) = \alpha, \quad y(b, C_1, C_2) = \beta$$

ta sẽ xác định được các hằng số C_1, C_2. Đương nhiên nếu không có số C_1, C_2 nào thỏa mãn hai phương trình trên thì bài toán cực trị đã cho không có nghiệm (trong đó các hàm $y(x)$ khả vi). Nhưng nếu có những số C_1, C_2 thỏa mãn hai phương trình đó thì đường cực trị $y = y(x, C_1, C_2)$ cũng chưa chắc đã thực hiện được cực trị của phiếm hàm $J(y)$, vì điều kiện (55) chỉ là cần chứ chưa đủ. Muốn kết luận

dứt khoát cần phải kiểm tra lại trực tiếp hoặc dung những phương pháp phân tích tinh vi hơn vượt quá khuôn khổ giáo trình này.

Để ý thêm rằng nhân hai vế của (55) với y' và cộng f_x vào hai vế ta được một dạng khác của phương trình Euler:

$$\frac{d}{dx}(f - y'f_{y'}) = f_x. \tag{57}$$

7.3. ĐIỀU KIỆN LEGENDRE. Trong nhiều trường hợp , dùng biến phân cấp hai có thể được thêm thông tin về tình hình cực trị có đạt thực sự hay không.

Bằng phương pháp tương tự như đã làm đối với biến phân cấp một, ta tính được biến phân cấp hai của F là:

$$\delta^2 F(y,h) = f_{yy}h^2(x) + 2f_{yy'}h(x)h'(x) + f_{y'y'}h'^2(x).$$

Thật vậy, theo kết quả đã cho

$$\delta F(y,h) = f_y h(x) + f_{y'}h'(x),$$

cho nên

$$\begin{aligned}\delta F(y+k,h) - \delta F(y,h) &= h[f_y(x,y+k,y'+k') - f_y(x,y,y'] + \\ &+h'[f_{y'}(x,y+k,y'+k') - f_{y'}(x,y,y')] = \\ &= h[k\bar{f}_{yy} + k'\bar{f}_{yy'}] + h'[k\bar{f}_{y'y} + k'\bar{f}_{y'y'}],\end{aligned}$$

trong đó $\bar{f}_{yy}$ chẳng hạn có nghĩa là $f_{yy}(x, y(x)+\theta k(x), y'(x)+\theta k'(x))$ $(0 < \theta < 1)$. Thay các $\bar{f}_{yy}, \ldots$ bởi $f_{yy}, \ldots,$ ta được

$$\delta F(y+k,h) - \delta F(y,h) = hkf_{yy} + (hk' + h'k)f_{yy'} + h'k'f_{y'y'} + u(k,h)$$

với $u(k,h) = hk(\bar{f}_{yy} - f_{yy}) + (hk' + h'k)(\bar{f}_{yy'} - f_{yy'}) + h'k'(\bar{f}_{y'y'} - f_{y'y'})$. Do sự liên tục đều của các đạo hàm riêng cấp hai của $f(x,u,v)$ trong mỗi miền compac nên với $\|k\|_1$ đủ nhỏ, chẳng hạn $\|k\|_1 < \delta$, ta có, với mọi $x \in [a,b]$:

$$|\bar{f}_{yy} - f_{yy}| < \varepsilon/4,\ |\bar{f}_{yy'} - f_{yy'}| < \varepsilon/4,\ |\bar{f}_{y'y'} - f_{y'y'}| < \varepsilon/4.$$

Khi ấy $\|u(k;h)\| = \max\limits_{a\le x\le b} |(u(k(x),h(x))| < \varepsilon\|k\|_1.\|h\|_1$. Vậy

$$\delta^2 F(y+k,h) = hkf_{yy} + (hk' + h'k)f_{yy'} + h'k'f_{y'y'},$$

từ đó suy ra biểu thức đã nêu cho $\delta^2 F(y,k)$. Do đó biến phân cấp hai của $J(y)$ là

$$\delta^2 J(y,h) = \int_a^b (f_{yy}h^2 + 2f_{yy'}hh' + f_{y'y'}h'^2)dx. \tag{58}$$

Theo Định lý 14 nếu $J(y)$ đạt cực tiểu tại y_0 thì

$$\delta^2 J(y,h) \geq 0$$

với mọi h chấp nhận được (tức là sao cho $h(x) \in D^1_{[a,b]}$ và $h(a) = h(b) = 0$). Ta hãy biến đổi điều kiện này thành một dạng thuận tiện hơn.

Lấy tích phân từng phần và chú ý rằng $h(a) = h(b) = 0$ ta được:

$$\int_a^b 2f_{yy'}hh'dx = \int_a^b f_{yy'}d(h^2) = -\int_a^b h^2\Big(\frac{d}{dx}f_{yy'}\Big)dx.$$

Thành thử

$$\delta^2 J(y,h) = \int_a^b (Nh^2 + Ph'^2)dx,$$

với

$$N = f_{yy} - \frac{d}{dx}f_{yy'}, \quad P = f_{y'y'}.$$

Đến đây ta chú ý :

Bổ đề 2. *Muốn cho phiếm hàm toàn phương*

$$Q = \int_a^b (Nh^2 + Ph'^2)dx \quad (N = N(x),\ P = P(x))$$

không âm với mọi hàm $h(x)$ nghiệm đúng $h(a) = h(b) = 0$ thì cần phải có:

$$P(x) \geq 0 \ \ (a \leq x \leq b). \tag{59}$$

Chứng minh. Giả sử (59) không đúng tức là có một điểm c với $P(c) < 0$. Ta sẽ chứng minh rằng với $h(x)$ được chọn thích hợp phiếm hàm nói trên có trị âm. Cụ thể ta chọn $h(x)$ sao cho tích phân của Nh^2

không đáng kể so với tích phân của Ph'^2, chẳng hạn: lấy một khoảng $c-\sigma \le x \le c+\sigma$ đủ nhỏ để trong khoảng ấy

$$|N(x)| \le \frac{1}{4\sigma}P(c),\ P(x) < \frac{1}{2}P(c),$$

rồi chọn $h(x) \in D^1_{[a,b]}$ sao cho $h(x)$ triệt tiêu ngoài khoảng $c-\sigma \le x \le c+\sigma$, $|h(x)| \le 1$ với mọi x, và $h'(x) \ge \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ với mọi x trong một khoảng có độ dài $\ge \sigma$. Ta được

$$Q = \int_a^b Nh^2 + \int_a^b Ph'^2 dx \le \frac{1}{4\sigma}P(c)\cdot 2\sigma - \frac{1}{2}P(c)\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\sigma = 0. \quad \square$$

Bổ đề này cho phép suy ra:

Định lý 17 (Legendre). *Muốn cho phiếm hàm*

$$J(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx$$

đạt cực tiểu tại đường cực trị $y_0(x)$ điều kiện cần là

$$f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \ge 0, \qquad (a \le x \le b).$$

7.4. VÍ DỤ: 1) Tìm cực tiểu của phiếm hàm

$$J(y) = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx$$

với các điều kiện biên $y(1) = 0,\ y(2) = 1$.

Hàm dưới tích phân $f(x,y,y') = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{x}$ không chứa y nên phương trình Euler (6) có dạng

$$\frac{d}{dx}f_{y'} = 0$$

tức là

$$f_{y'} = \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C \text{ (hằng số)}$$

do đó $y'^2(1-x^2C^2) = C^2x^2$, nghĩa là $y' = \dfrac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}$.

Lấy tích phân ta được

$$y = \frac{1}{C}\sqrt{1-C^2x^2} + C_1 \text{ hay } (y-C_1)^2 + x^2 = \frac{1}{C^2}.$$

Vậy đường cực trị là đường tròn có tâm trên trục y. Theo các điều kiện biên: $C_1^2 + 1 = \dfrac{1}{C^2}$, $(1-C_1)^2 + 4 = \dfrac{1}{C^2}$, ta suy ra $C_1 = 2$, $C = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, cho nên đường ta tìm là:

$$(y-2)^2 + x^2 = 5.$$

Ở đây $f_{y'y'}h'^2 = \dfrac{h'^2}{x(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ cho nên theo công thức (58) ta có với mọi y và h

$$\delta^2 J(y,h) = \int_1^2 \frac{h'^2}{x(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}dx \geq 0,$$

chứng tỏ rằng $J(y)$ lồi và ta có đúng cực tiểu tuyệt đối.

2) Trên mặt cầu.

$$x = \cos\varphi\cos\theta,\ y = \sin\varphi\cos\theta,\ z = \sin\theta$$

hãy tìm đường cong $\varphi = \varphi(\theta)$ ngắn nhất nối hai điểm A, B cho trước. Như đã biết, ta có $ds^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2$ nên độ dài đường cong $\varphi = \varphi(\theta)$ nối A và B bằng

$$J(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1+\cos^2\theta.\varphi'^2}d\theta$$

trong đó φ' là đạo hàm của φ đối với θ. Vậy vấn đề là tìm cực tiểu của $J(\varphi)$.

Hàm dưới tích phân $f(\theta, \varphi, \varphi')$ không chứa φ nên cũng như trong ví dụ trước, phương trình Euler có tích phân đầu

$$f\varphi' = \frac{\cos^2\theta.\varphi'}{\sqrt{1+\cos^2\theta.\varphi'^2}} = C$$

hay

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{C}{\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta - C^2}}$$

Đặt $\text{tg}\theta = t$ ta tìm được tích phân tổng quát của phương trình này là $\sin(\varphi + C_2) = C_1\text{tg}\theta$ $(C_1 = \dfrac{C}{\sqrt{1-C^2}})$ hay $\sin\theta = p\sin\varphi\cos\theta + q\cos\varphi\cos\theta$ trong đó p, q là những hằng số mới. Trở lại các tọa độ x, y, z ta có

$$z = px + qy,$$

tức là đường cong ta tìm là giao của mặt cầu với một mặt phẳng đi qua gốc, nói cách khác là một vòng tròn lớn của mặt cầu.

Ở đây

$$f_{\varphi'\varphi'}h'^2 = \frac{\cos^2\theta.h'^2}{(1+\cos^2\theta.\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} \geq 0$$

nên theo công thức (58):

$$\delta^2 J(\varphi, h) = \int_a^b \frac{\cos^2\theta.h'^2}{(1+\cos^2\theta.\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta \geq 0.$$

Vậy $J(\varphi)$ lồi và do đó, đường cực trị đúng là đường ngắn nhất.

3) Xét bài toán mặt tròn xoay có diện tích nhỏ nhất nêu ra ở mục 1. Bài toán này đưa về tìm cực tiểu của phiếm hàm

$$J(y) = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$$

trên đa tạp tuyến tính tạo thành bởi các $y(x) \in D^1_{[a,b]}$ thỏa mãn các điều kiện biên $y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$.

Hàm dưới tích phân không phụ thuộc x, cho nên $f_x = 0$ và phương trình Euler (57) có dạng

$$\frac{d}{dx}(f - y'f_{y'}) = 0.$$

Thành thử một tích phân đầu của phương trình Euler là:

$$f - y'f_{y'} = C \quad \text{(hằng số)}, \tag{60}$$

hay

$$y\sqrt{1+y'^2} - y\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

tức là

$$y = C\sqrt{1+y'^2},$$

do đó

$$y' = \sqrt{\frac{y^2 - C^2}{C^2}}.$$

Tách biến ta được

$$\int \frac{C\,dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \int dx,$$

nghĩa là

$$x + C_1 = C \ln(y + \sqrt{y^2 - C^2}),$$

do đó

$$y = C \operatorname{ch} \frac{x + C_1}{C}. \tag{61}$$

Như vậy đường cực trị là một đường dây xích, và mặt tròn xoay có diện tích nhỏ nhất phải là một mặt catênôit (mặt sinh bởi một đường dây xích quay xung quanh đường chuẩn của nó). Hai hằng số C, C_1 được xác định bởi các điều kiện biên $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. Có thể chứng minh rằng tùy theo vị trí của các điểm (a, α) và (b, β) mà có thể xảy ra ba trường hợp.

- Qua hai điểm (a, α) và (b, β) có một đường duy nhất có dạng (61): đó sẽ là lời giải bài toán.

- Qua hai điểm nói trên có hai đường có dạng (61): một trong hai đường sẽ là lời giải (thực hiện cực tiểu của diện tích mặt tròn xoay), còn đường kia không phải là lời giải.

- Không có đường nào có dạng (61). Qua hai điểm nói trên: bài toán sẽ không có lời giải (trong lớp các hàm $y(x) \in D^1_{[a,b]}$).

4) Xét bài toán đường đoản thời nêu ra ở Ví dụ 2), mục 7.1. Bài toán này đưa về tìm cực tiểu của phiếm hàm

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

trên đa tạp tuyến tính tạo thành bởi các hàm số $y(x)$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = 0,\ y(b) = \beta$.

Vì hàm dưới tích phân không phụ thuộc x nên cũng như ở Ví dụ 2) trên đây, một tích phân đầu của phương trình Euler là

$$f - y' f_{y'} = C$$

hay

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}} = C$$

do đó

$$y'^2 = \frac{C_1 - y}{y} \quad (C_1 = \frac{1}{2gC^2}). \tag{62}$$

Đặt

$$y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos\ u),$$

ta suy ra

$$y' = \frac{C_1}{2} u' \sin u,$$

và đem thay vào (62) rồi rút gọn ta được :

$$\frac{C_1}{2}(1 - \cos u)du = \pm dx,$$

và do đó

$$x = \pm\frac{C_1}{2}(u - \sin u) + C_2; \quad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos u).$$

Thành thử các đường cực trị là những đường xyclôit. Dựa vào các điều kiện $y(0) = 0,\ y(b) = \beta$, ta xác định được hai hằng số C_1 và C_2.

7.5. BÀI TOÁN ĐẲNG CHU. Người ta quen gọi "bài toán đẳng chu" là bài toán tìm cực trị của phiếm hàm

$$\int_a^b f(x, y, y')dx \tag{63}$$

với ràng buộc

$$\int_a^b g(x, y, y')dx = l. \tag{64}$$

Sở dĩ gọi như vậy là vì trong nhiều trường hợp tích phân (64) biểu diễn độ dài (chu vi) của đường cong $y = y(x)$, và nội dung vấn đề là tìm trong tất cả các đường cong có chu vi bằng nhau đường nào đạt cực trị của tích phân (63).

Điển hình của loại bài toán này là "bài toán Didon" sau đây: trong tất cả các đường cong có độ dài l nối hai điểm A, B cho trước, hãy tìm đường nào hạn định với đoạn AB một diện tích lớn nhất. Giả thiết A, B ở trên trục x, với hoành độ a, b, và đường cong phải tìm chỉ cắt mỗi đường song song với trục tung ở nhiều nhất là một điểm, ta có thể phát biểu: tìm cực đại của phiếm hàm

$$\int_a^b y(x)dx, \tag{65}$$

với điều kiện biên $y(a) = y(b) = 0$ và ràng buộc

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx = l. \tag{66}$$

Rõ ràng tích phân (66) đạt trị dừng trên những đường thẳng, mà đường thẳng chỉ có thể là lời giải cho bài toán trong trường hợp tầm thường l bằng đúng độ dài đoạn AB. Vậy ta chỉ cần tìm lời giải trong tập các đường $y = y(x)$ không đạt trị dừng của tích phân (66). Muốn thế theo Định lý 15 về cực trị ràng buộc ta tìm các điểm dừng của phiếm hàm

$$J(y) = \int_a^b (y + \lambda\sqrt{1+y'^2})dx.$$

Hàm dưới tích phân không phụ thuộc x, nên một tích phân đầu của phương trình Euler là:

$$y + \lambda\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1,$$

hay

$$y + \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1, \tag{67}$$

do đó

$$y' = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y-C_1)^2}}{y - C_1},$$

nghĩa là

$$\frac{(y - C_1)dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2}} = dx,$$

và lấy tích phân ta được

$$(y - C_1)^2 + (x - C_2)^2 = \lambda^2.$$

Vậy đường cực trị là cung tròn có bán kính $|\lambda|$ và tâm là điểm có tọa độ C_1, C_2. Các điều kiện $y(a) = y(b) = 0$ và (66) cho phép xác định các hằng số C_1, C_2, và λ.

Vì giả thiết đường cong phải tìm chỉ cắt mỗi đường song song với trục tung ở một điểm là nhiều nhất, nên $C_1 < 0$, và do đó $C_1 - y < 0$ (vì $y \geq 0$). Vậy theo (67) $\lambda < 0$. Từ đó suy ra $J(y)$ lõm, vì

$$\delta^2 J(y, h) = \int_a^b f_{y'y'} h'^2 dx = \lambda \int_a^b \frac{h'^2}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} dx \leq 0,$$

cho nên điểm dừng của $J(y)$ là cực đại tuyệt đối của nó. Vậy nếu $y_0 = y_0(x)$ là đường cực trị của $J(y)$ thì $J(y) \leq J(y_0)$ với mọi $y = y(x)$. Mà $y_0 = y_0(x)$ thỏa mãn (66) nên $y_0 = y_0(x)$ đúng là đường cong đạt cực đại của phiếm hàm (65) với các điều kiện đã cho.

6) Tìm cực trị của phiếm hàm

$$\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx, \tag{68}$$

với các điều kiện $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ và

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = l. \tag{69}$$

Nội dung thực tế của bài toán này là: tìm vị trí cân bằng của một dây đồng chất có độ dài l cố định ở hai đầu mút và chịu tác dụng của trọng lực (như đã biết, vị trí cân bằng được xác định bởi điều kiện: trọng tâm của dây phải ở vị trí thấp nhất có thể được).

Ta tìm các điểm dừng của phiếm hàm

$$J(y) = \int_a^b (y - \lambda)\sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Đặt $y - \lambda = z$ ta đưa phiếm hàm này về dạng đã biết (Ví dụ 3)

$$K(z) = \int_a^b z\sqrt{1 + z'^2}dx.$$

Vậy đường cực trị là một đường dây xích có đường chuẩn là $y = \lambda$, phụ thuộc ba hằng số C_1, C_2 và λ mà ta có thể xác định được nhờ các điều kiện $z(a) = \alpha - \lambda$, $z(b) = \beta - \lambda$ và (69).

7.6*. BÀI TOÁN ĐẦU MÚT ĐỘNG. Trên đây ta giả thiết hàm số chưa biết thoả mãn điều kiện (51), nghĩa là đường cong chưa biết $y = y(x)$ có hai đầu mút $A = (a, \alpha), B = (b, \beta)$ cố định. Trong nhiều bài toán khác, một trong hai đầu mút ấy hoặc cả hai không cố định mà có thể chạy trên những đường cong cho trước. Chẳng hạn xét bài toán tìm cực trị của phiếm hàm

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx, \tag{70}$$

trong đó đường cong chưa biết có đầu mút $A = (a, \alpha)$ cố định còn đầu mút kia $B = (b, y(b))$ thuộc một đường cong K nào đó cho trước.

Như vậy trong bài toán này chẳng những hàm $y(x)$ chưa được biết mà cả đầu b của khoảng lấy tích phân (70) cũng chưa được biết.

Đương nhiên, nếu đường cong $y = y(x)$ là một lời giải của bài toán đặt ra thì nó cũng phải thực hiện cực trị của phiếm hàm (70) trên tập các đường cong nối hai đầu mút của nó, cho nên theo kết quả ở các phần trước, hàm chưa biết $y(x)$ phải thỏa mãn phương trình Euler:

$$f_y - \frac{d}{dx}f_{y'} = 0 \tag{71}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này phụ thuộc hai tham số C_1, C_2. Khi cả hai đầu mút đều cố định thì hai tham số này được xác định nhờ hai điều kiện biên $y(a) = \alpha$ và $y(b) = \beta$. Bây giờ chỉ có một điều kiện biên: $y(a) = \alpha$, vậy thay cho điều kiện biên kia cần có một điều kiện biên mới mà đường cực trị phải thoả mãn. Điều kiện đó thường gọi là *điều kiện cắt ngang (hoành)*. Kết hợp với điều kiện biên $y(a) = \alpha$, nó cho phép ta xác định được C_1, C_2.

Lấy ví dụ một bài toán đơn giản: tìm đường ngắn nhất đi từ một điểm A cố định cho trước, tới một đường tròn K cho trước. Nói cách khác, tìm cực tiểu của phiếm hàm.

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

với điều kiện : $y(a) = \alpha$, và điểm $(b, y(b))$ thuộc đường tròn K.

Nghiệm tổng quát của phương trình Euler, như có thể kiểm lại dễ dàng là đường thẳng $y = C_1 x + C_2$. Để xác định các hằng số C_1, C_2, một điều kiện $y(a) = \alpha$ (đường cực trị đi qua A) không đủ, mà cần dựa vào một điều kiện nữa là: đường cực trị đó trực giao với đường tròn, nghĩa là tại điểm giao nhau B, giữa hệ số góc y' của đường cực trị và hệ số góc φ' của tiếp tuyến với đường tròn có hệ thức

$$1 + y'\varphi' = 0.$$

Trong trường hợp tổng quát ta có:

Định lý 18. *Nếu $y = \varphi(x)$ là phương trình đường cong K cho trước, thì đường cong $L : y = y(x)$ thực hiện cực trị của phiếm hàm (70) phải thỏa mãn điều kiện cắt ngang (hoành) sau đây tại giao điểm $B = (b, \varphi(b))$ của nó với L:*

$$[f + (\varphi'(x) - y'(x)) f_{y'}]^{x=b} = 0. \tag{72}$$

Chứng minh. Ta hãy xét họ đường cong phụ thuộc một tham số u:

$$y = Y(x, u) = y(x) + \frac{\varphi(u) - y(u)}{u - a}(x - a). \tag{73}$$

Ta có $Y(a, u) = y(a)$, $Y(x, b) = y(x)$ (vì $\varphi(b) = y(b)$) nên tất cả các đường (73) đều đi qua A và đường ứng với $u = b$ chính là L. Hơn nữa $Y(u, u) = \varphi(u)$, chứng tỏ rằng mỗi đường (73) cắt đường K ở điểm có hoành độ $x = u$.

Vì $y(x)$ đạt cực trị của phiếm hàm (70) nên hàm số theo u:

$$I(u) = J(Y(x, u)) = \int_a^u f(x, Y(x, u), Y_x(x, u)) dx$$

phải đạt cực trị tại $u = b$. Do đó $I'(b) = 0$.

Ta hãy tính $I'(u)$. Theo qui tắc đạo hàm của tích phân phụ thuộc tham số ta có:

$$I'(u) = \int_a^u [(f_y(x, Y, Y_x).Y_u + f_y(x, Y, Y_x).Y_{xu}]dx + f(x, Y, Y_x)|^{x=u}.$$

Thay $u = b$ ta được

$$I'(b) = \int_a^b (f_y.\overline{Y}_u + f_{y'}.\overline{Y}_{xu})dx + f|^{x=b}$$

trong đó các đối số của các hàm $f, f_y, f_{y'}$, đều lấy dọc theo L và ngang trên chỉ giá trị tại $u = b$. Nhưng vì $y(x)$ thỏa mãn phương trình Euler (71) nên:

$$f_y\overline{Y}_u + f_{y'}\overline{Y}_{xu} = \frac{d}{dx}(f_{y'}.\overline{Y}_u)$$

do đó

$$I'(b) = (f_{y'}\overline{Y}_u)\Big|_{x=a}^{x=b} + f\Big|^{x=b}. \tag{74}$$

Mặt khác từ (73) ta suy ra:

$$Y_u = \frac{x-a}{(u-a)^2}[(\varphi'(u) - y'(u))(u-a) - (\varphi(u) - y(u))]$$

và chú ý rằng $\varphi(b) = y(b)$ ta có

$$\overline{Y}_u = \frac{x-a}{b-a}[\varphi'(b) - y'(b)].$$

Thay vào (74) ta được hệ thức đòi hỏi:

$$(\varphi'(b) - y'(b)).f_{y'}\Big|^{x=b} + f\Big|^{x=b} = 0. \qquad \square$$

Vậy lời giải của bài toán đặt ra không những phải nghiệm đúng phương trình Euler mà còn phải thỏa mãn điều kiện cắt ngang (72).

Ví dụ: Tìm cực trị của phiếm hàm

$$J(y) = \int_a^b p(x, y)\sqrt{1 + y'^2}dx$$

trên tập hợp các đường cong $y = y(x)$ đi từ điểm cố định $A(a, \alpha)$ đến điểm $B = (b, \varphi(b))$ ở trên đường cong $y = \varphi(x)$.

Điều kiện cắt ngang là

$$f + (\varphi' - y')f_{y'} = \frac{f.(1 + y'\varphi')}{1 + y'^2} = 0$$

vì

$$f_{y'} = p(x, y)\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{f_{y'}}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Do đó

$$1 + y'\varphi'\Big|^{x=b} = 0.$$

Vậy điều kiện cắt ngang trong trường hợp này là điều kiện trực giao.

Nếu không chỉ đầu mút B chạy trên đường cong $y = \varphi(x)$ mà cả đầu mút A cũng chạy trên đường cong $y = \psi(x)$ thì tại B có điều kiện (72) và tại A có điều kiện tương tự

$$[f + (\psi'(x) - y'(x))f_{y'}]^{x=a} = 0. \tag{75}$$

BÀI TẬP

Khái niệm không gian định chuẩn

1. Một tập M trong không gian tuyến tính gọi là lồi nếu:

$$x'x'' \in M,\ 0 \le \alpha \le 1 \Rightarrow \alpha x' + (1 - \alpha)x'' \in M.$$

Chứng minh rằng trong một không gian định chuẩn hình cầu $S = \|x : \|x\| \le 1\}$ bao giờ cũng lồi. Ngược lại nếu trong một không gian tuyến tính X, người ta cho ứng với mỗi x một số $\|x\|$ sao cho: 1) $\|x\| > 0$ nếu $x \ne 0$; $\|x\| = 0$ nếu $x = 0$, 2) $\|\alpha x\| = \|\alpha\|.\|x\|$, 3) hình cầu $= \{x : \|x\| \le 1\}$ lồi, thì $\|x\|$ là một chuẩn. (Nói cách khác trong các tiên đề về chuẩn, có thể thay bất đẳng thức tam giác bằng điều kiện: hình cầu đơn vị là lồi).

Chỉ dẫn : Nếu S lồi thì với mọi $x, y \in X$ và $0 \le \alpha \le 1$ ta có $\left\|\alpha\frac{x}{\|x\|} + (1 - \alpha)\frac{y}{\|y\|}\right\| \le 1$. Chọn α thích hợp để suy ra $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

2. *Chuẩn tương đương.* Hai chuẩn $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ trong cùng một không gian tuyến tính được gọi là *tương đương* nếu sự hội tụ $x_n \to x$ theo chuẩn này bao

giờ cũng kéo theo sự hội tụ $x_n \to x$ theo chuẩn kia, và ngược lại (nói cách khác, nếu họ các tập mở theo chuẩn này trùng với họ các tập mở theo chuẩn kia). Chứng minh rằng hai chuẩn $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ là tương đương khi và chỉ khi có hai số dương α, β cho với mọi $x \in X$:

$$\alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2,\ \beta\|x\|_2 \le \|x\|_1$$

Chỉ dẫn: "Chỉ khi": hình cầu $S_1 = \{x : \|x\|_1 \le 1\}$ là lân cận của gốc theo chuẩn 1 thì cũng là lân cận theo chuẩn 2 nên phải chứa một hình cầu $S_2 = \{x : \|x\|_2 \le \alpha\}$ với $\alpha > 0$ nào đó. Với mọi $x \in X$ ta có $\dfrac{\alpha x}{\|x\|_2} \in S$ nên $\alpha x\|x\|_2 \in S_1$ tức là $\alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2$.

3. Trong không gian tuyến tính hữu hạn chiều $\mathbb{R}^k$ mọi chuẩn đều tương đương (xem bài tập trước).

Chỉ dẫn: Chứng minh rằng mọi chuẩn tương đương với chuẩn Euclide thông thường.

4. Cho M là một không gian con đóng của một không gian định chuẩn X, sao cho $M \ne X$. Tồn tại $y \in X$ nghiệm đúng $\|y\| = 1$ và $\|y - x\| \ge 1/2$ với mọi $x \in M$.

Chỉ dẫn: Lấy $y_0 \in X \setminus M$. Chứng minh $d = \inf\limits_{x \in M} \|y_0 - x\| > 0$ sau đó lấy $y_1 \in M$ sao cho $\|y_0 - y_1\| < 2d$. Điểm $y = (y_0 - y_1)/\|y_0 - y_1\|$ đáp ứng yêu cầu.

5. Trong mọi không gian định chuẩn vô số chiều X đều có một dãy điểm trong hình cầu đơn vị, sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của dãy là $\ge 1/2$. (Do đó trong mọi không gian định chuẩn vô số chiều, hình cầu đơn vị không compac).

Chỉ dẫn: Lấy x_1 có $\|x_1\| = 1$. Khi đã có $x_1, \ldots, x_n$ thì lấy x_{n+1} sao cho $\|x_{n+1}\| = 1,\ \|x_{n+1} - x_i\| \ge \dfrac{1}{2}$ với mọi $i = 1, \ldots, n$ (áp dụng bài tập trước, với M là không gian sinh bởi $x_1, \ldots, x_n$).

Không gian $\mathbb{L}^p$

6. Cho $f \in \mathbb{L}^p(E, \mu),\ g \in \mathbb{L}^q(E, \mu),\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Bất đẳng thức Hölder (công thức (6), mục 2.1) chỉ trở thành đẳng thức khi có hai số c_1, c_2 không cùng $= 0$, sao cho $c_1|f(x)|^p = c_2|g(x)|^q$ hầu khắp nơi.

7. Một không gian định chuẩn được gọi là *định chuẩn chặt* nếu bất đẳng thức $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ $(x \ne 0,\ y \ne 0)$ chỉ trở thành đẳng thức khi

$y = \alpha x$, $\alpha > 0$. Chứng minh rằng với $1 < p < \infty$, $\mathbb{L}^p$ là không gian định chuẩn chặt.

Chỉ dẫn: Xem bài tập trước.

8. Ký hiệu $\operatorname{supess}_{x\in A} g(x)$ (hoặc $\operatorname{vraimax}_{x\in A} g(x)$) biểu thị "cận trên cốt yếu" của g trên tập A tức là cận dưới đúng của các số a sao cho tập $\{x \in A : g(x) > a\}$ có độ đo 0. Với mỗi hàm f đo được trên E ta đặt

$$\|f\|_\infty = \begin{cases} \operatorname{supess}_{x\in E} |f(x)|, & \text{nếu } \mu(E) > 0, \\ 0 & \text{nếu } \mu(E) = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng không gian tuyến tính các hàm f đo được và bị chặn hầu khắp nơi trên E, với chuẩn $\|f\|_\infty$ như trên, là một không gian Banach.

9. Nếu $\frac{1}{p} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''}$, $f \in \mathbb{L}^{p'}$, $g \in \mathbb{L}^{p''}$ thì $fg \in \mathbb{L}^p$.

Toán tử và phiếm hàm tuyến tính

10. Cho hai toán tử tuyến tính liên tục $A, B : X \to Y$. Cho M là một tập con của X sao cho không gian tuyến tính sinh bởi M trù mật trong X. Chứng minh rằng nếu $Ax = Bx$ với mọi $x \in M$ thì $A \equiv B$.

11. Một toán tử tuyến tính $A : X \to Y$ từ một không gian định chuẩn hữu hạn chiều X vào một không gian định chuẩn Y bao giờ cũng liên tục.

12. Một toán tử tuyến tính liên tục $A : X \to Y$ (X, Y là không gian định chuẩn) được gọi là *hữu hạn chiều* nếu $\operatorname{Im} A = A(X)$ là một không gian con hữu hạn chiều của Y. Nếu $f_1, ..., f_k$ là những phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X, và $u_1, \ldots, u_k \in Y$ thì toán tử

$$A(x) = f_1(x)u_1 + \cdots + f_k(x).u_k$$

là tuyến tính liên tục hữu hạn chiều. Ngược lại, bất cứ toán tử tuyến tính liên tục hữu hạn chiều nào cũng có thể biểu diễn dưới dạng trên.

13. Cho $f_1, \ldots, f_k$ và f là những phiếm hàm tuyến tính trên X. Ba điều kiện sau tương đương:

a) $\quad \cap_{i=1}^k \operatorname{Ker} f_i \subset \operatorname{Ker} f$

b) f là một tổ hợp tuyến tính của các $f_1, \ldots, f_k$, nghĩa là $f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_k f_k$, với α_i là những số nào đó.

c) Tồn tại hằng số $c < \infty$ sao cho $(\forall x)\ |f(x)| \le c.\max_i |f_i(x)|$.

14. Cho một phiếm hàm tuyến tính $f(x)$ bị chặn trong một hình cầu $\|x - a\| \leq r$. Chứng minh f liên tục (trong toàn không gian X).

15. Cho $f \in \mathbb{L}^1_{(-\infty,\infty)}$, g bị chặn trên toàn đường thẳng. Chứng minh rằng $f * g(x)$ là hàm liên tục.

Chỉ dẫn: $|f * g(x+\xi) - f * g(x)| \leq \gamma \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\xi) - f(x)|dx$ trong đó $\gamma = \sup\ |g(x)| < \infty$.

16. Nếu hai tập A, B trên đường thẳng có độ đo dương thì tập $C = A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ chứa một khoảng mở.

Chỉ dẫn: Giả thiết A, B bị chặn. Tích chập $f = \mathcal{X}_A \times \mathcal{X}_B$ là hàm liên tục (xem bài tập 15) và có $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx > 0$, nên $f(x) \neq 0$ trên một khoảng mở. Mà $f(x) \neq 0$ kéo theo $x \in C$.

Anh xạ khả vi

17. Trong các phiếm hàm sau đây cái nào khả vi:

a) $f(y) = y(a)$ trong $\mathbb{C}_{[a,b]}$;

b) $f(y) = y^2(a)$ trong $\mathbb{C}_{[a,b]}$;

c) $f(y) = \sqrt{1 + y'^2(a)}$ trong $D^1_{[a,b]}$;

d) $f(y) = |y(a)|$ trong $\mathbb{C}_{[a,b]}$.

18. Nếu $f : X \to \mathbb{R}$ khả vi thì $f^2(x)$ cũng khả vi. Tính đạo hàm của $f^2(x)$.

19. Chứng minh rằng một phiếm hàm toàn phương liên tục là khả vi và tính biến phân cấp 1 và cấp 2 của nó.

20. Cho U, V là những tập mở trong hai không gian định chuẩn X, Y (tương ứng), $f : U \to V$ là một song ánh, khả vi tại mọi điểm cùng với ánh xạ ngược f^{-1}. Khi ấy đạo hàm $f'(a)$ là song ánh từ X lên Y và có nghịch đảo bằng đạo hàm của f^{-1} tại $b = f(a)$:

$$(f'(a))^{-1} = (f^{-1})'(b).$$

21. Cho $u : X \mapsto Y$, $v : X \to Z$ là hai ánh xạ khả vi và $B : Y \times Z \to W$ là một ánh xạ song tuyến tính liên tục. Chứng minh rằng ánh xạ $x \mapsto B(u(x), v(x))$ khả vi và tính vi phân của nó.

Chỉ dẫn: $(B(u(.), v(.))'\ (a) : h \mapsto B(u'(a).h,\ v(a)) + B(u(a),\ v'(a).h)$.

Cực trị các phiếm hàm khả vi. Bài toán biến phân cơ bản

22. Xét bài toán: tìm cực tiểu của $f(x)$ với các điều kiện

$$g_i(x) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

trong đó $f, g : X \to \mathbb{R}'$ là những phiếm hàm khả vi.

Chứng minh rằng nếu x_0 là một điểm cực trị, và các đạo hàm $g_i'(x_0)$: $X \to \mathbb{R}$ độc lập tuyến tính thì có những hằng số $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sao cho x_0 là điểm dừng của phiếm hàm

$$f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

Chỉ dẫn: Mọi h nghiệm đúng $g_i'(x_0).h = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ đều phải nghiệm đúng $f'(x_0).h = 0$. Áp dụng bài tập 13.

23. Tìm đường cực trị và khảo sát các điều kiện giải được cho các bài toán biến phân với các phiếm hàm sau đây:

a) $\int_{-1}^{1} \sqrt{y(1 + y'^2)}dx,\ y(-1) = y(1) = b > 0;$

b) $\int_{a}^{b} \frac{1 + y^2}{y'^2}dx,\ y(a) = A,\ y(b) = B.$

Chỉ dẫn: a) Một nghiệm nếu $b = 1$, hai nghiệm nếu $b > 1$ và 0 nghiệm nếu $b < 1$, b) luôn luôn một nghiệm : $y = \mathrm{sh}(c_1 x + c_2)$.

24. Tìm đường cực trị của phiếm hàm

$$J(y) = \int_0^1 e^{y'} \operatorname{tg} y' dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

Chỉ dẫn: $y = x$

25. Tìm các đường cực trị của phiếm hàm

$$J(y) = \int \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Chỉ dẫn: Dùng tọa độ cực. Lời giải: $r^2 \cos(2\varphi - \beta) = \alpha$ hay $x^2 \cos\beta + 2xy \sin\beta - y^2 \cos\beta = \alpha$.

26. Tìm cực trị của

$$J(y) = \int_{-1}^{1} x^{\frac{2}{3}} y'^2 dx,\ y(-1),\ y(1) = 1$$

Chỉ dẫn: $y = x^{\frac{1}{2}}$

27. Tìm cực tiểu của

$$J(y) = \sqrt{y+h}\sqrt{1+y'^2}dx \ (h > 0),$$

với các điều kiện $y(0) = 0,\ y(l) = l_1 > -h.$

Chỉ dẫn: Phương trình Euler $\dfrac{\sqrt{y+h}}{\sqrt{1+y'^2}} = C$; $y = \alpha x + \dfrac{1+\alpha^2}{4h}x^2.$

Đường bao của họ parabôn này có dạng $y = -h + \dfrac{x^2}{4h}$ ("parabôn an toàn").

28. Tìm đường cong khép kín có độ dài L cho trước và giới hạn diện tích lớn nhất.

Chỉ dẫn: Dùng tọa độ cực. Phương trình Euler cho phiếm hàm $J - \lambda G$ cho thấy độ cong đường phải tìm không đổi.

29. Tìm cố thể tròn xoay có thể tích lớn nhất, mà thiết diện theo trục có diện tích đã cho.

30. Tìm cố thể tròn xoay có thể tích lớn nhất, mà diện tích xung quanh đã cho.

Chương 6

MẤY ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA GIẢI TÍCH HÀM

1. ĐỊNH LÝ HAHN-BANACH

Cho một phiếm hàm tuyến tính f xác định trên một không gian con M của một không gian tuyến tính X. Nếu có một phiếm hàm tuyến tính F xác định trên toàn X và trùng với f trên M thì ta nói F là "khuếch" của f trên X. Trong nhiều vấn đề người ta sẵn có phiếm hàm f trên M và muốn khuếch nó lên toàn X sao cho vẫn giữ được một số tính chất nào đó vốn có của f. Chẳng hạn, nếu X là không gian định chuẩn và f vốn liên tục trên M thì thường ta muốn cho F cũng liên tục trên X, và hơn nữa có chuẩn vẫn bằng chuẩn của f trong M.

Tuy có vẻ đặc biệt, thật ra vấn đề nói trên gặp trong rất nhiều lĩnh vực toán học, dưới hình thức này hay hình thức khác. Cho nên, định lý Hahn-Banach dưới đây, nhằm giải quyết vấn đề đó, là một trong những mệnh đề trung tâm của giải tích hiện đại. Chứng minh của nó dựa trên một tiên đề gọi là *tiên đề Zorn*.

1.1. TIÊN ĐỀ ZORN. Cho một tập S, trong đó giữa một số cặp phần tử a, b của nó có xác định một liên hệ $\prec$ sao cho:

1) $a \prec a$ (phản xạ).
2) $a \prec b,\ b \prec c \Rightarrow a \prec c$ (bắc cầu).
3) $a \prec b,\ b \prec a \Rightarrow a = b$ (phản xứng).

Khi ấy ta nói liên hệ $\prec$ là một *thứ tự* (hay *thứ tự bộ phận*) trên tập S, và tập S *được sắp một phần* theo thứ tự đó. Ta cũng viết $b \succ a$ thay cho $a \prec b$.

Chẳng hạn, nếu S là một họ những tập nào đó thì liên hệ $\subset$ (bao hàm) là một thứ tự trên S; nếu S là một tập số phức thì liên hệ xác định bởi: "$a \prec b$ khi và chỉ khi $\mathrm{Re}a \leq \mathrm{Re}b$ ", cũng là một thứ tự trên S.

Trong một tập S được sắp một phần theo một thứ tự $\prec$, một tập con $P \subset S$ gọi là được *sắp tuyến tính* nếu với mọi $a, b \in P$ ta đều có $a \prec b$ hoặc $b \prec a$. Một phần tử $m \in S$ gọi là *cận trên* của P nếu $a \prec m$ với mọi $a \in P$; m gọi là một phần tử *tối đại* của S nếu: $a \in S,\ m \prec a \Rightarrow a = m$ (nói khác đi, nếu không tồn tại $a \in S,\ a \neq m$ mà $m \prec a$).

Tiên đề Zorn phát biểu như sau:

Nếu S là một tập được sắp một phần và mọi tập con được sắp tuyến tính của S đều có cận trên, thì S phải có một phần tử tối đại.

Đó là một trong những tiên đề cơ bản của toán học hiện đại, tương đương với một mệnh đề thường gọi là *tiên đề chọn* của Zermelo.

Tiên đề Zorn được sử dụng rộng rãi trong giải tích hiện đại. Tuy có một số nhà toán học không muốn chấp nhận nó, nhưng, như Gödel đã chứng minh, nếu toán học không mâu thuẫn khi không có tiên đề này thì nó vẫn còn không mâu thuẫn khi thêm tiên đề này. Thành thử những định lý dựa trên tiên đề này không thể bị phản bác được, trừ khi toán học vốn đã chứa mâu thuẫn không liên quan đến nó.

1.2. ĐỊNH LÝ HAHN-BANACH. Vấn đề khuếch phiếm hàm tuyến tính liên quan chặt chẽ đến khái niệm tập lồi và hàm lồi.

Một tập C trong một không gian tuyến tính Z được gọi là *lồi* nếu:

$$a, b \in C,\ 0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha a + (1 - \alpha)b \in C.$$

Tập hợp các điểm có dạng $\alpha a + (1 - \alpha)b$, với $0 \leq \alpha \leq 1$, cũng gọi là *đoạn thẳng* nối a với b, cho nên cũng có thể nói: một tập là lồi nếu nó chứa mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của nó.

Trước đây (Chương 5, tiết 6) ta đã định nghĩa một hàm lồi trên một đa tạp tuyến tính. Một cách tổng quát hơn, một hàm f, xác định trên một tập lồi C và có thể lấy giá trị $+\infty$, được gọi là *hàm lồi* nếu:

$$a, b \in C,\ 0 \le \alpha \le 1 \Rightarrow f(\alpha a + (1-\alpha)b) \le \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b).$$

Để giúp cho việc chứng minh định lý Hahn-Banach được dễ dàng ta chú ý sự kiện đơn giản sau đây .

Cho một khoảng đóng $\Delta \subset R$, có thể bị chặn hay không, và đặt

$$p = \inf\{t:\ t \in \Delta\}, \quad q = \sup\{t:\ t \in \Delta\}$$

(như vậy $-\infty \le p < +\infty, -\infty < q \le +\infty$).

Cho một không gian con M của không gian tuyến tính X và một điểm $x_0 \in X \setminus M$. Ta xét tập lồi $C = \{x + yx_0 :\ x \in M, y \in \mathbb{R}\}$ (cũng là không gian con của X), và giả thiết cả hai tập sau đều không rỗng :

$$C^+ = \{x + yx_0 \in C :\ y > 0\},\ C^- = \{x + yx_0 \in C :\ y < 0\}.$$

Bổ đề 1. *Với giả thiết như trên, nếu một hàm lồi h trên C thỏa mãn:*

$$(\forall z = (x + yx_0) \in C) \qquad \sup_{t \in \Delta} ty + h(z) \ge 0, \tag{1}$$

thì phải có một số thực t sao cho $p \le t \le q$ và

$$(\forall z = x + yx_0 \in C) \qquad ty + h(z) \ge 0. \tag{2}$$

Chứng minh. Với mỗi $z = x + yx_0 \in C^+ \cup C^-$ ta đặt

$$u(z) = -\frac{1}{y}h(z).$$

Do (1) ta có

$$(\forall z \in C^+)\ \ u(z) \le q, \qquad (\forall z \in C^-)\ \ u(z) \ge p,$$

cho nên

$$\sup_{z \in C^+} u(z) = \alpha \le q; \qquad \inf_{z \in C^-} u(z) = \beta \ge p. \tag{3}$$

Mặt khác, với mọi $z = x + yx_0 \in C^+$, $z' = (x' + y'x_0) \in C^-$ và $\lambda = -\frac{yy'}{y-y'}$ ta có $\frac{\lambda}{y} > 0, -\frac{\lambda'}{y'} > 0, \frac{\lambda}{y} - \frac{\lambda'}{y'} = 1$, mà C là tập lồi và h là hàm lồi, cho nên $z_0 = \frac{\lambda}{y}z - \frac{\lambda}{y'}z' \in C$ và

$$h(z_0) \leq \frac{\lambda}{y}h(z) - \frac{\lambda}{y'}h(z').$$

Nhưng $z_0 = (x_0 + y_0x_0)$ với $y_0 = 0$. Vậy theo (1) $h(z_0) \geq 0$, và kết hợp với bất đẳng thức vừa có ta suy ra, với mọi $z \in C^+$, $z' \in C^-$:

$$u(z) = -\frac{1}{y}h(z) \leq -\frac{1}{y'}h(z') = u(z').$$

Điều này cho thấy $\alpha < +\infty$, $\beta > -\infty$ và

$$\alpha \leq \beta. \tag{4}$$

Kết hợp (3) và (4) ta được

$$\max\{\alpha, p\} \leq \min\{\beta, q\},$$

đồng thời cả hai vế bên trái và bên phải không thể cùng bằng $-\infty$ hoặc cùng bằng $+\infty$. Vậy phải có một số thực t sao cho

$$p \leq t \leq q \qquad \alpha \leq t \leq \beta$$

Vì $\alpha \leq t \leq \beta$ nên với mọi $z = x + yx_0 \in C^+ \cup C^-$ ta có

$$ty + h(z) \geq u(z).y + h(z) = 0.$$

và điều này hiển nhiên đúng cả khi $z = x + yx_0 \in C$ với $y = 0$. □

Một hàm thực $\varphi(x)$ trên một không gian tuyến tính X được gọi là *dưới tuyến tính*, nếu

1) $\varphi(x_1 + x_2) \leq \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ với mọi $x_1, x_2 \in X$;

2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ với mọi $x \in X$, và mọi số $\alpha \geq 0$.

(tính chất 1 thường gọi là "dưới cộng tính", còn tính chất 2 gọi là "tính thuần nhất dương").

Hiển nhiên mỗi hàm dưới tuyến tính cũng là hàm lồi.

Định lý 1. (Hahn-Banach) *Cho một phiếm hàm tuyến tính f xác định trong một không gian con M của một không gian tuyến tính thực X. Nếu có một hàm dưới tuyến tính φ xác định trong X, sao cho*

$$(\forall x \in M) \quad f(x) \leq \varphi(x)$$

thì phải có một phiếm hàm tuyến tính $F(x)$ xác định trong toàn thể X, sao cho:

1) F là khuếch của f, nghĩa là

$$(\forall x \in M) \qquad F(x) = f(x)$$

2) $(\forall x \in X) \qquad F(x) \leq \varphi(x)$.

Chứng minh. Cho g_1, g_2 là hai phiếm hàm tuyến tính xác định trên hai không gian con N_1, N_2 của X. Ta sẽ ký hiệu $g_1 \prec g_2$ nếu: $N_1 \subset N_2$, $g_2(x) = g_1(x)$ với mọi $x \in N_1$, và $g_2(x) \leq \varphi(x)$ với mọi $x \in N_2$. Vấn đề của ta là chứng minh sự tồn tại một phiếm hàm tuyến tính F xác định trên toàn X và sao cho $f \prec F$.

Gọi S là tập tất cả các phiếm hàm tuyến tính g sao cho $f \prec g$. Tập đó không rỗng (vì $f \in S$) và được sắp một phần bởi liên hệ $\prec$. Nếu P là một tập con được sắp tuyến tính của S thì cận trên của nó là phiếm hàm có miền xác định bằng hợp của tất cả các miền xác định của các phiếm hàm $g \in P$ và có giá trị trùng với giá trị của từng phiếm hàm g ấy trên miền xác định của g. Vậy theo tiên đề Zorn, S phải có một phần tử tối đại F. Ta hãy chứng minh rằng miền xác định của F là toàn không gian X: khi ấy F sẽ đạt yêu cầu của ta.

Giả sử, trái lại, rằng có một phần tử $x_0 \in X$ không thuộc miền xác định L của F. Ta xét tập lồi $C = \{x + yx_0 : \ x \in L, \ y \in \mathbb{R}\}$, và đặt $p = -\infty, \ q = +\infty$. Với mọi $z = x + yx_0 \in C$ ta có $\varphi(x) \geq F(x)$, nên

$$(\forall z = x + yx_0 \in C) \qquad \sup_{p \leq t \leq q} ty - F(x) + \varphi(z) \geq 0.$$

(nếu $y = 0$ thì $\varphi(x) \geq F(x)$, còn nếu $y \neq 0$ thì bất đẳng thức trên cũng đúng do $p = -\infty, q = +\infty$). Mà $h(z) = -F(x) + \varphi(z)$ hiển nhiên là hàm lồi, vậy theo Bổ đề 1, phải có một số thực t nghiệm đúng

$$(\forall z = x + yx_0 \in C) \qquad ty - F(x) + \varphi(z) \geq 0.$$

Đặt $F_1(z) = F(x) - ty$ với mọi $z = x + yx_0$ $(y \in \mathbb{R})$ ta sẽ có một phiếm hàm tuyến tính F_1 xác định trên không gian L_1 sinh bởi hợp của L và x_0, và nghiệm đúng $(\forall z \in L_1) \quad F_1(z) \leq \varphi(z)$. Như thế $F_1 \neq F$ và $F \prec F_1$ trái với tính tối đại của F. Vậy phiếm hàm F được xác định trên toàn X. □

Ta nói một phiếm hàm dưới tuyến tính $\varphi(x)$ (trong không gian thực hay phức) là một *sơ chuẩn* nếu $\varphi(\alpha x) = |\alpha|\varphi(x)$ với mọi x và mọi số α (thực hay phức tuỳ theo ta xét không gian thực hay không gian phức).

Trong không gian tuyến tính phức, định lý Hahn-Banach có biến thể như sau.

Định lý 2. *Cho $\varphi(x)$ là một sơ chuẩn trong không gian tuyến tính phức X, $f(x)$ một phiếm hàm tuyến tính xác định trong một không gian con $M \subset X$, và thỏa mãn điều kiện*

$$(\forall x \in M) \qquad |f(x)| \leq \varphi(x).$$

Khi ấy có một phiếm hàm tuyến tính $F(x)$ xác định trong toàn bộ X sao cho

1) F là khuếch của f, nghĩa là

$$(\forall x \in M) \quad F(x) = f(x).$$

2) $(\forall x \in X) \quad |F(x)| \leq \varphi(x).$

Chứng minh. Để ý rằng nếu trong tập các phần tử của một không gian tuyến tính phức ta đưa vào phép nhân vectơ với số thực thì ta được một không gian tuyến tính thực. Cho $X_{\mathbb{R}}$ và $M_{\mathbb{R}}$ là các không gian tuyến tính thực mà ta thu được từ X, M theo cách đó. Nếu $u(x), v(x)$ là các phần thực và ảo của $f(x)$, thì $f(ix) = if(x) = iu(x) - v(x)$, nên $v(x) = -u(ix)$ có nghĩa là $f(x) = u(x) - iu(ix)$. Dĩ nhiên $u(x)$ là phiếm hàm tuyến tính thực trên $M_{\mathbb{R}}$ và $|u(x)| \leq |f(x)| \leq \varphi(x)$ $\forall x \in M_{\mathbb{R}}$. Vậy theo định lý trước, $u(x)$ có thể khuếch thành một phiếm hàm tuyến tính thực $U(x)$ trên toàn $X_{\mathbb{R}}$, sao cho $U(x) \leq \varphi(x)$ $(x \in X_{\mathbb{R}})$. Đặt

$$F(x) = U(x) - iU(ix),$$

ta được một phiếm hàm tuyến tính phức trên X, thỏa mãn các điều kiện đòi hỏi. Thật vậy, với $x \in M$ ta có

$$F(x) = u(x) - iu(ix) = f(x).$$

Vả lại, đặt $F(x) = re^{-i\theta}$ ta có $|F(x)| = e^{i\theta}F(x) = F(e^{i\theta}x)$ và biểu thức $F(e^{i\theta}x)$ thực và ≥ 0, cho nên $|F(x)| = U(e^{i\theta}x) \leq \varphi(e^{i\theta}x) = |e^{i\theta}|\varphi(x) = \varphi(x)$. □

Hệ quả 1. *Một phiếm hàm tuyến tính liên tục f xác định trên một không gian con M của không gian định chuẩn X bao giờ cũng có thể khuếch thành một phiếm hàm tuyến tính liên tục F trên toàn thể X, mà có $\|F\| = \|f\|$.*

Thật vậy, với mọi $x \in M$ ta có $|f(x) \leq \|f\|.\|x\|$, nhưng rõ ràng hàm $\varphi(x) = \|f\|.\|x\|$ là một sơ chuẩn, cho nên f có thể khuếch thành F sao cho $(\forall x \in X)\ |F(x)| \leq \|f\|.\|x\|$. Do đó $\|F\| \leq \|f\|$. Mặt khác, vì $F(x) = f(x)$ với mọi $x \in M$ nên $\|F\| \geq \|f\|$. Vậy $\|F\| = \|f\|$. □

Hệ quả 2. *Với mỗi phần tử $x_0 \neq 0$ của một không gian định chuẩn X đều có một phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên X sao cho $f(x_0) = \|x_0\|$ và $\|f\| = 1$.*

Thật vậy $f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục xác định trên không gian con tạo nên bởi tất cả các vectơ có dạng λx_0, và $\|f\| = 1$. Do đo áp dụng Hệ quả 1, ta suy ra Hệ quả 2. □

1.3. CÁC TÍNH CHẤT SƠ CẤP CỦA TẬP LỒI. Khái niệm tập lồi trong không gian tuyến tính là sự khái quát trực tiếp khái niệm hình lồi trong hình học sơ cấp. Nó giữ vai trò quan trọng trong nhiều vấn đề giải tích hàm. Đặc biệt, lý thuyết các hàm và tập lồi (gọi là giải tích lồi) có nhiều ứng dụng trong lý thuyết các bài toán cực trị, quy hoạch toán học, lý thuyết trò chơi, lý thuyết điều khiển tối ưu, cũng như trong nhiều vấn đề kinh tế, kỹ thuật hiện đại.

Rất nhiều tập trong không gian tuyến tính là tập lồi.

Ví dụ: 1) Trong không gian ba chiều, hình tứ diện, hình lập phương, hình cầu, đều là tập lồi.

2) Trong không gian định chuẩn mỗi hình cầu tâm a bán kính r là tập lồi, vì nếu $\|x - a\| \leq r$, $\|y - a\| \leq r$ và $0 \leq \alpha \leq 1$ thì $\|\alpha x + (1-\alpha)y - a\| = \|a(x-a) + (1-\alpha)(y-a)\| \leq \alpha\|x-a\| + (1-\alpha)\|y-a\| \leq \alpha r + (1-\alpha)r = r$.

3) Mỗi không gian con của một không gian tuyến tính là tập lồi. Tổng quát hơn, mỗi đa tạp tuyến tính V (tức là mỗi tập V sao cho bất

cứ đường thẳng nào đi qua hai điểm của V cũng nằm trọn trong V) là tập lồi.

Chú ý rằng nếu V là đa tạp tuyến tính thì với mọi $a \in V$ tập $V - a$ là một không gian con (dễ chứng minh). Do đó *mỗi đa tạp tuyến tính V đều có dạng $V = M + a$*, trong đó $a \in V$ và M là một không gian con (gọi là *không gian con song song* với đa tạp V).

4) Nếu $f(x)$ là một phiếm hàm tuyến tính trên không gian tuyến tính X và $f \not\equiv 0$ thì đa tạp tuyến tính $\{x : f(x) = c\}$ (trong đó c là một hằng số tuỳ ý) gọi là một *siêu phẳng* trong X. Một siêu phẳng $f(x) = c$ trong một không gian tuyến tính thực X chia không gian ra làm hai tập lồi, xác định tương ứng bởi các bất đẳng thức $f(x) \leq c$ và $f(x) \geq c$; mỗi tập đó gọi là một *nửa không gian*. Khi một tập A nằm hẳn trong một trong hai nửa không gian ấy, người ta cũng nói nó nằm về một phía của siêu phẳng $f(x) = c$.

Sau đây là một số tính chất sơ cấp của các tập lồi.

I. *Giao của một số bất kỳ tập lồi là lồi.*

Thật vậy, nếu các tập D_λ lồi và $D = \cap_\lambda D_\lambda$ thì mọi đoạn thẳng nối hai điểm $x, y \in D$ phải nằm trong mỗi tập D_λ do đó nằm trong D.

Cho trước một tập A bất kỳ trong không gian X, bao giờ cũng có ít nhất một tập lồi bao hàm A, đó là X. Giao của tất cả các tập lồi bao hàm A đương nhiên là tập lồi nhỏ nhất bao hàm A: ta gọi nó là *bao lồi* của A và ký hiệu conv$A$ (tiếng Anh convex hull nghĩa là lồi).

Một *tổ hợp lồi* của k phần tử bất kỳ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ của X là một phần tử x có dạng

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$$

trong đó $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ là những số thực không âm nghiệm đúng $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

II. *Bao lồi của một tập A bằng tập tất cả các tổ hợp lồi của các phần tử của A.*

Thật vậy dĩ nhiên một tổ hợp lồi của 1 hoặc 2 phần tử của A bao giờ cũng thuộc conv$A$. Giả sử ta đã chứng minh được rằng mọi tổ hợp lồi của $k \geq 2$ phần tử của A đều thuộc conv$A$, và cho x là một

tổ hợp lồi của $k+1$ phần tử của A : $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} x_{k+1}$, với $x_i \in A$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k+1} = 1$. Ta có thể viết $x = (1-\alpha_{k+1})y + \alpha_{k+1}x_{k+1}$, với $y = (\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}})x_1 + \ldots + (\frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}})x_k$. Nhưng rõ ràng y là một tổ hợp lồi của các $x_1, \ldots, x_k$, nên theo giả thiết qui nạp $y \in \text{conv}A$. Mà x là tổ hợp lồi của y và x_{k+1}, vậy $x \in \text{conv}A$. Như thế, nếu gọi D là tập tất cả các tổ hợp lồi của những phần tử của A thì $D \subset \text{conv}A$. Mặt khác, chính D cũng là tập lồi, vì rằng nếu $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k \in D$, $y = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m \in D$ và $0 \leq \lambda \leq 1$ thì $\lambda x + (1-\lambda)y = \sum_{i=1}^{k}(\lambda\alpha_i)x_i + \sum_{j=1}^{m}(1-\lambda)\beta_j y_j$, với $\lambda\alpha_i \geq 0$, $(1-\lambda)\beta_j \geq 0$ và $\sum_i(\lambda\alpha_i) + \sum_j(1-\lambda)\beta_j = 1$, cho nên $\lambda x + (1-\lambda)y \in D$. Mà D bao hàm A, cho nên, theo định nghĩa bao lồi $D \supset \text{conv}A$. Vậy $D = \text{conv}A$.

III. *Nếu D, E là tập lồi, a là một điểm, λ là một số thực thì các tập sau đây cũng lồi:*

$$D + a = \{x + a : x \in D\},\ D - a = \{x - a : x \in D\},$$
$$\lambda D = \{\lambda x : x \in D\}, D + E = \{x + y : x \in D,\ y \in E\},$$
$$D - E = \{x - y : x \in D,\ y \in E\}$$

(chứng minh dễ dàng).

Một điểm a của một tập D trong không gian X gọi là *điểm bọc* nếu với mỗi vectơ $t \in X$ đều có một số $\varepsilon > 0$ sao cho toàn đoạn thẳng nối $a - \varepsilon t$ với $a + \varepsilon t$ chứa trong D. Khi X là không gian định chuẩn, rõ ràng mọi điểm trong của một tập đều là điểm bọc của nó, nhưng ngược lại không đúng. Tuy nhiên:

IV. *Nếu một tập lồi D có điểm trong thì mọi điểm bọc của D cũng là điểm trong.*

Điều này là hệ quả của tính chất sau:

Nếu một tập lồi D có một điểm trong a và nếu $b \in D$ thì mọi điểm $c = \alpha a + (1-\alpha)b$ với $0 < \alpha \leq 1$ cũng là điểm trong của D (chú ý: $0 < \alpha$).

Thật vậy, cho S là một ε-lân cận của a nằm trong D. Khi ấy $S' = \alpha S + (1-\alpha)b$ sẽ là $(\alpha\varepsilon)$-lân cận của c nằm trong D, vì rằng $S' - c = \alpha(S-a)$ (chứng tỏ S' là hình cầu tâm c, bán kính $\alpha\varepsilon$) và $\alpha S + (1-\alpha)b \subset D$ do D lồi.

Mỗi tập lồi $D \subset X$ có một *đa tạp tuyến tính nhỏ nhất chứa nó*, ký hiệu aff$D$, đó là giao của tất cả các đa tạp tuyến tính chứa D.

Nếu X là không gian định chuẩn thì mỗi tập trong X là một không gian metric, với metric xác định bởi chuẩn. Một điểm $a \in D$ gọi là một *điểm trong tương đối* của D nếu a là điểm trong của D xét trong không gian metric aff$D$. Tập hợp các điểm trong tương đối của D được ký hiệu ri$D$ (tiếng Anh relative interior nghĩa là phần trong tương đối).

V. *Một tập lồi D trong không gian $\mathbb{R}^k$ bao giờ cũng có ít nhất một điểm trong tương đối* (nói cách khác ri$D \neq \emptyset$).

Thật vậy, bằng một phép tịnh tiến, có thể cho rằng $0 \in D$. Cho $e_1, \ldots, e_h$ là một số phần tử của D, sao cho chúng độc lập tuyến tính, nhưng khi thêm bất kỳ $x \in D$ nào vào thì hệ $x, e_1, \ldots, e_h$ cũng sẽ phụ thuộc tuyến tính (vì số phần tử độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^k$ không thể vượt quá k, nên $e_1, \ldots, e_h$ bao giờ cũng tồn tại). Không gian con M sinh bởi $e_1, \ldots, e_h$ chứa D vì rằng theo cách chọn các điểm này thì mọi $x \in D$ đều là tổ hợp tuyến tính của các $e_1, \ldots, e_h$. Vậy M chính là aff$D$. Mỗi điểm $x \in M$ có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $x = \sum_{i=1}^{h} \xi_i e_i$. Dễ thấy rằng mọi điểm $a = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i e_i$ có $\sum_{i=1}^{h} \alpha_i < 1$, đều là điểm trong của D trong không gian M. Thật vậy, ta hãy chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ để $\alpha_i + \frac{\varepsilon}{\|e_i\|} > 0$ $(i = 1, \ldots, h)$ và $\sum_{i=1}^{h} (\alpha_i + \frac{\varepsilon}{\|e_i\|}) < 1$. Khi ấy, nếu $x = \sum_{i=1}^{h} \xi_i e_i$ có chuẩn $\|x\| < \varepsilon$ thì $|\xi_i| \leq \frac{\varepsilon}{\|e_i\|}$ $(i = 1, \ldots, h)$, cho nên, đặt $\beta_i = \alpha_i + \xi_i$ $(i = 1, \ldots, h)$ và $\beta_0 = 1 - \sum_{i=1}^{h} \beta_i$ ta sẽ có $\beta_i > 0$ $(i - 0, 1, \ldots, h)$, $\sum_{i=1}^{h} \beta_i = 1$ và $a + x = \beta_0 0 + \sum_{i=1}^{h} \beta_i e_i$ là tổ hợp lồi của $h + 1$ phần tử của D : $0, e_1, \ldots, e_h$, thì phải thuộc D. Thành thử mọi $x \in M$ trong ε-lân cận của a đều thuộc D, chứng tỏ a là điểm trong tương đối của D.

Chú ý rằng mệnh đề vừa rồi không thể mở rộng cho không gian vô hạn chiều.

1.4. ĐỊNH LÝ TÁCH TẬP LỒI

Cho X là một không gian tuyến tính thực, ta nói một phiếm hàm tuyến tính $f(x)$ *tách* hai tập D, E nếu:

$$\sup_{x \in D} f(x) \leq \inf_{x \in E} f(x) \tag{5}$$

nghĩa là có một số α để cho

$$(\forall x \in D)\ f(x) \leq \alpha \quad \text{và} \quad (\forall x \in E)\ \alpha \leq f(x). \tag{6}$$

Nhắc lại rằng tập $\{x : f(x) = \alpha\}$ (với giả thiết $f \not\equiv 0$) là một siêu phẳng. Nếu có (6) thì ta cũng nói: siêu phẳng $f(x) = \alpha$ tách hai tập D và E.

Cho C là một tập lồi có điểm bọc tại gốc 0 trong một không gian tuyến tính X. Ta gọi *phiếm hàm Minkowski* (hay *hàm cỡ*) của C là hàm số $p_C : X \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$p_C(x) = \inf\{\lambda > 0 :\ x \in \lambda C\}.$$

Chú ý rằng vì 0 là điểm bọc của C nên $0 \leq p_C(x) < +\infty$ trên toàn X.

Bổ đề 2. *Phiếm hàm Minkowski $p_C(x)$ của một tập lồi C có điểm bọc tại gốc là dưới tuyến tính và thoả mãn*

$$\{x :\ p_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x :\ p_C(x) \leq 1\}. \tag{7}$$

Chứng minh. Với mọi $\alpha \geq 0$ ta có $p_C(\alpha x) = \inf\{\lambda > 0 :\ \alpha x \in \lambda C\} = \alpha \inf\{\mu > 0 :\ x \in \mu C\} = \alpha p_C(x)$. Mặt khác nếu $x \in \lambda C$, $y \in \mu C$ $(\lambda, \mu > 0)$, nghĩa là nếu $x = \lambda x'$, $y = \mu y'$ với $x', y' \in C$, thì

$$x + y = (\lambda + \mu)[\frac{\lambda}{\lambda + \mu} x' + \frac{\mu}{\lambda + \mu} y'] \in (\lambda + \mu)C.$$

Vậy $p_C(x + y) \leq \lambda + \mu$ với mọi $\lambda, \mu > 0$ thoả mãn $x \in \lambda C, y \in \mu C$, và do đó $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$. Cuối cùng, (7) chỉ là hệ quả trực tiếp của định nghĩa. □

Từ bổ đề trên và Định lý Hahn-Banach có thể suy ra *Định lý tách* sau đây cho tập lồi.

Định lý 3. (Mazur-Eidelheit) *Trong một không gian tuyến tính thực X, cho hai tập lồi D, E không có điểm chung. Nếu có một trong hai giả thiết sau:*

1) X là không gian hữu hạn chiều,

2) D (hoặc E) có điểm bọc,

thì khi ấy có một phiếm hàm tuyến tính tách D với E.

Chứng minh. Do D, E lồi và không có điểm chung nên $C = D - E$ là tập lồi không chứa 0. Nếu X là không gian hữu hạn chiều, chẳng hạn $X = \mathbb{R}^k$ thì, theo tính chất V ở mục trước, C có một điểm trong tương đối c. Khi ấy nếu $\text{aff}C = X$ (đa tạp tuyến tính nhỏ nhất chứa C là chính X) thì c cũng là điểm bọc của C. Còn nếu $\text{aff}C \neq X$ thì đa tạp ấy nằm trong một siêu phẳng $f(x) = \alpha$ nào đó ($f \not\equiv 0$), và đương nhiên có thể giả thiết $\alpha \geq 0$ (vì nếu trái lại thì chỉ việc thay f bằng $-f$), cho nên f sẽ là phiếm hàm tách C với gốc 0.[1]

Trong trường hợp có giả thiết 2) nếu a là một điểm bọc của D, và b là một điểm tuỳ ý của E thì dễ thấy rằng $c = a - b$ là điểm bọc của $D - b \subset D - E$, cho nên c cũng là điểm bọc của $C = D - E$.

Vậy để chứng minh định lý ta có thể giả thiết tập C có một điểm bọc c. Khi ấy tập lồi $C' = C - c$ nhận 0 là điểm bọc, và vì $0 \notin C$ nên $-c \notin C'$, do đó đối với hàm $\varphi(x) = p_{C'}(x)$ (dưới tuyến tính, theo Bổ đề 2) ta có $\varphi(-c) \geq 1$. Cho $M = \{\lambda c : \lambda \in \mathbb{R}\}$ là không gian con sinh bởi c, và xét phiếm hàm tuyến tính $l(x)$ trên M xác định bởi $l(x) = -\lambda\varphi(-c)$ với mọi $x = \lambda c$. Vì $l(c) = -\varphi(-c) \leq -1$ và $l(-c) = \varphi(-c)$ nên dễ thấy rằng $l(x) \leq \varphi(x)$ với mọi $x \in M$. Vậy theo Định lý Hahn-Banach $l(x)$ có thể khuếch thành một phiếm hàm tuyến tính $f(x)$ trên toàn X sao cho $f(x) \leq \varphi(x)\ \forall x \in X$. Nếu $x \in D, y \in E$ thì $x - y - c \in C'$ nên $\varphi(x - y - c) \leq 1$ (tính chất phiếm hàm Minkowski), do đó $f(x - y - c) \leq 1$, tức là $f(x) - f(y) \leq f(c) + 1 = l(c) + 1 \leq -1 + 1 = 0$. Vậy

$$(\forall x \in D)(\forall y \in E) \quad f(x) \leq f(y). \qquad \square$$

Chú ý. Trong Định lý trên không nói gì về tính liên tục của phiếm hàm tuyến tính tách hai tập. Nếu X là không gian định chuẩn thì có thể khẳng định mạnh hơn:

Nếu hai tập lồi D, E trong một không gian định chuẩn thực mà không có điểm chung và D (hoặc E) có điểm trong thì có một phiếm

[1] Nếu $e_1, \ldots, e_h$ $(h < k)$ là một cơ sở của không gian con song song với affC thì bao giờ cũng có thể bổ sung thêm $e_{h+1}, \ldots, e_k$ cho thành một cơ sở của $\mathbb{R}^k$. Khi ấy có thể lấy $f(x) = (e_k, x)$ (tích vô hướng của e_k với x).

Chú ý rằng nếu X vô hạn chiều thì C có thể không có điểm bọc, mà vẫn có $\text{aff}C = X$, cho nên lập luận vừa rồi không áp dụng được. Chính vì thế mà trong không gian vô hạn chiều phải giả thiết D (hoặc E) có điểm bọc.

hàm tuyến tính liên tục tách chúng (tức là có một siêu phẳng đóng tách chúng).

Điều này là hệ quả của sự kiện tổng quát sau:

Bổ đề 3. *Nếu một phiếm hàm tuyến tính f (trên không gian định chuẩn thực) nghiệm đúng, với một số thực α nào đó, $f(x) \geq \alpha$ với mọi x thuộc một tập lồi D có điểm trong, thì f phải liên tục.*

Thật vậy nếu a là một điểm trong của D, thì có một hình cầu đóng $\|x - a\| \leq \delta$ nằm trọn trong D. Như vậy $f(x)$ bị chặn bởi số α trong lân cận nói trên của a, cho nên nó là liên tục. □

1.5. HAI BIẾN THỂ KHÁC CỦA ĐỊNH LÝ HAHN-BANACH. Trong toán học ít có những định lý được dùng dưới nhiều biến thể khác nhau như định lý Hahn-Banach. Ngoài Định lý tách Eldelheit-Mazur ở trên mà người ta biết nó hoàn toàn tương đương với Định lý Hahn-Banach, sau đây là là hai biến thể quan trọng khác của Định lý này.

Định lý 4. (dạng hình học của định lý Hahn-Banach). *Nếu một đa tạp tuyến tính V trong một không gian định chuẩn thực X, mà không cắt một tập lồi mở D thì có một siêu phẳng đóng chứa V và không cắt D.*

Chứng minh. V là đa tạp tuyến tính thì cố nhiên là tập lồi, nên theo Định lý 1 phải có một phiếm hàm tuyến tính $f \not\equiv 0$ (liên tục như vừa thấy trên) tách D với V:

$$\sup_{x \in D} f(x) \leq \inf_{x \in V} f(x).$$

Giả sử $V = M + a$, với M là không gian con. Dĩ nhiên $a \in V$ (vì $0 \in M$). Với mọi $x \in V$ ta phải có $f(x - a) = 0$ vì nếu có một $x \in V$ nào đó với $f(x - a) \neq 0$ thì lấy λ có trị tuyệt đối đủ lớn và có dấu thích hợp ta sẽ có một mặt, $f(a + \lambda(x - a)) = f(a) + \lambda f(x - a) < \alpha$, nhưng mặt khác, vì $a \in V, x \in V$ nên $a + \lambda(x - a) \in V$: mâu thuẫn. Vậy V nằm trọn trong siêu phẳng đóng $f(x) = \alpha$, với $\alpha = f(a)$, và $\sup_{x \in D} f(x) \leq \alpha$.

Mặt khác nếu có một $x \in D$ với $f(x) = \alpha$ thì do $f \not\equiv 0$ nên tồn tại t với $f(t) \neq 0$ và với λ bất kỳ miễn là có dấu thích hợp, ta sẽ có, một mặt, $f(x + \lambda t) > \alpha$, nhưng mặt khác, do D mở nên $x_0 + \lambda t \in D$ với

$|\lambda|$ đủ nhỏ: mâu thuẫn. Vậy D không có điểm chung với siêu phẳng $f(x) = \alpha$. □

Định lý tiếp theo nói về việc khuếch phiếm hàm không âm. Trước khi phát biểu định lý đó ta chú ý sự kiện sau đây, tuy đơn giản, nhưng nhiều khi có ích.

Bổ đề 4. *Một phiếm hàm tuyến tính $f(x)$ (trên không gian tuyến tính thực) triệt tiêu tại một điểm bọc a của một tập D và có dấu không đổi (chẳng hạn luôn luôn ≥ 0) trên tập đó thì phải $\equiv 0$.*

Thật vậy, với x bất kỳ và $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, ta có $a \pm \varepsilon(x-a) \in D$ nên $f(a \pm \varepsilon(x-a)) \geq 0$ hay $0 \leq f(a) \pm \varepsilon f(x-a) = (1 \pm \varepsilon) f(a) \pm \varepsilon f(x) = \pm \varepsilon f(x)$, từ đó $f(x) = 0$. □

Định lý 5. (Krein) *Trong một không gian định chuẩn thực X cho một tập lồi mở D và một không gian con M có ít nhất một điểm chung với D. Nếu f là một phiếm hàm tuyến tính trên M và $f(x) \geq 0$ trên $D \cap M$ thì f có thể khuếch được thành một phiếm hàm tuyến tính liên tục F trên toàn không gian X, sao cho $F(x) \geq 0$ trên toàn tập D.*

Chứng minh. Theo bổ đề trên, nếu $f(x) = 0$ tại một điểm $x \in D \cap M$ thì $f(x) \equiv 0$ trên M và ta có thể lấy $F(x) \equiv 0$. Vậy có thể giả thiết rằng $f(x) > 0$ trên $D \cap M$, do đó không gian con $E = \{x \in M : f(x) = 0\}$ không có điểm chung với D. Vậy theo Định lý 4, E nằm trọn trong một siêu phẳng đóng P không cắt D. Siêu phẳng này đi qua gốc 0 (vì $0 \in E$) nên có dạng $P = \{x : g(x) = 0\}$ với $g(x)$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục xác định trên toàn X. Cho $a \in D \cap M$. Vì $a \notin P$ nên $g(a) \neq 0$. Vả lại $f(a) > 0$. Ta hãy xác định F bởi $F(x) = \frac{f(a)}{g(a)} g(x)$. Khi ấy F là khuếch của f. Thật vậy với mọi $x \in M$ ta có $f\left(x - \frac{f(x)}{f(a)} a\right) = 0$ cho nên $x - \frac{f(x)}{f(a)} a \in E \subset P$, do đó $g\left(x - \frac{f(x)}{f(a)} a\right) = 0$, nghĩa là $g(x) = \frac{g(a)}{f(a)} f(x)$, và ta suy ra

$$F(x) = \frac{f(a)}{g(a)} \frac{g(a)}{f(a)} f(x) = f(x).$$

Vì $g(x)$ liên tục nên hiển nhiên $F(x)$ cũng liên tục. Vậy chỉ còn phải chứng minh $F(x) > 0$ trên toàn D. Giả sử ngược lại $F(x_0) \leq 0$ với

một $x_0 \in D$. Vì D lồi, nên

$$y = \frac{1}{F(a) - F(x_0)}[F(a)x_0 - F(x_0)a] \in D$$

(nhớ rằng $F(a) = f(a) > 0$, và để ý rằng $\frac{F(a)}{F(a)-F(x_0)} + \frac{-F(x_0)}{F(a)-F(x_0)} = 1$). Nhưng rõ ràng $F(y) = 0$, tức là $g(y) = \frac{g(a)}{f(a)}F(y) = 0$. Do đó $y \in P$, vô lý vì P không cắt D. □

Trong các ứng dụng, tập D thường là một nón lồi, nghĩa là một tập sao cho

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in D \ &\Rightarrow \quad x_1 + x_2 \in D, \\ x \in D,\ \alpha > 0 \ &\Rightarrow \quad \alpha x \in D. \end{aligned}$$

Khi ấy định lý Krein cho biết trong những điều kiện nào một phiếm hàm tuyến tính không âm trên một nón con của D (nón $D \cap M$) có thể khuếch được thành một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên toàn X và không âm trên nón D.

1.6. BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG TƯƠNG THÍCH. Một trong những ứng dụng quan trọng của Định lý Hahn-Banach là vào vấn đề bất đẳng thức và từ đó vào lý thuyết biến phân và các bài toán cực trị.

Định lý 6. *Cho những hàm lồi f_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ trên một tập lồi D trong một không gian tuyến tính thực X. Nếu hệ*

$$f_i(x) < 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, k) \tag{8}$$

không có nghiệm trong D thì phải có những số thực $\mu_i \geq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$, trong đó có ít nhất một số dương, sao cho

$$(\forall x \in D) \quad \sum_{i=0}^{k} \mu_i f_i(x) \geq 0. \tag{9}$$

Nếu giả thiết thêm có ít nhất một điểm $x_0 \in D$ nghiệm đúng

$$f_i(x_0) < 0 \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{10}$$

thì $\mu_0 > 0$ (do đó có thể lấy $\mu_0 = 1$).

Chứng minh. Xét tập $C \subset \mathbb{R}^{k+1}$ gồm tất cả các điểm $y = (y_0, \ldots, y_k)$ sao cho với mỗi điểm ấy có một $x \in D$ nghiệm đúng

$$f_i(x) < y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

Vì các f_i là hàm lồi và D là tập lồi nên có thể thấy ngay C là tập lồi. Vì hệ (8) không có nghiệm trong D nên $0 \notin C$. Vậy theo định lý tách tập lồi (Định lý 3), có một phiếm hàm tuyến tính trên $\mathbb{R}^{k+1}$ tách C với 0, tức là có một vectơ $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k) \neq 0$ sao cho

$$(\forall y = (y_0, \ldots, y_k) \in C) \quad \sum_{i=0}^{k} \mu_i y_i \geq 0. \tag{11}$$

Nếu $x \in D$ thì với mọi $\varepsilon > 0$ ta có $f_i(x) < f_i(x) + \varepsilon$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ cho nên $(f_0(x) + \varepsilon, \ldots, f_k(x) + \varepsilon) \in C$ và do đó

$$\sum_{i=0}^{k} \mu_i (f_i(x) + \varepsilon) \geq 0.$$

Vì $\varepsilon > 0$ có thể chọn nhỏ tuỳ ý nên ta có (9). Nếu có một $\mu_j < 0$ thì cố định $x \in D$, và cố định mọi $y_i > f_i(x), i \neq j$ đồng thời cho $y_j \to +\infty$, ta sẽ được $\sum_{i=0}^{k} \mu_i y_i \to -\infty$, trái với (11). Vậy $\mu_j \geq 0$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$.

Sau cùng, nếu có $x_0 \in D$ nghiệm đúng (10) mà $\mu_0 = 0$ thì từ (9) ta có

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i(x_0) \geq 0,$$

trong khi ấy từ (10) và việc $\mu_i > 0$ với ít nhất một $i = 1, \ldots, k$ (vì vectơ $\mu \neq 0$!) ta lại có

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i(x_0) < 0.$$

Mâu thuẫn ấy chứng tỏ $\mu_0 > 0$ và bằng cách chia tất cả các μ_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ cho $\mu_0 > 0$ ta có thể cho rằng $\mu_0 = 1$. □

Định lý vừa rồi là hệ quả tương đối đơn giản của định lý tách. Những mệnh đề sau đây sâu sắc hơn.

Ta nói một phiếm hàm f trên một không gian tuyến tính là *affin* nếu $f(x) - f(0)$ là tuyến tính.

Định lý 7. (Farkas-Minkowski) *Cho $f_i(x), i \in I_1 \subset \{1, \ldots, k\}$ là những hàm affin trên một không gian tuyến tính thực X, và $f_0(x)$, $f_i(x)$, $i \in I_2 = \{1, \ldots, k\} \setminus I_1$, là những hàm lồi hữu hạn trên một tập lồi $D \subset X$. Nếu có một điểm bọc x_0 của D nghiệm đúng*

$$f_i(x_0) \leq 0 \ (i \in I_1), \ f_i(x_0) < 0 \ (i \in I_2), \tag{12}$$

nhưng hệ

$$x \in D, \ f_i(x) \leq 0 \ (i = 1, \ldots, k), \ f_0(x) < 0 \tag{13}$$

vô nghiệm thì phải có những số thực $\mu_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, k)$ sao cho

$$(\forall x \in D) \quad f_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i(x) \geq 0. \tag{14}$$

Chứng minh. Có thể coi như $f_i(x_0) = 0$ với mọi $i \in I_1$ vì nếu không thế thì có thể thay I_1 bằng $\{i : \ f_i(x_0) = 0\}$. Ta chứng minh bằng quy nạp theo k. Trước hết ta nhận xét định lý đúng khi $k = 1$. Thật vậy, khi ấy nếu $I_1 = \emptyset$ thì đây chẳng qua là Định lý 6, cho nên chỉ cần xét trường hợp $I_1 = \{1\}$, nghĩa là $f_1(x)$ affin. Do $f_1(x_0) = 0$ tại điểm bọc x_0 của D nên nếu $f_1(x) \geq 0 \ \forall x \in D$ thì $f_1(x) = 0 \ \forall x \in D$ và (14) nghiệm đúng với $\mu_1 = 0$. Mặt khác nếu có $x \in D$ nghiệm đúng $f_1(x) < 0$ thì, vì hệ $x \in D, f_1(x) \leq 0, f_0(x) < 0$ vô nghiệm nên đây lại cũng là hệ quả Định lý 6. Vậy trong mọi trường hợp định lý đúng khi $k = 1$. Bây giờ giả sử định lý đúng cho $k = m \geq 1$ ta hãy xét trường hợp $k = m + 1$. Từ giả thiết suy ra ngay hệ

$$x \in D, \ f_i(x) \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m), \ \max\{f_{m+1}(x), f_0(x)\} < 0 \tag{15}$$

vô nghiệm. Mà hàm $\max\{f_{m+1}(x), f_0(x)\}$ lồi cho nên theo giả thiết quy nạp phải có những $t_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$ để cho

$$(\forall x \in D) \quad \max\{f_{m+1}(x), f_0(x)\} + \sum_{i=1}^{m} t_i f_i(x) \geq 0. \tag{16}$$

Từ đây có thể suy ra hệ

$$x \in D, \ \sum_{i=1}^{m} t_i f_i(x) \leq 0, \ f_{m+1}(x) \leq 0, f_0(x) < 0 \tag{17}$$

vô nghiệm. Thật vậy, từ (16) suy ra không thể có nghiệm nào của (17) thoả mãn $f_{m+1}(x) < 0$. Và lại, nếu có một nghiệm của (17) thoả mãn $f_{m+1}(x) = 0$ thì, đặt $x' = \alpha x_0 + (1-\alpha)x$ với $0 < \alpha < 1$ ta sẽ có $x' \in D$, $\sum_{i=1}^{m} t_i f_i(x') \leq 0$, $f_{m+1}(x') < 0$ và $f_0(x') \leq \alpha f_0(x_0) + (1-\alpha) f_0(x) < 0$ với $\alpha > 0$ đủ nhỏ. Điều này mâu thuẫn với sự vô nghiệm của (16). Do đó hệ (17) vô nghiệm. Lại theo giả thiết quy nạp, ta có $\theta \geq 0$ và $\mu_{m+1} \geq 0$ để cho

$$(\forall x \in D) \quad f_0(x) + \theta \sum_{i=1}^{m} t_i f_i(x) + \mu_{m+1} f_{m+1}(x) \geq 0. \tag{18}$$

Vậy định lý cũng đúng cho $k = m+1$ (với $\mu_i = \theta t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$), và do đó cho mọi k. □

Hệ quả. *Cho một ánh xạ tuyến tính A từ không gian tuyến tính thực X lên không gian tuyến tính thực Y và những phiếm hàm tuyến tính f_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ trên X. Nếu $f_0(x) \geq 0$ với mọi x nghiệm đúng $Ax = 0$, $f_i(x) \geq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ thì phải có một phiếm hàm tuyến tính λ trên Y và những số thực $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ sao cho*

$$f_0 \equiv \lambda \circ A + \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i. \tag{19}$$

Chứng minh. Gọi Z là không gian các nghiệm của phương trình $Ax = 0$ (nghĩa là $Z = \mathrm{Ker}A$) và áp dụng định lý trước với $X = D = Z$ (và $x_0 = 0$) ta có những số thực $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ sao cho

$$(\forall x \in Z) \quad f_0(x) - \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i \geq 0.$$

Nhưng vì Z là một không gian con nên bất đẳng thức này cũng phải đúng khi thay x bằng $-x$; do đó

$$\varphi(x) := f_0(x) - \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i(x) = 0$$

với mọi x nghiệm đúng $Ax = 0$. Ta hãy xác định một phiếm hàm λ trên Y như sau: với mỗi $y \in Y$ lấy phần tử x nghiệm đúng $Ax = y$ (phần

tử này tồn tại, vì A là toàn ánh theo giả thiết), và đặt $\lambda(y) = \varphi(x)$. Nếu $Ax_1 = Ax_2 = y$ thì $A(x_1 - x_2) = 0$ nên $\varphi(x_1 - x_2) = 0$, tức $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, chứng tỏ rằng $\lambda(y)$ được xác định đơn trị. Rõ ràng φ là tuyến tính và $\varphi(x) \equiv \lambda(A(x))$ với mọi x, nghĩa là $\varphi = \lambda \circ A$, từ đó suy ra (19). □

Định lý 8. *Cho một tập lồi D trong một không gian tuyến tính thực X, một toán tử tuyến tính A từ X lên một không gian tuyến tính thực Y, một điểm bọc b của tập $A(D)$ và các hàm lồi $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, k)$ trên tập D. Nếu hệ*

$$x \in D,\ Ax = b,\ f_i(x) < 0 \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{20}$$

vô nghiệm thì phải có một phiếm hàm tuyến tính λ trên Y và những số thực $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ sao cho một trong các μ_i là > 0 và

$$(\forall x \in D) \quad \lambda(Ax - b) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i(x) \geq 0. \tag{21}$$

Chứng minh. Cho $I \subset \{1, \ldots, k\}$ là tập lớn nhất sao cho hệ $f_i(x) < 0$ $(i \in I)$ có nghiệm trong $E = \{x \in D : Ax = b\}$. Khi ấy, với $j \notin I$, hệ: $f_i(x) < 0$ $(i \in I)$, $f_j(x) < 0$, sẽ không có nghiệm trong E. Mà E là tập lồi, cho nên theo Định lý 6 phải có những số $\mu_i \geq 0$ $(i \in I)$ nghiệm đúng

$$(\forall x \in E) \quad f_i(x) + \sum_{i \in I} \mu_i f_i(x) \geq 0.$$

Đặt $\mu_j = 1$, $\mu_i = 0$ $(i \notin I,\ i \neq j)$ ta có

$$(\forall x \in E) \quad \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i(x) \geq 0. \tag{22}$$

Cho $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i(x)$. Dĩ nhiên $\varphi(x)$ là hàm lồi trên D. Gọi C là tập tất cả các điểm $(y, z) \in Y \times \mathbb{R}$ sao cho với mỗi điểm ấy có một $x \in D$ nghiệm đúng

$$Ax - b = y, \quad \varphi(x) < z$$

Vì φ lồi nên dễ kiểm tra lại rằng C là tập lồi trong $Y \times \mathbb{R}$. Do (22) nên không thể có $x \in D$ nghiệm đúng $Ax - b = 0$, $\varphi(x) < 0$; nói cách

khác, $(0,0) \notin C$. Để áp dụng được định lý tách cho C, ta hãy chứng minh rằng C có một điểm bọc.

Vì $b \in A(D)$ nên có $\bar{x} \in D$ nghiệm đúng $A\bar{x} - b = 0$. Cho $\bar{z}$ là một số thực $> \varphi(\bar{x})$. Như thế $(0, \bar{z}) \in C$, và đây chính là một điểm bọc của C. Thật vậy, cho $(y, z) \in Y \times \mathbb{R}$ tuỳ ý. Vì b là điểm bọc của $A(D)$ nên phải có $\theta > 0$ để $b - \theta y \in A(D)$ tức là có $x \in D$ nghiệm đúng $Ax - b = -\theta y$. Đặt $x' = \alpha x + (1-\alpha)x$ $(0 \le \alpha \le 1)$ ta có $x' \in D$ và $Ax' - b = -\alpha\theta y$, đồng thời khi $\alpha \downarrow 0$ thì

$$\varphi(x') \le \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}) < \bar{z},$$

cho nên với $\alpha > 0$ đủ nhỏ ta có $\varphi(x') < \bar{z} - \alpha\theta z$. Thành thử có $x' \in D$ nghiệm đúng

$$Ax' - b = -\varepsilon y, \quad \varphi(x') < \bar{z} - \varepsilon z$$

(với $\varepsilon = \alpha\theta > 0$), chứng tỏ $(-\varepsilon y, \bar{z} - \varepsilon z) \in C$. Vậy với mỗi $(y, z) \in Y \times \mathbb{R}$ tồn tại $\varepsilon > 0$ để $(0, \bar{z}) - \varepsilon(y, z) \in C$. Do đó $(0, \bar{z})$ là điểm bọc của C.

Theo Định lý tách (Định lý 3) phải có một phiếm hàm tuyến tính $\Lambda \not\equiv 0$ trên $Y \times \mathbb{R}$ sao cho $\Lambda(y, z) \ge 0$ với mọi $(y, z) \in C$. Nhưng theo Định lý 9 Chương 5 (hoặc ví dụ 4, tiết 4, Chương 5). Λ phải có dạng $\Lambda(y, z) = \lambda(y) + \mu z$, trong đó λ là một phiếm hàm tuyến tính trên Y còn μ là một số thực. Vậy

$$(\forall (y, z) \in C) \quad \lambda(y) + \mu z \ge 0, \tag{23}$$

tức là với mọi $x \in D$ và mọi $z > \varphi(x)$:

$$\lambda(Ax - b) + \mu z \ge 0. \tag{24}$$

Cố định $x \in D$ và cho $z \downarrow \varphi(x)$ ta suy ra

$$(\forall x \in D) \quad \lambda(Ax - b) + \mu\varphi(x) \ge 0. \tag{25}$$

Ở đây nếu $\mu < 0$ thì cố định một $x \in D$ và cho $z \to +\infty$ ta sẽ đi đến mâu thuẫn với (24). Hơn nữa nếu $\mu = 0$ thì cho $y = 0$, $z = \bar{z}$ ta có theo (23) $\Lambda(0, \bar{z}) = 0$, mà $(0, \bar{z})$ là điểm bọc của C nên theo Bổ đề 4 ta sẽ có $\Lambda \equiv 0$: mâu thuẫn. Vậy $\mu > 0$ và bằng cách chia cả λ và μ cho μ nếu cần, có thể coi như $\mu = 1$. Khi ấy (25) chính là (21). □

2. ĐỊNH LÝ ÁNH XẠ MỞ VÀ NGUYÊN LÝ CHẶN ĐỀU

Bên cạnh định lý Hahn-Banach, hai nguyên lý quan trọng khác của giải tích hàm là định lý ánh xạ mở của Banach và nguyên lý chặn đều của Banach và Steinhaus. Trong tiết này sẽ trình bày về hai định lý đó cùng các hệ quả của chúng.

2.1. ĐỊNH LÝ PHẠM TRÙ. Trước hết cần chứng minh một mệnh đề làm công cụ cơ bản cho nhiều vấn đề liên quan đến *tính đủ* của không gian.

Định lý 8. (Baire-Hausdorff) *Cho một không gian metric đủ X. Nếu $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ thì tồn tại một hình cầu đóng trong S và một n_0 sao cho tập X_{n_0} trù mật trong S* (nghĩa là *bao đóng* $\overline{X}_{n_0} \supset S$).

Chứng minh. Giả sử trái lại không có hình cầu đóng S và chỉ số n_0 như thế. Ta hãy lấy một hình cầu đóng S_0 bán kính bằng 1. Vì X_1 không trù mật trong S_0 nên có một hình cầu đóng $S_1 \subset S_0$, với bán kính $< 1/2$, sao cho $S_1 \cap X_1 = \emptyset$. Vì X_2 cũng không trù mật trong S_1 nên có một hình cầu đóng $S_2 \subset S_1$ với bán kính $< 1/4$, sao cho $S_2 \cap X_2 = \emptyset$, v.v... Tiếp tục như thế ta được một dãy hình cầu đóng thắt dần $S_0, S_1, S_2, \ldots$, cho nên theo Định lý 6, Chương 2, dãy hình cầu đó có một điểm chung duy nhất x. Ta có $(\forall n)\ x \notin X_n$ nhưng $x \in X$, trái với đẳng thức $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$. □

Một tập con M của một không gian metric X được gọi là *không đâu trù mật* trong X nếu mỗi hình cầu $S \subset X$ đều chứa một hình cầu S' trong đó không có điểm nào của M cả. Với khái niệm ấy, mệnh đề trên có thể phát biểu:

Một không gian metric đủ không thể là hợp của một số đếm được tập không đâu trù mật.

Một tập mà bằng hợp của một số đếm được tập không đâu trù mật trong một không gian metric cũng được gọi là "*tập phạm trù 1*" trong không gian đó. Một tập không phải phàm trù 1, gọi là "*tập phạm trù 2*". Thành thử:

Một không gian metric đủ là một tập phạm trù 2 (trong chính nó).

Vì lý do này định lý trên thường được gọi là *định lý phạm trù.*

2.2. ĐỊNH LÝ ÁNH XẠ MỞ.

Một ánh xạ $f : X \to Y$ (X, Y : không gian metric) gọi là *mở tại một điểm* $a \in X$ nếu nó biến mỗi lân cận của a thành một lân cận của $f(a)$. Ánh xạ đó gọi là *mở* nếu nó mở tại mọi điểm: điều này xảy ra khi và chỉ khi f biến mọi tập mở trong X thành tập mở trong Y.

Để ý rằng một ánh xạ liên tục không nhất thiết là mở. Tuy nhiên ta có sự kiện quan trọng:

Định lý 9. (Định lý Banach về ánh xạ mở) *Nếu A là một toán tử tuyến tính liên tục từ một không gian Banach X lên một không gian Banach Y thì nó biến mỗi tập mở trong X thành một tập mở trong Y.*

Để ý rằng ở đây giả thiết A là một ánh xạ từ X lên Y, nghĩa là miền trị của A là toàn bộ Y.

Chứng minh. Chỉ cần vạch rõ rằng mỗi hình cầu mở U trong X, có tâm ở x_0, được toán tử A biến thành một tập $A(U)$ có chứa một hình cầu mở tâm ở Ax_0 (khi ấy nếu $G \subset X$ là tập mở thì ảnh của nó $A(G) \subset Y$ cũng mở vì rằng mọi $y_0 \in A(G)$ có dạng $y_0 = Ax_0$, với $x_0 \in G$, và gọi U là hình cầu (tâm ở x_0) nằm trọn trong G, ta sẽ tìm được một hình cầu V (tâm ở Ax_0) với $V \subset A(U) \subset A(G)$). Vả lại có thể giả thiết rằng $x_0 = 0$, vì nếu $x_0 \neq 0$ thì ta có thể thay U bởi hình cầu $U' = U - x_0$; hình cầu này có tâm ở gốc 0, và nếu ta chứng minh được rằng $A(U')$ có chứa một hình cầu mở V (tâm ở gốc 0 trong Y) thì $A(U) = A(U') + Ax_0$ sẽ chứa hình cầu mở $V + Ax_0$ (tâm ở Ax_0).

(Nhớ rằng nếu M là một tập, x là một vectơ thì ký hiệu $M + x$ là tập các vectơ x' có dạng $x'' + x$, với $x'' \in M$).

Ta chia chứng minh làm hai bước:

1) Trước hết hãy chứng minh rằng: mỗi hình cầu $U \subset X$, tâm ở 0 trong X được toán tử A biến thành một tập $A(U)$ có bao đóng chứa trọn một hình cầu $V \subset Y$, tâm ở 0 trong Y.

Cho W là một hình cầu đóng tâm ở 0 và có bán kính bé hơn $1/2$ bán kính của U. Ký hiệu nW là hình cầu $\{x : x = nx',\ x' \in W\}$ ta có $X = \cup_{n=1}^{\infty}(nW)$, $Y = \cup_{n=1}^{\infty} A(nW) = \cup_{n=1}^{\infty} nA(W)$. Vậy theo Định lý phạm trù có một hình cầu đóng S và một n_0 sao cho bao đóng của $n_0A(W)$ chứa trọn S : $\overline{n_0A(W)} \supset S$, tức là $\overline{A(W)}$ chứa trọn hình cầu

$S_0 = (1/n_0)S$. Cho y_0 là tâm hình cầu S_0. Khi ấy hình cầu $V = S_0 - y_0$ có tâm ở gốc 0 trong Y và thoả mãn $V = S_0 - y_0 \subset S_0 - S_0 \subset \overline{A(W)} - \overline{A(W)}$. Mà W đồng tâm với U và có bán kính $< 1/2$ bán kính của U nên $W - W \subset U$, do đó $V \subset \overline{A(W)} - \overline{A(W)} \subset \overline{A(W) - A(W)} \subset \overline{A(U)}$.

2) Bây giờ cho $U_\varepsilon, V_\varepsilon$ là những hình cầu mở trong X và trong Y, có tâm ở gốc, và có bán kính $\varepsilon > 0$. Đặt $\varepsilon_i = \varepsilon/(2^i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Theo trên tồn tại các hình cầu V_{η_i}, tâm ở gốc, bán kính $\eta_i > 0$, sao cho

$$V_{\eta_i} \subset \overline{A(U_{\varepsilon_i})} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{26}$$

và đương nhiên có thể giả thiết $\eta_i \to 0$.

Ta hãy lấy một điểm tuỳ ý $y \in V_{\eta_0}$. Do (26), với $i = 0$, phải có một điểm $x_0 \in U_{\varepsilon_0}$ sao cho $\|y - Ax_0\| < \eta_1$, tức là $y - Ax_0 \in V_{\eta_1}$. Sau đó cũng do (26), với $i = 1$, phải có một điểm $x_1 \in U_{\varepsilon_1}$ sao cho $\|(y - Ax_0) - Ax_1\| < \eta_2$, tức là $y - A(x_0 + x_1) \in V_{\eta_2}$, v.v... Tiếp tục theo cách đó ta tìm được một dãy $x_i \in U_{\varepsilon_i}$ $(i = 0, 1, 2 \ldots)$ sao cho $\|y - A(\sum_{i=0}^n x_i)\| < \eta_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Ta có $\|\sum_{i=m+1}^n x_i\| \leq \sum_{i=m+1}^n \|x_i\| < \sum_{i=m+1}^n \varepsilon_i \to 0$ khi $m, n \to \infty$, cho nên $s_n = \sum_{i=0}^n x_i$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ là một dãy cơ bản, phải hội tụ tới một phần tử $x \in X$. Vì $\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{i=0}^n x_i\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n \|x_i\| < \varepsilon \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k} = 2\varepsilon$, nên $x \in U_{2\varepsilon}$. Chọn $n \to \infty$ trong $\|y - As_n\| < \eta_{n+1}$ ta được $y = Ax$.

Thành thử với mỗi $y \in V_{\eta_0}$ ta tìm được một $x \in U_{2\varepsilon}$ sao cho $y = Ax$. Điều đó có nghĩa là $A(U_{2\varepsilon}) \supset V_{\eta_0}$. Vậy mỗi hình cầu mở $U_{2\varepsilon}$ được biến thành một tập $A(U_{2\varepsilon})$ có chứa một hình cầu mở V_{η_0}. □

Hệ quả 1. (Định lý ánh xạ ngược). *Nếu một toán tử tuyến tính liên tục A ánh xạ 1-1 không gian Banach X lên không gian Banach Y thì ánh xạ ngược A^{-1}* (tuyến tính) *cũng liên tục.*

Thật vậy, khi ấy nghịch ảnh bởi A^{-1} của mọi tập mở trong X theo trên đều là tập mở trong Y, cho nên A^{-1} liên tục. □

Hệ quả 2. *Cho A là một toán tử tuyến tính liên tục từ không gian Banach X lên không gian Banach Y, và B là một toán tử tuyến tính liên tục từ không gian Banach X vào không gian Banach Z. Nếu $Bx = 0$ với mọi x nghiệm đúng $Ax = 0$ thì tồn tại duy nhất một toán tử tuyến tính liên tục C từ Y vào Z sao cho $B = CA$.*

Thật vậy, với mỗi $y \in Y$ ta đặt $C(y) = B(x)$ trong đó x là phần tử sao cho $Ax = y$. Nếu $Ax_1 = Ax_2 = y$ thì $A(x_2 - x_1) = 0$ nên theo giả thiết $B(x_2 - x_1) = 0$, tức là $Bx_2 = Bx_1$, chứng tỏ $C(y)$ được xác định đơn trị. Rõ ràng C là toán tử tuyến tính, và với mọi tập mở U trong Z ta có $C^{-1}(U) = A(B^{-1}(U))$, mà $B^{-1}(U)$ mở do B liên tục, nên theo Định lý ánh xạ mở $A(B^{-1}(U))$ cũng là tập hợp mở. Vậy C liên tục (và dễ thấy C duy nhất). □

2.3. KHÔNG GIAN THƯƠNG. Trong một không gian tuyến tính X, cho một không gian con M. Ta hãy phân lớp các phần tử của X theo qui tắc: hai phần tử x_1, x_2 được xếp vào cùng một lớp nếu $x_2 - x_1 \in M$. Bằng cách đó mỗi phần tử được xếp vào một lớp, và hai lớp $\tilde{x}, \tilde{y}$ khác nhau bao giờ cũng rời nhau, vì nếu $a \in \tilde{x} \cap \tilde{y}$ thì với mọi $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$ ta sẽ có $x - a \in M$, $y - a \in M$, từ đó $x - y = (x - a) - (y - a) \in M$, có nghĩa là $\tilde{x} = \tilde{y}$. Ta cũng nói $\tilde{x}$ là *lớp tương đương* modulo M của x.

Tập hợp các lớp tương đương modulo M là một không gian tuyến tính, với các phép toán tự nhiên:

$$\begin{aligned} \tilde{x} + \tilde{y} &= \{x + y : x \in \tilde{x},\ y \in \tilde{y}\} \\ \alpha\tilde{x} &= \{\alpha x : x \in \tilde{x}\} \end{aligned}$$

Không gian tuyến tính đó thường được ký hiệu X/M và gọi là *không gian thương của X theo M*.

Nếu X là không gian định chuẩn và M là không gian con *đóng* của X, thì khi đặt

$$\|\tilde{x}\| = \inf\{\|x\| : x \in \tilde{x}\} \tag{27}$$

ta biến X/M thành một *không gian định chuẩn*. Thật vậy, khi ấy nếu $\tilde{x}$ là phần tử 0 của X/M (tức $\tilde{x} = M$) thì, vì $0 \in \tilde{x}$ nên $\|\tilde{x}\| = 0$; ngược lại, nếu $\|\tilde{x}\| = 0$ thì có một dãy $\{x_n\} \subset \tilde{x}$ với $\|x_n\| \to 0$ và vì $\tilde{x}$ đóng (do M đóng) nên $0 \in \tilde{x}$ tức $\tilde{x}$ chính là phần tử 0 trong X/M. Các tiên đề khác về chuẩn cũng có thể kiểm tra lại một cách tương tự.

Ánh xạ $\pi : X \to X/M$ chuyển mỗi phần tử x trong X đến lớp $\tilde{x}$ của nó gọi là *ánh xạ chính tắc* (hay *ánh xạ thương*, hay *ánh xạ tự nhiên*) từ X lên X/M. Đó là một ánh xạ tuyến tính liên tục, vì do (27) ta có

$$\|\pi(x)\| \le \|x\|.$$

Từ (27) cũng thấy ngay với mỗi phần tử $\tilde{x}$ của X/M và với mỗi $\varepsilon > 0$ bao giờ cũng tìm được một $x \in X$ sao cho

$$\pi(x) = \tilde{x}, \ \|x\| \leq (1+\varepsilon)\|\tilde{x}\|. \tag{28}$$

Nói riêng với mỗi $\tilde{x}$ của X/M mà $\|\tilde{x}\| < 1$ bao giờ cũng tồn tại một $x \in X$ sao cho $\pi(x) = \tilde{x}$ và $\|x\| < 1$. Vậy nếu S là hình cầu đơn vị (mở) trong X thì $\pi(S)$ chứa hình cầu đơn vị (mở) trong X/M. Từ đó suy ra π là ánh xạ *mở*.

Vả lại, có thể chứng minh:

Nếu X là không gian Banach (và M là không gian con đóng của X) *thì X/M cũng là không gian Banach.*

Thật vậy, cho $\{\tilde{x}_n\}$ là một dãy cơ bản trong X/M. Bao giờ cũng tìm được một dãy con $\{\tilde{x}_{n_i}\}$ sao cho $\|\tilde{x}_{n_{i+1}} - \tilde{x}_{n_i}\| < 2^{-i}$. Dựa theo (28) ta có thể tìm được $x_{n_i} \in X$ sao cho

$$\pi(x_{n_i}) = \tilde{x}_{n_{i+1}} - \tilde{x}_{n_i}, \quad \|x_{n_i}\| \leq 2\|\tilde{x}_{n_{i+1}} - \tilde{x}_{n_i}\|$$

Khi ấy $\|x_{n_i}\| \leq 2^{-i+1}$, cho nên $\{x_{n_i}\}$ là dãy cơ bản trong X, do đó phải hội tụ tới một x_0 nào đó. Do π liên tục ta có $\pi(x_{n_i}) \to \pi(x_0)$, tức là $\tilde{x}_{n_i} \to \tilde{x}_0$, và từ đó $\tilde{x}_n \to \tilde{x}_0$. Vậy X/M là không gian đủ.

Bây giờ xét một toán tử tuyến tính liên tục A từ một không gian Banach X vào một không gian Banach Y. Vì $M = \mathrm{Ker}A$ là một không gian con đóng của X, nên như trên vừa thấy, không gian thương $X/\mathrm{Ker}A$ là không gian Banach. Mà ánh xạ chính tắc $\pi : X \to X/\mathrm{Ker}A$ là ánh xạ tuyến tính liên tục từ X lên $X/\mathrm{Ker}A$ nên theo Hệ quả 2 ở trên tồn tại một toán tử tuyến tính liên tục duy nhất $\widetilde{A} : X/\mathrm{Ker}A \to Y$ sao cho $A = \pi \circ \widetilde{A}$. Thành thử A được phân tích thành hợp thành của các ánh xạ

$$X \xrightarrow{\pi} X/\mathrm{Ker}A \xrightarrow{\widetilde{A}} Y.$$

Định lý 10. *Nếu A là một toán tử tuyến tính liên tục từ một không gian Banach lên một không gian Banach Y thì toán tử $\widetilde{A}$ là một đẳng cấu (toán tử tuyến tính liên tục, song ánh và có ánh xạ ngược liên tục) từ $X/\mathrm{Ker}A$ lên Y, và với mọi số $\gamma > \|\widetilde{A}^{-1}\|$ và mọi $y \in Y$ tồn tại một $x \in X$ nghiệm đúng*

$$y = Ax, \ \|x\| \leq \gamma\|y\|. \tag{29}$$

Chứng minh. Nếu $\widetilde{A}\tilde{x} = 0$ thì $Ax = 0$ với phần tử x mà $\pi(x) = \tilde{x}$, cho nên $\tilde{x} = 0$. Vậy $\widetilde{A}$ là đơn ánh. Rõ ràng $\widetilde{A}$ cũng là toàn ánh, mà $X/\mathrm{Ker}A$ là không gian Banach nên theo hệ quả ở trên, $\widetilde{A}$ là đẳng cấu. Với mỗi $y \in Y$, tồn tại $\tilde{x} \in X/\mathrm{Ker}A$ nghiệm đúng $\widetilde{A}\tilde{x} = y$. Ta có $\|\tilde{x}\| \leq \|\widetilde{A}^{-1}\|.\|y\|$, cho nên phải tìm được một $x \in \tilde{x}$ (tức là nghiệm đúng $Ax = y$) sao cho $\|x\| < \dfrac{\gamma}{\|\widetilde{A}^{-1}\|}\|\tilde{x}\| \leq \gamma\|y\|$. □

2.4. ĐỊNH LÝ ĐỒ THỊ ĐÓNG. *Đồ thị* của một ánh xạ $A : X \to Y$ là tập tất cả các phần tử (x, Ax) trong không gian tích trực tiếp $X \times Y$. Nếu đồ thị ấy là tập đóng trong không gian $X \times Y$, thì ánh xạ A được gọi là *đóng*. Dĩ nhiên điều đó có nghĩa là: từ $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ luôn luôn suy ra được $Ax = y$.

Một ánh xạ liên tục thì bao giờ cũng là đóng. Ngược lại nói chung không đúng, nhưng riêng đối với toán tử tuyến tính Định lý ánh xạ mở cho ta hệ quả sau đây.

Định lý 11. (Định lý đồ thị đóng) *Một toán tử tuyến tính đóng từ một không gian Banach X vào một không gian Banach Y bao giờ cũng liên tục.*

Chứng minh. Nếu A là toán tử tuyến tính thì đồ thị G của nó là không gian con của $X \times Y$. Nếu A lại là đóng thì G là không gian con đóng của $X \times Y$, cho nên bản thân G cũng là không gian Banach. Ta xét toán tử $B : G \to X$ xác định bởi

$$(x, A(x)) \mapsto x.$$

Đó là một ánh xạ tuyến tính liên tục, 1-1 từ không gian Banach G lên không gian Banach X. Vậy theo hệ quả Định lý 9, B có ánh xạ ngược B^{-1} liên tục, nghĩa là nếu $x_n \to x$ thì $(x_n, Ax_n) \to (x, Ax)$. Do đó A liên tục. □

2.5. NGUYÊN LÝ CHẶN ĐỀU. Cho X, Y là hai không gian định chuẩn , $\{A_t,\ t \in T\}$ là một họ các toán tử tuyến tính $A_t : X \to Y$. Ta nói rằng họ $\{A_t,\ t \in T\}$ *liên tục đồng bậc*, nếu với mọi $\varepsilon > 0$ đều có $\delta > 0$ (không phụ thuộc t) để cho với mọi $t \in T$:

$$\|x\| < \delta \ \Rightarrow\ \|A_t(x)\| \leq \varepsilon. \tag{30}$$

Một họ liên tục đồng bậc thì sẽ *bị chặn đều*, theo nghĩa: chuẩn của mọi toán tử trong họ cùng bị chặn bởi một hằng số $K > 0$:

$$(\forall t \in T) \ \|A_t\| \leq K. \tag{31}$$

Thật vậy, từ (30) ta suy ra $\|A_t\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right)\| \leq \varepsilon$, hay là $\|A_t(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|x\|$ với mọi x, cho nên, lấy $\varepsilon = 1$ và δ tương ứng, ta sẽ có (31) với $K = 1/\delta$.

Ngược lại, một họ toán tử tuyến tính bị chặn đều theo nghĩa (31) thì sẽ liên tục đồng bậc vì rằng với mọi $t \in T$ và mọi x ta sẽ có $\|A_t(x)\| \leq K.\|x\|$.

Dĩ nhiên nếu có (31) thì với mỗi x cố định cho trước, ta có

$$\sup_{t\in T} \|A_t(x)\| < \infty \tag{32}$$

(nghĩa là "quĩ đạo" $\{A_t(x),\ t \in T\}$ bị chặn). Sự kiện bất ngờ khá sâu sắc là:

Định lý 12. (Banach-Steinhaus) *Nếu X là không gian Banach, Y là không gian định chuẩn, thì mọi họ toán tử tuyến tính liên tục $\{A_t : X \to Y\}_{t\in T}$ mà bị chặn tại mỗi điểm, nghĩa là nghiệm đúng (32) tại mọi x, thì sẽ bị chặn đều theo nghĩa (31) và do đó sẽ liên tục đồng bậc.*

Chứng minh. Với mỗi số tự nhiên n, ta xét tập

$$X_n = \{x \in X : \sup_{t\in T} \|A_t(x)\| \leq n\}.$$

Mỗi tập này là đóng trong X, vì nó là giao của họ tập $\{x : \|A_t(x)\| \leq n\}$ $(t \in T)$, mà các tập ấy đóng do A_t liên tục. Theo giả thiết ta có (32) tại mọi x, cho nên $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$. Vậy theo Định lý phạm trù (Định lý 8), phải có một n_0 sao cho tập X_{n_0} chứa trọn một hình cầu đóng S nào đó. Cho x_0 và r là tâm và bán kính của S, ta có

$$\|x - x_0\| \leq r \ \Rightarrow \ \sup_{t\in T} \|A_t(x)\| \leq n_0.$$

Từ đó, chú ý rằng nếu $\|x\| \leq 1$ thì $\|x_0 + rx) - x_0\| \leq r$, ta suy ra, với mọi x nghiệm đúng $\|x\| \leq 1$ và với mọi $t \in T$:

$$\|A_t(x_0 + rx)\| \leq n_0.$$

Vậy $\|A_t(x_0) + rA_t(x)\| \leq n_0$, do đó

$$\|A_t(x)\| \leq \frac{n_0}{r} + \frac{1}{r}\|A_t(x_0)\| \leq 2n_0/r,$$

và vì điều này đúng với mọi x mà $\|x\| \leq 1$ nên

$$(\forall t \in T)\ \|A_t\| \leq 2n_0/r,$$

chứng tỏ họ $\{A_t,\ t \in T\}$ bị chặn đều. □

Hệ quả. *Nếu một dãy toán tử tuyến tính liên tục A_n từ một không gian Banach X vào một không gian định chuẩn Y mà hội tụ từng điểm tới một toán tử A : $A_n x \to Ax$ (với mọi x) thì A là tuyến tính liên tục.*

Thật vậy, A hiển nhiên là tuyến tính. Mặt khác, vì $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n(x)\| = \|A(x)\| < \infty$ nên $\sup\limits_n\|A_n(x)\| < \infty$ tại mỗi x, do đó theo định lý trên, có một $K > 0$ nghiệm đúng $\|A_n\| \leq K$ với mọi n. Khi ấy với mọi x,

$$\|A(x)\| = \lim_{n\to\infty}\|A_n(x)\| \leq K\|x\|$$

chứng tỏ toán tử A bị chặn, do đó liên tục. □

3. ĐỊNH LÝ HÀM ẨN VÀ ÁNH XẠ NGƯỢC ĐỊA PHƯƠNG

Giả sử có một ánh xạ $f(x, y)$ từ không gian $X \times Y$ vào không gian Z, và với mỗi $x \in X$ ta tìm nghiệm của phương trình

$$f(x, y) = b,$$

trong đó $b \in Z$ cho trước. Nếu với mỗi $x \in X$ phương trình này có một nghiệm duy nhất y thì ta bảo nó xác định một hàm ẩn $y = g(x)$. Sau đây ta sẽ khảo sát sự tồn tại của hàm ẩn và những điều kiện bảo đảm tính liên tục hoặc khả vi của nó.

3.1. CÔNG THỨC SỐ GIA GIỚI NỘI. Trước hết cần mở rộng một số khái niệm và sự kiện giải tích sơ cấp vào các hàm trừu tượng.

Cho f là một ánh xạ từ một tập mở U trong một không gian định chuẩn X vào một không gian định chuẩn Y, x_0 và $x_0 + h$ là hai điểm thuộc U. Giả sử toàn đoạn thẳng $x_0 + th$ $(0 \leq t \leq 1)$ nằm trong U và ánh xạ f khả vi tại mỗi điểm của đoạn thẳng ấy.

Dựa vào Hệ quả 2 Định lý Hahn-Banach, ta có thể chọn một phiếm hàm tuyến tính liên tục g, với $\|g\| = 1$ và

$$g(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \|f(x_0 + h) - f(x_0)\|. \tag{33}$$

Xét hàm số thực $\varphi(t) = g(f(x_0 + th))$, ta có, do g tuyến tính:

$$\frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = g\Big(\frac{f(x_0 + th + \Delta t.h) - f(x_0 + th)}{\Delta t}\Big).$$

Cho $\Delta t \to 0$ và để ý rằng vì lượng dưới dấu phiếm hàm g dần tới $f'(x_0 + th).h$ (Chương 5, Định lý 10) ta được:

$$\varphi'(t) = g(f'(x_0 + th).h).$$

Theo công thức Lagrange áp dụng cho φ ta có $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$ $(0 < \theta < 1)$, cho nên:

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = g(f'(x_0 + \theta h).h),$$

từ đó, vì g là tuyến tính liên tục và $\|g\| = 1$:

$$|g(f(x_0 + h) - f(x_0))| \leq \|f'(x_0 + \theta h).h\|.$$

Đối chiếu với (33) ta suy ra công thức sau đây, gọi là *công thức số gia giới nội:*

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq \sup_{0<\theta<1} \|f'(x_0 + \theta h)\|.\|h\|. \tag{34}$$

Nếu L là một ánh xạ tuyến tính thì áp dụng công thức đó cho phiếm hàm $f - L$ và chú ý rằng đạo hàm của phiếm hàm này là $f' - L$ ta được:

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\| \leq \sup_{0<\theta<1} \|f'(x_0 + \theta h) - L\|.\|h\|. \tag{35}$$

Nói riêng với $L = f'(x_0)$, ta suy ra:

$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0).h\| \leq \sup_{0<\theta<1} \|f'(x_0+\theta h) - f'(x_0)\|.\|h\| \tag{36}$$

Công thức này có tên là *công thức số gia giới nội với phần dư.*

Một ứng dụng quan trọng của công thức số gia giới nội là khái niệm hàm khả vi chặt sau đây.

Ta nói ánh xạ $f : U \to Y$ *khả vi chặt* tại điểm $x_0 \in U$ nếu nó có đạo hàm $f'(x_0)$ tại x_0 và nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $r > 0$ sao cho trong hình cầu $\|x - x_0\| \leq r$ hàm $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\ (x - x_0)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz ε, tức là:

$$\|f(x) - f(x') - f'(x_0)(x - x')\| \leq \varepsilon\|x - x'\| \tag{37}$$

với mọi x, x' trong r-lân cận của x_0. Rõ ràng, điều đó cũng có nghĩa

$$\begin{aligned} f(x) - f(x') - f'(x_0)(x - x') &= \|x - x'\|.\varphi(x, x'), \\ \text{với } \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x'\to x_0}} \|\varphi(x, x')\| &= 0. \end{aligned}$$

Bổ đề 4. *Nếu ánh xạ $f : U \to Y$ khả vi trong U và đạo hàm $f'(x)$ liên tục tại x_0 (nghĩa là ánh xạ $f' : U \to L(X, Y)$ liên tục tại x_0) thì f khả vi chặt tại x_0.*

Thật vậy, ánh xạ $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x - x_0)$ khả vi, với $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Theo giả thiết $\lim_{x\to x_0} \|g'(x)\| = 0$, cho nên với $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $r > 0$ sao cho $\|g'(x)\| \leq \varepsilon$ với mọi x nghiệm đúng $\|x - x_0\| \leq r$. Áp dụng công thức (34) ta được (37) với mọi x, x' trong r-lân cận của x_0. □

Ta nói ánh xạ $f : U \to Y$ *khả vi liên tục* (hay thuộc lớp C_1) trong U nếu nó khả vi trong U và ánh xạ $f' : U \to L(X, Y)$ liên tục trên toàn U. Theo bổ đề trên: *nếu $f : U \to Y$ khả vi liên tục trong U thì nó khả vi chặt tại mọi điểm của U.*

3.2. ĐẠO HÀM RIÊNG. Cho ba không gian định chuẩn X, Y, Z và một ánh xạ f từ một tập mở $U \subset X \times Y$ vào Z. Khi ta cố định $y_0 \in Y$ và cho x chạy thì ánh xạ f cảm sinh một toán tử

$$f^{(y_0)}(x) = f(x, y_0)$$

nó là một ánh xạ từ tập $U^{(y_0)} = \{x : (x, y_0) \in U\}$ (một lát cắt của U) vào Z. Cũng tương tự, có thể xét toán tử $f^{(x_0)} : U^{(x_0)} \to Z$.

Nếu $x_0 \in X$ là một điểm trong của $U^{(y_0)}$ thì đạo hàm của $f^{(y_0)}(x)$ tại x_0 gọi là *đạo hàm riêng theo* x của toán tử f tại (x_0, y_0) và được ký hiệu $f'_x(x_0, y_0)$ hoặc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Cũng như thế, ta định nghĩa *đạo hàm riêng theo* y : $f'_y(x_0, y_0)$. Đương nhiên:

$$f'_x(x_0, y_0) : X \to Z, \quad f'_y(x_0, y_0) : Y \to Z.$$

Nếu f có đạo hàm $f'(x_0, y_0)$ tại $(x_0, y_0) \in U$ thì dễ thấy rằng $f'_x(x_0, y_0).h = f'(x_0, y_0).(h, 0)$, $f'_y(x_0, y_0).k = f'(x_0, y_0).(0, k)$ và vì $(h, k) = (h, 0) + (0, k)$, mà f' là tuyến tính, nên

$$f'(x_0, y_0).(h, k) = f'_x(x_0, y_0).h + f'_y(x_0, y_0).k$$

Từ đó dễ dàng suy ra:

Bổ đề 5. *Nếu ánh xạ f khả vi tại mọi điểm của U, thì đạo hàm $f'(x, y)$ liên tục theo (x, y) (tức là ánh xạ $f' : U \to L(X \times Y, Z)$ liên tục) khi và chỉ khi các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ liên tục (tức là các ánh xạ $f'_x : U \to L(X, Z)$ và $f'_y : U \to L(Y, Z)$ liên tục).*

Cần chú ý rằng: sự tồn tại các đạo hàm riêng không kéo theo sự tồn tại của đạo hàm toàn phần. Tuy nhiên:

Bổ đề 6. *Nếu các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ tồn tại ở mọi điểm $(x, y) \in U$ và các ánh xạ $f'_x : U \to L(X, Z)$, $f'_y : U \to L(Y, Z)$ liên tục tại điểm (x_0, y_0) thì ánh xạ f khả vi tại (x_0, y_0).*

Chứng minh. Cho $h \in X$, $k \in Y$, đủ nhỏ để $(x_0 + h,\ y_0 + k) \in U$. Ta có

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Áp dụng công thức (35) cho ánh xạ $y \mapsto f(x_0 + h, y)$ với $L = f'_y(x_0, y_0)$ ta được

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) = f'_y(x_0, y_0).k + \beta\|k\|,$$

với

$$\beta = \sup_{0<\theta<1} \|f'_y(x_0 + h, y_0 + \theta k) - f'_y(x_0, y_0)\|.$$

Khi $(h, k) \to 0$ thì do f'_y liên tục tại (x_0, y_0) nên biểu thức vừa rồi dần tới 0. Mặt khác, theo định nghĩa đạo hàm:

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).h + \alpha\|h\|,$$

với $\alpha \to 0$ khi $h \to 0$. Thành thử

$$\begin{aligned} &f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \\ &= (f'_x(x_0, y_0).h + f'_y(x_0, y_0).k) + (\alpha\|h\| + \beta\|k\|), \end{aligned}$$

trong đó α và β dần tới 0 khi $(h, k) \to 0$. Đẳng thức này chứng tỏ $f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k$ là đạo hàm của $f(x, y)$ tại (x_0, y_0), vì rằng

$$\begin{aligned} \| \alpha\|h\| + \beta\|k\| \| &\leq (|\alpha| + |\beta|)(\|h\| + \|k\|) = \\ &= (|\alpha| + |\beta|).\|(h, k)\|, \end{aligned}$$

và $$|\alpha| + |\beta| \to 0 \text{ khi } (h, k) \to 0.$$ □

Chú ý. Nếu trong Bổ đề 6 giả thiết thêm rằng các ánh xạ $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ liên tục tại mọi điểm $(x, y) \in U$ thì ánh xạ f khả vi tại mọi điểm $(x, y) \in U$ và theo Bổ đề 5 đạo hàm $f'(x, y)$ liên tục theo (x, y); nói cách khác, với các giả thiết ấy f *khả vi liên tục* trong toàn U.

3.3. ÁNH XẠ ĐA TRỊ CO. Cho V, X là hai tập bất kỳ. Ta ký hiệu 2^X họ tất cả các tập con của X (kể cả tập rỗng và bản thân X). Một ánh xạ $P : V \to 2^X$ được gọi là một *ánh xạ đa trị* (hay ánh xạ điểm-tập) từ V vào X. Như vậy, với mỗi $v \in V$, ánh xạ đa trị P cho tương ứng một tập $P(v) \subset X$. Nếu P là một ánh xạ đa trị từ V vào X thì một điểm $x \in V$ sao cho $x \in P(x)$ gọi là một *điểm bất động* của P. Sau đây sẽ chứng minh một số định lý điểm bất động cho ánh xạ đa trị trong không gian metric đủ (X, ρ), có thể xem như khái quát nguyên lý ánh xạ co Banach đã nói tới ở Chương 2.

Ta nói một hàm số $f : X \to [-\infty, +\infty]$ là *nửa liên tục dưới* nếu với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ tập $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ bao giờ cũng đóng.

Định lý 13. (Caristi) *Cho $P : X \to 2^X$ là một ánh xạ đa trị từ một không gian metric đủ (X, ρ) vào chính nó, và $f : X \to [0, +\infty]$ là một hàm số nửa liên tục dưới, $\not\equiv +\infty$. Nếu*

$$(\forall x \in X)\ (\exists y \in P(x)) \qquad \rho(x, y) \leq f(x) - f(y) \tag{38}$$

thì P có một điểm bất động.

Chứng minh. Với mỗi x ta định nghĩa tập $A(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq f(x) - f(y)\}$. Khi x cố định thì $f(y) + \rho(x, y)$ là hàm nửa liên tục dưới theo y, cho nên $A(x)$ là tập đóng. Hiển nhiên $x \in A(x)$ và cũng dễ thấy nếu $y \in A(x)$ thì $A(y) \subset A(x)$, vì khi ấy với mỗi $z \in A(y)$ ta có $\rho(y, z) \leq f(y) - f(z)$ cho nên $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \leq f(x) - f(y) + f(y) - f(z) = f(x) - f(z)$ chứng tỏ $z \in A(x)$. Đặt

$$v(x) = \inf_{y \in A(x)} f(y)$$

ta có thể viết

$$(\forall y \in A(x)) \quad \rho(x, y) \leq f(x) - v(x)$$

từ đó suy ra với mọi cặp $y, z \in A(x)$: $\rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(x, z) \leq 2(f(x) - v(x))$. Thành thử nếu ký hiệu đường kính của một tập A là $\operatorname{diam} A = \sup\{\rho(y, z) : y \in A, z \in A\}$ thì

$$\operatorname{diam} A(x) \leq 2(f(x) - v(x)). \tag{39}$$

Bây giờ ta xây dựng một dãy $\{x_n\}$ như sau. Lấy $x_0 \in X$ tuỳ ý, sau đó $x_1 \in A(x_0)$ sao cho $f(x_1) \leq v(x_0) + 1/2, \ldots, x_{n+1} \in A(x_n)$ sao cho $f(x_{n+1}) \leq v(x_n) + \frac{1}{2^n}, \ldots$. Khi ấy, do $A(x_{n+1}) \subset A(x_n)$ nên $v(x_n) \leq v(x_{n+1})$ và suy ra

$$f(x_{n+1}) \leq v(x_n) + \frac{1}{2^n} \leq v(x_{n+1}) + \frac{1}{2^n}.$$

Vậy $0 \leq f(x_n) - v(x_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$ khi $n \to +\infty$. Do đó theo (39) $\operatorname{diam} A(x_n) \to 0$ $(n \to +\infty)$. Mà $x_{n+k} \in A(x_{n+k-1}) \subset A(x_{n-1})$, cho nên $\rho(x_{n+k}, x_n) \leq \operatorname{diam} A(x_{n-1}) \to 0$ khi $n \to +\infty$, chứng tỏ $\{x_n\}$ là dãy cơ bản trong không gian metric đủ X, cho nên $x_n \to \bar{x} \in X$. Do $x_n \in A(x_m)$ với $m < n$ nên cho $n \to +\infty$ ta được $\bar{x} \in A(x_m)$

với mọi m, có nghĩa là $\bar{x} \in \cap_{n=0}^{\infty} A(x_n)$ rồi vì $\text{diam} A(x_n) \to 0$ nên $\{\bar{x}\} = \cap_{n=0}^{\infty} A(x_n)$. Với mọi n ta có $x^* \in A(x_n)$ nên $A(x^*) \subset A(x_n)$, thành thử $A(x^*) \subset \cap_{n=0}^{\infty} A(x_n) = \{x^*\}$ và do đó $A(x^*) = \{x^*\}$. Nhưng theo (38) phải có một $y \in P(x^*)$ sao cho $y \in A(x^*)$. Vậy $y = x^*$, có nghĩa $x^* \in P(x^*)$. □

Chú ý. Nếu hình dung $P(x)$ là tập các điểm mà từ x có thể di chuyển tới được, và $f(x)$ là một hàm thế năng mà ta muốn tìm giá trị thấp nhất, thì giả thiết (38) có nghĩa là: từ bất cứ vị trí x nào cũng có thể chuyển tới một vị trí y ứng với một thế năng giảm đi ít nhất một lượng bằng số đo khoảng cách từ x đến y. Khi ấy, tập $A(x)$ xây dựng trong chứng minh trên bao gồm các vị trí y thấp hơn x mà có thể chuyển đến được từ x ("thấp hơn" theo nghĩa $f(y) < f(x) - \rho(x, y)$).

Thật ra, chứng minh trên không chỉ xác nhận sự tồn tại một điểm $x^* \in P(x^*)$, mà còn cho thấy thêm rằng: $(\forall x \neq x^*) \quad f(x^*) < f(x) + \rho(x^*, x)$, vì nếu có $x \in X$ thoả mãn $\rho(x^*, x) \leq f(x^*) - f(x)$ thì $x \in A(x^*)$, mà như trên vừa thấy, $A(x^*) = \{x^*\}$, cho nên chỉ có thể $x = x^*$. Thành thử, từ x^* không còn có thể di chuyển để hạ thấp thế năng hơn nữa.

Ta biết rằng nếu X không compac thì một hàm nửa liên tục dưới $f(x)$ có thể không có điểm cực tiểu trên X, nghĩa là không có điểm $\bar{x}$ nào với tính chất $(\forall y)\ f(y) \geq f(\bar{x})$. Định lý Caristi cho thấy tuy vậy vẫn có một điểm x^* xấp xỉ cực tiểu theo nghĩa : mọi điểm $x \neq x^*$ đều có $f(x) > f(x^*) + \rho(x, x^*)$. Điều đó được khẳng định tường minh hơn trong định lý sau đây.

Hệ quả. (nguyên lý ε-biến phân Ekeland) *Trong một không gian metric đủ X, cho một hàm nửa liên tục dưới $f : X \to [0, +\infty]$, một điểm $u \in X$ với $f(u) < +\infty$, và một số $\varepsilon > 0$. Bao giờ cũng có một $x^* \in X$ sao cho*

$$(\forall x \neq x^*) \quad f(x^*) < f(x) + \varepsilon\rho(x, x^*), \tag{40}$$

$$\rho(x^*, u) \leq [f(u) - f(x^*)]/\varepsilon. \tag{41}$$

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh cho $\varepsilon = 1$, vì không gian X với metric $\rho(x, y)/\varepsilon$ cũng là không gian matric đủ. Đặt $P(x) = \{y \in X : \rho(y, x) \leq f(x) - f(y)\}$. Nếu mệnh đề không đúng, tức là không có điểm x^* nào thoả mãn (40)(41) thì ta có (38), cho nên theo định lý trước, phải có một điểm $x^* \in P(x^*)$. Như vậy x^* thoả mãn (41), và

theo nhận xét ở trên, x^* cũng chính là điểm có tính chất (40): mâu thuẫn. □

Thật ra không chỉ Định lý Ekeland là hệ quả của Định lý Caristi, mà ngược lại cũng đúng, thành thử đó là hai định lý tương đương.

Chú ý. Hai tính chất (40) (41) hạn chế lẫn nhau theo nghĩa: ε càng nhỏ thì tính chất (40) của x^* càng sát với tính chất một điểm cực tiểu, nhưng tính chất (41) cho thấy $[f(u) - f(x^*)]/\varepsilon$, tức là cận trên khoảng cách từ x^* đến u càng lớn.

Bây giờ ta chứng minh một định lý bất động cho ánh xạ co đa trị.

Cho một tập con A của một không gian metric (X, ρ). Theo định nghĩa trước đây (Chương 2, mục 7.3) : $\rho(x, A) = \inf_{y\in A} \rho(x, y)$, và với mọi $\delta > 0$:

$$A_\delta := \{x \in X : \ \rho(x, A) \le \delta\}.$$

Nếu A, B là hai tập trong X thì khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A, B là số

$$d(A, B) = \inf\{\delta > 0 : \ A \subset B_\delta, \ B \subset A_\delta\}.$$

Từ định nghĩa này có thể suy ra ngay : nếu $d(A, B) \le \delta$ thì $\rho(x, B) \le \delta$ với mọi $x \in A$ (do $A \subset B_\delta$), và $\rho(y, A) \le \delta$ với mọi $y \in B$ (do $B \subset A_\delta$).

Một ánh xạ đa trị P từ một tập $V \subset X$ vào chính X gọi là *co* nếu có một số θ, $0 < \theta < 1$, sao cho

$$(\forall x, x' \in V) \quad d(P(x), P(x')) \le \theta\rho(x, x').$$

Bổ đề 7. *Nếu $P : V \to 2^X$ là ánh xạ co thì $f(x) = \rho(x, P(x))$ là hàm nửa liên tục dưới trên V.*

Chứng minh. Ta phải chứng minh rằng nếu $\rho(x_k, P(x_k)) \le \alpha$ mà $\rho(x_k, x_0) \to 0$. thì $\rho(x_0, P(x_0)) \le \alpha$. Theo định nghĩa $\rho(x_k, P(x_k))$ ta có thể chọn $y_k \in P(x_k)$ để cho $\rho(x_k, y_k) \le \rho(x_k, P(x_k)) + 1/k$. Khi ấy do $y_k \in P(x_k)$ nên $\rho(y_k, P(x_0) \le d(P(x_k), P(x_0)) \le \theta\rho(x_k, x_0)$ và vì vậy

$$\begin{aligned}\rho(x_0, P(x_0)) &\le \rho(x_0, x_k) + \rho(x_k, y_k) + \rho(y_k, P(x_0)) \\ &\le \rho(x_0, x_k) + \rho(x_k, P(x_k)) + 1/k + \theta\rho(x_k, x_0) \\ &\le \rho(x_0, x_k) + \alpha + 1/k + \theta\rho(x_k, x_0) \to \alpha,\end{aligned}$$

khi $k \to +\infty$. Do đó $\rho(x_0, P(x_0)) \leq \alpha$. □

Định lý sau đây mở rộng nguyên lý Banach (Định lý 12, Chương 2) cho các ánh xạ đa trị co.

Định lý 14. (Nadler) *Trong một không gian metric đủ X cho một điểm $a \in X$ và một ánh xạ đa trị $P : X \to 2^X_*$ sao cho với mỗi $x \in X$ tập $P(x)$ đóng và không rỗng. Nếu có một số θ, $0 < \theta < 1$, để cho*

$$(\forall x, x' \in V) \qquad d(P(x), P(x')) \leq \theta\rho(x, x') \tag{42}$$

thì với mỗi $\alpha \in (\theta, 1)$ tồn tại một điểm $x^* \in P(x^*)$ mà $\rho(x^*, a) \leq \frac{\rho(a, P(a))}{(\alpha - \theta)}$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 7, hàm số $f(x) = \rho(x, P(x))$ nửa liên tục dưới. Do đó $E = \{x \in X : (\alpha - \theta)\rho(x, a) \leq f(a) - f(x)\}$ là một tập con đóng của X ($E \neq \emptyset$ vì ít ra $a \in E$) và bản thân E, với metric $(\alpha - \theta)\rho$, cũng là một không gian metric đủ. Ta chứng minh rằng

$$(\forall x \in E)(\exists y \in P(x) \cap E) \quad (\alpha - \theta)\rho(x, y) \leq f(x) - f(y). \tag{43}$$

Thật vậy, cho $x \in X$. Do $\alpha < 1$ nên theo định nghĩa của $\rho(x, P(x))$ phải có $y \in P(x)$ để cho

$$\alpha\rho(x, y) \leq \rho(x, P(x)). \tag{44}$$

Mặt khác vì $y \in P(x)$ nên theo giả thiết 1):

$$\rho(y, P(y)) \leq d(P(x), P(y)) \leq \theta\rho(x, y). \tag{45}$$

Cộng từng vế (44) và (45) :

$$\alpha\rho(x, y) + \rho(y, P(y)) \leq \rho(x, P(x)) + \theta\rho(x, y),$$

từ đó suy ra

$$(\alpha - \theta)\rho(x, y) \leq f(x) - f(y).$$

Sau cùng, vì $x \in E$ tức là $(\alpha - \theta)\rho(x, a) \leq f(a) - f(x)$, cho nên $(\alpha - \theta)\rho(y, a) \leq (\alpha - \theta)[\rho(x, y) + \rho(x, a)] \leq f(x) - f(y) + f(a) - f(x) = f(a) - f(y)$, chứng tỏ $y \in E$. Vậy ta có (42), nghĩa là các giả thiết của Định lý Caristi được thoả mãn cho không gian E, ánh xạ $P(x) \cap E$ và hàm $f(x) = \rho(x, P(x))$. Do đó, theo Định lý Caristi, phải có một điểm

$x^* \in P(x^*) \cap E$, tức là $x^* \in P(x^*)$ và $\rho(x^*, a) \leq \frac{f(a)-f(x^*)}{\alpha-\theta} = \frac{f(a)}{\alpha-\theta}$ (vì $f(x^*) = 0$ do $x^* \in P(x^*)$). □

Chú ý. Nếu ánh xạ P chỉ xác định trong một hình cầu đóng $V \subset X$, tâm a, bán kính r, thì với mọi $x \in V$ và $y \in P(x)$ ta có $\rho(y, a) \leq d(P(x), P(a)) \leq \theta\rho(x, a) \leq \theta r < r$, tức là $y \in V$, cho nên, đặt $E = \{x \in V : (\alpha - \theta)\rho(x, y) \leq f(a) - f(x)\})$, ta vẫn có (43), do đó định lý vẫn đúng. Nếu lại có thêm giả thiết $\rho(a, P(a) \leq (1 - \theta)r$ thì có thể khẳng định thêm: $\rho(x^*, a) \leq \frac{1-\theta}{\alpha-\theta}r$.

3.4. ĐỊNH LÝ ÁNH XẠ NGƯỢC ĐỊA PHƯƠNG. Trở lại hai không gian định chuẩn X, Y và một tập mở U trong X, cùng với một ánh xạ $f : U \to Y$. Nhắc lại rằng f được gọi là *mở tại* điểm $a \in U$ nếu nó biến mọi lân cận của a thành lân cận của $f(a)$; nói riêng, có một lân cận mở V của a và một lân cận mở W của $f(a)$ sao cho với mọi $y \in W$ phương trình

$$f(x) = y \tag{46}$$

có ít nhất một nghiệm $x \in V$. Ta nói f là một *đồng phôi địa phương* tại $a \in U$ nếu có một lân cận mở V của a và một lân cận mở W của $f(a)$ sao cho f ánh xạ đồng phôi V lên W, nghĩa là với mọi $y \in W$ phương trình (46) có một nghiệm duy nhất $x = g(y) \in V$ và ánh xạ f và $g = f^{-1}$ liên tục. Nếu thêm vào đó f khả vi liên tục trong V và $g = f^{-1}$ khả vi liên tục trên W thì ta nói f là một *vi phôi (hay C_1 đẳng cấu) địa phương* tại a.

Định lý 15. *Cho hai không gian Banach X, Y, một tập mở U trong X, và một ánh xạ $f : U \to Y$. Nếu f khả vi chặt tại điểm $x_0 \in U$ và đạo hàm $f'(x_0)$ là toàn ánh từ X lên Y thì f mở tại mọi điểm trong một lân cận mở $\Omega \subset U$ của x_0; cụ thể hơn: tồn tại một số $\eta > 0$ sao cho với mọi $a \in \Omega$ và mọi r-lân cận $V \subset \Omega$ của a, tập $f(V)$ bao hàm một (ηr)-lân cận của $f(a)$.*

Nếu thêm vào các giả thiết trên, $f'(x_0) \in \text{Isom}\,(X, Y)$ thì f là một đồng phôi địa phương tại x_0; nếu thêm nữa, f khả vi liên tục trong một lân cận của x_0 thì f là một vi phôi địa phương tại x_0.

Chứng minh. 1) Giả sử $f'(x_0) = \varphi$ là một toàn ánh. Theo Định lý 10, tồn tại một số $\gamma > 0$ để cho: với mọi $v \in Y$ có thể tìm được một $u \in X$ nghiệm đúng $\varphi(u) = v$ và $\gamma\|u\| \leq \|v\|$. Ta hãy chọn ε sao cho $0 < \varepsilon < \gamma$, và đặt $\theta = \varepsilon/\gamma$ (như vậy $0 < \theta < 1$). Theo giả thiết f khả

vi chặt tại x_0 nên phải có một lân cận mở Ω của x_0 để cho

$$\|f(x) - f(x') - \varphi(x - x')\| \leq \varepsilon\|x - x'\| \tag{47}$$

với mọi $x, x' \in \Omega$.

Cho V là một hình cầu đóng bất kỳ, tâm a, bán kính $r > 0$, nằm trong Ω, và cho W là hình cầu mở trong Y, tâm $f(a) = b$ và bán kính $(1 - \theta)r$. Ta sẽ chỉ ra rằng $W \subset f(V)$: khi ấy kết luận thứ nhất của định lý sẽ được chứng minh (với $\eta = 1 - \theta$).

Muốn thế ta lấy một y bất kỳ trong W (tức là $\|y - b\| < (1 - \theta)r$) và chứng minh sự tồn tại một x nghiệm đúng $f(x) = y$ và

$$\|x - a\| \leq \frac{\|y - b\|}{1 - \theta}.$$

Dĩ nhiên điều này sẽ kéo theo $\|x - a\| \leq r$, tức là $x \in V$, và như thế $W \subset f(V)$.

Với mỗi $x \in V$ ta đặt

$$P(x) = \{z \in X : \varphi(z) = y + \varphi(x) - f(x)\}.$$

Vì $\varphi : X \to Y$ liên tục và là toàn ánh nên $P(x)$ là tập đóng, không rỗng. Và lại cũng dễ thấy rằng $h(x) = \inf\{\|x - z\| : z \in P(x)\}$ là hàm số nửa liên tục dưới. Ta chọn $\alpha \in (\theta, 1)$ sao cho $\alpha - \theta > \frac{1-\theta}{\gamma}$. Vì $0 < \alpha < 1$ nên với mỗi $x \in V$ phải có một $z \in P(x)$ sao cho

$$\alpha\|x - z\| \leq h(x). \tag{48}$$

Nhưng theo tính chất của γ, ứng với $v = f(x) - f(z) - \varphi(x - z) \in Y$ bao giờ cũng có $u \in X$ sao cho $\varphi(u) = v$ và $\gamma\|u\| \leq \|v\| \leq \varepsilon\|x - z\|$ (xem (47)). Đặt $z' = z + u$ ta có $\|z - z'\| = \|u\| \leq \frac{\varepsilon}{\gamma}\|x - z\| = \theta\|x - z\|$, đồng thời $\varphi(z') = \varphi(z) + \varphi(u) = \varphi(z) + v = [y + \varphi(x) - f(x)] + [f(x) - f(z) - \varphi(x - z)] = y + \varphi(z) - f(z)$, chứng tỏ $z' \in P(z)$. Vậy

$$h(z) = \inf\{\|z - z'\| : z' \in P(z)\} \leq \|z - z'\| \leq \theta\|x - z\|.$$

Kết hợp với (48) ta thấy rằng với mỗi $x \in V$ có một $z \in P(x)$ để cho

$$(\alpha - \theta)\|x - z\| \leq h(x) - h(z)$$

Dĩ nhiên V là không gian metric đủ, với metric $\rho(x,z) = (\alpha-\theta)\|x-z\|$, cho nên theo Định lý Caristi (Định lý 13) phải có một $x \in P(x)$ nghiệm đúng :

$$(\alpha - \theta)\|x - a\| \leq h(u) - h(x)$$

Mà $h(x) = 0$ do $x \in P(x)$, và $P(a)$ gồm tất cả các z sao cho $\varphi(z) = y + \varphi(a) - f(a)$ hay $\varphi(z-a) = y - b$, do đó $h(a) = \rho(a, P(a)) = \inf\{\|z\| : \varphi(z) = y - b\} \leq \frac{1}{\gamma}\|y - b\|$ (nhớ rằng theo tính chất của γ, ứng với $(y-b) \in Y$ có thể tìm được $z \in X$ sao cho $\varphi(z) = y - b$ và $\|z\| \leq \frac{1}{\gamma}\|y - b\|$). Thành thử có một $x \in P(x)$, tức là $f(x) = y$ sao cho $\|x - a\| \leq \frac{h(u)}{\alpha-\theta} \leq \frac{\|y-b\|}{\gamma(\alpha-\theta)}$, và phần thứ nhất của định lý đã được xác lập.

2) Bây giờ giả sử $\varphi = f'(x_0) \in \text{Isom}\,(X,Y)$. Khi ấy với mỗi $y \in Y$ có một x duy nhất nghiệm đúng $\varphi(x) = y$ và theo tính chất của γ:

$$(\forall x \in X) \quad \gamma\|x\| \leq \|\varphi(x)\|, \tag{49}$$

cho nên từ (47) ta suy ra

$$\|f(x) - f(x')\| \geq \|\varphi(x - x')\| - \varepsilon\|x - x'\| \geq (\gamma - \varepsilon)\|x - x'\|, \tag{50}$$

chứng tỏ $x \neq x'$ kéo theo $f(x) \neq f(x')$. Vậy f ánh xạ 1-1 hình cầu mở V tâm a, bán kính r, lên $f(V)$. Nhưng ở trên đã thấy rằng f mở tại mọi điểm của V, cho nên nó phải biến V thành tập mở $W = f(V)$, và ánh xạ ngược $g = f^{-1} : W \to V$ phải liên tục, tức là f ánh xạ đồng phôi V lên W.

Ta có

$$\varphi(x - x') - \varphi^{-1}(f(x) - f(x')) = \varphi(x - x') - [f(x) - f(x')]$$

nên theo (49) và (47), (50):

$$\begin{aligned}\gamma\|\varphi(x - x') - \varphi^{-1}(f(x) - f(x'))\| &\leq \|f(x) - f(x') - \varphi(x - x')\| \\ &\leq \varepsilon\|x - x'\| \leq \frac{\varepsilon}{\gamma - \varepsilon}\|f(x) - f(x')\|,\end{aligned}$$

từ đó, lấy $x' = a$, $f(x') = b$ ta được

$$\|g(y) - g(b) - \varphi^{-1}(y - b)\| \leq \frac{\varepsilon}{\gamma(\gamma - \varepsilon)}\|y - b\|. \qquad (51)$$

Tóm lại, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước ta đã tìm được một lân cận W của b để có (51) với mọi $y \in W$. Điều đó chứng tỏ φ^{-1} là đạo hàm của g tại b:

$$g'(b) = [f'(g(b))]^{-1}. \qquad (52)$$

3) Cuối cùng, giả thiết thêm rằng f khả vi liên tục trong một lân cận của a. Đương nhiên, ta có thể coi như V đã được chọn đủ nhỏ để nằm hẳn trong lân cận ấy và với mọi $u \in V$ ta có $\|f'(u) - \varphi\| \leq \varepsilon$. Do (49) ta có, theo Định lý 6, Chương 5, $\|\varphi^{-1}\| \leq \frac{1}{\gamma}$ nên $\varepsilon < \gamma \leq \frac{1}{\|\varphi^{-1}\|}$ và do đó theo Định lý 7, Chương 5, mọi $f'(u)$, với $u \in V$, đều là đẳng cấu. Khi ấy, áp dụng điều đã chứng minh được, ta thấy rằng g khả vi tại mọi $y \in W$ và có đạo hàm bằng

$$g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}.$$

Vì g liên tục theo y, $f'(x)$ liên tục theo x nên công thức này chứng tỏ $g'(y)$ liên tục theo y.

Đến đây chứng minh định lý đã hoàn tất. □

Chú ý. Thật ra ta đã chứng minh được một sự kiện mạnh hơn hai phần đầu của định lý, cụ thể là:

Giả sử đối với một ánh xạ $f : U \to Y$ có một ánh xạ tuyến tính liên tục $\varphi : X \to Y$, cùng một hằng số $\gamma > 0$ sao cho $(\forall v \in Y)$ $(\exists u \in X)$ $\varphi(u) = v$, $\gamma\|u\| \leq \|v\|$; và giả sử có một số dương $\varepsilon < \gamma$ để cho ta có (47) với mọi x, x' trong một r-lân cận V của $a \in U$. Khi ấy tồn tại hằng số $\eta > 0$ $(\eta = \frac{1}{2}(\gamma - \varepsilon))$ sao cho với mọi $a' \in V$ và mọi $y \in Y$ thuộc $\eta r'$-lân cận của $f(a')$ $(r' = r - \|a' - a\|)$, đều tìm được $x \in V$ nghiệm đúng $f(x) = y$ và $\|x - a'\| = \frac{1}{\eta}\|y - f(a')\|$. Nếu ngoài ra giả thiết thêm $\varphi \in \text{Isom}\,(X, Y)$ thì phần tử x đó là duy nhất.

3.5. ĐỊNH LÝ HÀM ẨN. Dựa vào các kết quả trên bây giờ ta có thể giải đáp vấn đề đặt ra ở đầu tiết này về điều kiện tồn tại hàm ẩn.

Định lý 16. *Cho ba không gian Banach X, Y, Z), một tập mở U trong $X \times Y$, và một ánh xạ $f : U \to Z$ liên tục tại một điểm $(a, b) \in U$ và thỏa mãn các điều kiện sau:*

1) $f(a, b) = 0$

2) Đạo hàm riêng f'_y *tồn tại trong* U *và liên tục tại* (a, b).

3) $f'_y(a, b) \in \text{Isom}\,(Y, Z)$.

Khi ấy tồn tại một lân cận mở V_1 của a trong X, một lân cận mở V_2 của b trong Y sao cho $V_1 \times V_2 \subset U$, và một ánh xạ $g : V_1 \to V_2$ liên tục tại a sao cho với mọi $(x, y) \in V_1 \times V_2$:

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x). \tag{53}$$

Chứng minh. Ta ký hiệu $\varphi = f'_y(a, b)$, $\gamma = \dfrac{1}{\|\varphi^{-1}\|}$, và lấy một số dương $\varepsilon < \gamma$. Theo giả thiết 2) có thể tìm được một lân cận mở V_1 của a trong X và một lân cận mở V_2 của b trong Y sao cho $V_1 \times V_2 \subset U$ và

$$\forall (x, y) \in V_1 \times V_2 \qquad \|f'_y(x, y) - \varphi\| < \varepsilon. \tag{54}$$

Có thể coi như V_2 là hình cầu tâm b, bán kính r, và do giả thiết 1) và sự liên tục của f tại (a, b) cũng có thể coi như V_1 đã lấy đủ nhỏ để

$$\forall x \in V_1 \qquad \|f(x, b)\| < \eta r, \tag{55}$$

trong đó $\eta = \frac{1}{2}(\gamma - \varepsilon)$. Cho $x \in V_1$. Đặt $F(y) = f(x, y) : V_2 \to Z$ và áp dụng công thức (35), ta có với mọi $(y, y') \in V_2$:

$$\|F(y) - F(y') - \varphi(y - y')\| \leq$$
$$\leq \sup_{0<\alpha<1} \|f'_y(x, y + \alpha(y' - y)) - \varphi\| \|y - y'\| \leq \varepsilon \|y - y'\|.$$

Mặt khác, vì $\varphi \in \text{Isom}\,(Y, Z)$ nên với mỗi $z \in Z$ có một $y \in Y$ sao cho $z = \varphi(y)$ và $\|y\| \leq \|\varphi^{-1}\| . \|z\|$ hay $\gamma \|y\| \leq \|z\|$. Vậy theo chú ý cuối mục trước, với mọi $y' \in V_2$ và mọi z trong $\eta r'$-lân cận của $F(y')(r' = r - \|b - b'\|)$, có một $y \in V_2$ duy nhất nghiệm đúng $F(y) = z$ (tức là $f(x, y) = z$) và

$$\|y - y'\| \leq \frac{1}{\eta} \|z - F(y')\| = \frac{1}{\eta} \|z - f(x, y')\|. \tag{56}$$

Lấy $y' = b$ và chú ý rằng theo (55) $z = 0$ thuộc ηr-lân cận của $F(b)$, ta có một $y \in V_2$ hoàn toàn xác định sao cho $f(x, y) = 0$ và

$$\|y - b\| \leq \frac{1}{\eta}\|f(x, b)\|.$$

Đặt $y = g(x)$ thì ánh xạ $g : V_1 \to V_2$ thỏa mãn (53) và bất đẳng thức trên cho thấy rằng khi $x \to a$ thì do $f(x, b) \to f(a, b) = 0$ nên $g(x) \to b$, chứng tỏ g liên tục tại a. □

Định lý 17. *Nếu ngoài các điều kiện nêu trong Định lý 16 ta giả thiết thêm rằng $f : U \to Z$ liên tục thì ánh xạ $g : V_1 \to V_2$ sẽ liên tục. Nếu thêm nữa ta giả thiết rằng đạo hàm riêng f'_x tồn tại trong U và liên tục tại (a, b) thì ánh xạ g khả vi tại a và*

$$g'(a) = [-f'_y(a, b)]^{-1}.f'_x(a, b). \tag{57}$$

Chứng minh. Cho x' bất kỳ trong V_1 và $x \in V_1$ đủ gần x' để $\|f(x, y')\| < \eta r'$ trong đó $y' = g(x')$ và $r' = r - \|b - y'\|$. Khi ấy $z = 0$ thuộc $\eta r'$-lân cận của $F(y') = f(x, y')$, cho nên theo (56) ta có

$$\|g(x) - g(x')\| \leq \frac{1}{\eta}\|f(x, y')\|. \tag{58}$$

Nếu $x \to x'$ thì do tính liên tục của f : $f(x, y') \to f(x', y') = 0$. Vậy g liên tục tại x'.

Để chứng minh phần sau của định lý, ta gọi ψ là toán tử ở vế phải của (57). Đặt $y' = g(a) + \psi(x - a) = b + \psi(x - a)$. Với mọi $x \in V$, đủ gần a ta sẽ có y' đủ gần b, và $|f(x, y')| < \eta r'$, $(r' = r - \|b - y'\|)$, cho nên theo (56)

$$\|g(x) - g(a) - \psi(x - a)\| \leq \frac{1}{\eta}\|f(x, y')\| = \frac{1}{\eta}\|f(x, y') - f(a, b)\|. \tag{59}$$

Nhưng do f'_x và f'_y tồn tại trong U và liên tục tại (a, b) nên f khả vi tại (a, b) và ta có

$$f(x, y') - f(a, b) =$$
$$= f'_x(a, b).(x - a) + f'_y(a, b).(y' - b) + \theta(\|x - a\| + \|y' - b\|).$$

Theo định nghĩa của ψ thì $f'_y(a,b).\psi = -f'_x(a,b)$, vậy $f'_y(a,b).(y'-b)$ $= f'_y(a,b).(\psi(x-a)) = -f'_x(a,b).(x-a)$, do đó $f(x,y') - f(a,b) = o(\|x-a\| + \|y'-b\|)$. Mặt khác, $\|y'-b\| = \|\psi(x-a)\| \le \|\psi\|.\|x-a\|$ cho nên $o(\|x-a\| + \|y'-b\|) = o(\|x-a\|)$, và điều này, theo (59), chứng tỏ $g'(a) = \psi$. □

Chú ý. Do định lý trên, nếu trong Định lý 16 ta thay giả thiết 2) bằng điều kiện: " f khả vi liên tục trong U " thì có thể khẳng định ánh xạ $g : V_1 \to V_2$ khả vi liên tục và tại mỗi $x \in V_1$ ta có

$$g'(x) = [-f'_y(x,y)]^{-1}.f'_x(x,y).$$

Biểu thức này cho thấy khi ấy $g' : V_1 \to L(X,Z)$ là ánh xạ liên tục.

Theo chứng minh Định lý 16 và phần đầu chứng minh Định lý 17, nếu có đủ những giả thiết nêu trong Định lý 16 và ta có (54) và (55), với $\varphi = f'_y(a,b)$, $\varepsilon < \gamma = \frac{1}{\|\varphi^{-1}\|}$, $\eta = \frac{1}{2}(\gamma - \varepsilon)$, $r =$ bán kính hình cầu V_2, thì hàm ẩn $y = g(x)$ được xác định với mọi $x \in V_1$; đồng thời (xem (58)): $\|g(x) - g(x')\| < \frac{1}{\eta}\|f(x,g(x'))\|$ miễn là $\|f(x,g(x')\| < \eta(r - \|b - g(x')\|)$.

3.6. ỨNG DỤNG: PHƯƠNG TIẾP XÚC CỦA MỘT ĐA TẠP. Một ứng dụng của những kết quả trên có ý nghĩa quan trọng trong tính biến phân và lý thuyết cực trị là như sau.

Cho một tập M trong một không gian Banach X và một điểm $a \in M$. Ta nói một vectơ $h \in X$ là một *phương tiếp xúc* của tập M tại a nếu có một dãy điểm $x_\varepsilon \in M$ sao cho $x_\varepsilon = a + \varepsilon h + o(\varepsilon)$, với $\varepsilon \downarrow 0$ và $\frac{\|o(\varepsilon)\|}{\varepsilon} \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$. Đại thể điều đó có nghĩa là gần sát tuỳ ý a và theo phương gần sát tuỳ ý h đều có những điểm của M. Ta cũng có $\frac{1}{\varepsilon}(x_\varepsilon - a) \to h$ khi $\varepsilon \downarrow 0$. Như vậy, khái niệm này là sự khái quát hoá khái niệm vectơ tiếp xúc của một đường hay một mặt trong không gian thông thường.

Giả sử

$$M = \{x \in U : f(x) = 0\} \tag{60}$$

trong đó f là một ánh xạ liên tục từ một tập mở U trong không gian Banach X vào một không gian Banach Y.

Định lý 18. (Ljusternik) *Cho $a \in U$ và $f(a) = 0$. Nếu f khả vi chặt tại a và đạo hàm $f'(a) : X \to Y$ là toàn ánh thì một vectơ $h \in X$*

là phương tiếp xúc tại a của đa tạp (60) khi và chỉ khi $f'(a).h = 0$.

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên vì nếu h là phương tiếp xúc, tức là có một dãy $x_\varepsilon = a + \varepsilon h + o(\varepsilon)$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ sao cho $f(x_\varepsilon) = 0$ thì ta có

$$0 = \frac{1}{\varepsilon}[f(x_\varepsilon) - f(a)] = f'(a)\Big(h + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

từ đó $f'(a).h = 0$. Để chứng minh điều kiện đủ, giả sử h nghiệm đúng $f'(a).h = 0$. Theo định lý ánh xạ ngược địa phương (Định lý 15) tồn tại một lân cận $V \subset U$ của a và một số $\eta > 0$ sao cho: với mọi $a' \in V$ và mọi r'-lân cận $V' \subset V$ của a, tập $f(V')$ bao hàm một $(\eta r')$-lân cận của $f(a')$. Vì $f(a+\varepsilon h) = f(a)+\varepsilon f'(a).h+o(\varepsilon)$ nên với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, hình cầu tâm $a' = a + \varepsilon h$, bán kính $r' = \frac{1}{\eta}\|f(a + \varepsilon h)\|$, sẽ nằm trọn trong V. Khi ấy, vì $0 \in Y$ thuộc $(\eta r')$-lân cận của $f(a')$ nên có $x_\varepsilon \in V$ để cho $f(x_\varepsilon) = 0$ và $\|x_\varepsilon - (a + \varepsilon h)\| \leq \frac{1}{\eta}\|f(a + \varepsilon h)\|$. Bất đẳng thức này kéo theo $x_\varepsilon = a + \varepsilon h + o(\varepsilon)$, chứng tỏ h quả là một phương tiếp xúc tại a của đa tạp $f(x) = 0$. □

Thành thử với những giả thiết đã nêu trong định lý, tập tất cả các vectơ tiếp xúc với đa tạp $f(x) = 0$ tại điểm a là không gian con của X trùng với $\mathrm{Ker} f'(a)$: ta gọi nó là *không gian tiếp xúc* của đa tạp tại điểm a.

4. NGUYÊN LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG BROUWER VÀ SUY RỘNG

Các định lý ánh xạ co (Định lý 12, Chương 2, tiết 5, và Định lý 14, Chương này, tiết 4) đã phát biểu những nguyên lý điểm bất động đối với một lớp ánh xạ liên tục trong không gian metric đủ. Trong tiết này sẽ trình bày nguyên lý điểm bất động cho lớp ánh xạ liên tục trong các tập lồi compac trong không gian định chuẩn, và trước hết trong $\mathbb{R}^n$. Định lý bất động Brouwer sẽ chứng minh dưới đây là một trong những định lý sâu sắc và nổi tiếng nhất của toán học.

4.1. ĐƠN HÌNH. Trong một không gian định chuẩn X ta xét n điểm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho các vectơ $a_1 - a_n, a_2 - a_n, \ldots, a_{n-1} - a_n$ độc lập tuyến tính (khi ấy ta cũng nói các điểm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là *độc lập affin).*

Bao lồi của tập $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tức là tập S gồm tất cả các phần tử có dạng

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n, \text{ với}$$
$$\lambda_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n), \ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1 \qquad (61)$$

gọi là *đơn hình* $(n-1)$ *chiều* (hay $(n-1)$-*đơn hình*) sinh bởi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ta viết $S = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Các điểm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gọi là các *đỉnh* của đơn hình. Do giả thiết về tính độc lập affin của $a_1, \ldots, a_n$ nên với mỗi $x \in S$ các số $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nghiệm đúng (61) được xác định đơn trị. Thật vậy, vì $\lambda_n = 1 - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$ nên

$$x - a_n = \lambda_1(a_1 - a_n) + \ldots + \lambda_n(a_{n-1} - a_n).$$

mà cách biểu diễn này là duy nhất do các vectơ $a_1 - a_n, \ldots, a_{n-1} - a_n$ độc lập tuyến tính .

Các số $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nghiệm đúng (61) gọi là các *toạ độ trọng tâm* của x trong đơn hình S. Ta ký hiệu $\lambda_i = \lambda_i(x)$ (toạ độ trọng tâm thứ i của x).

Với mỗi $i = 1, \ldots, n$ tập $n-1$ điểm a_j $(j \neq i)$ cũng độc lập affin, và sinh ra một $(n-2)$-đơn hình $F_i \subset S$, gọi là *diện thứ* i của S (đối diện với đỉnh a_i). Rõ ràng F_i cũng chính là tập tất cả các điểm $x \in S$ có $\lambda_i(x) = 0$.

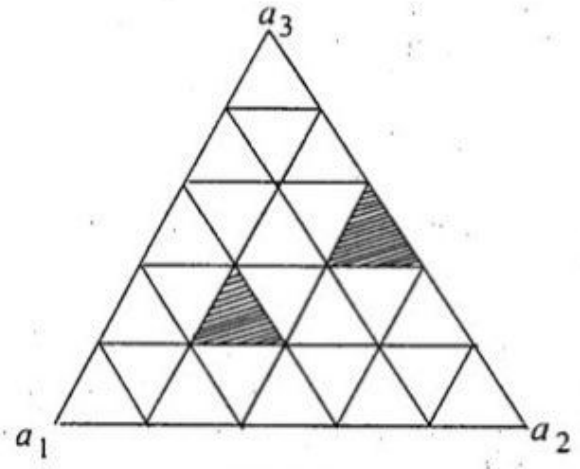
Khi $X = \mathbb{R}^n$ và $a_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$ là vectơ đơn vị thứ i của $\mathbb{R}^n$ thì S gọi là *đơn hình chuẩn* $(n-1)$ chiều. Trong trường hợp này các toạ độ trọng tâm của mỗi điểm $x \in S$ trùng với các toạ độ Descartes của nó trong $\mathbb{R}^n$, tức là nếu $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ mà thuộc S thì $\lambda_i(x) = \xi_i$ (thật vậy, $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$, $\xi_i \geq 0$ và $\xi_1 + \ldots + \xi_n = 1$).

4.2. TAM GIÁC PHÂN. Sau đây ta sẽ xét một đơn hình $S = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, mà để cho tiện ta sẽ giả thiết là đơn hình chuẩn trong $\mathbb{R}^n$ (tức là a^i là vectơ đơn vị thứ i của $\mathbb{R}^n$: $a^i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$). Như thế mỗi điểm $x \in S$ có dạng $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ trong đó $\xi_i = \lambda_i(x)$. Dễ thấy các vectơ $e_i = a_i - a_{i+1}, i = 1, \ldots, n-1$, độc lập tuyến tính và $\|e_i\| = \sqrt{n-1} = \text{diam} S$. Đặt $e_n = a_n - a_1 = -(e_1 + \ldots + e_{n-1})$ và qui ước $a_{n+1} = a_1$ ta có $e_i = a_i - a_{i+1}, i = 1, \ldots, n$, và $e_1 + \ldots, + e_n = 0$.

Cho trước một số tự nhiên m ta ký hiệu Q là tập tất cả những điểm $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in S$ mà mỗi $\xi_i = \lambda_i(x)$ là một bội số của $\varepsilon := 1/m$.

Với mỗi cặp $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in Q$ ta qui ước viết $x < y$ nếu $y = x + \varepsilon e_i$ với một i nào đó, nghĩa là nếu $\eta_i = \xi_i + \varepsilon$, $\eta_{i+1} = \xi_{i+1} - \varepsilon$, và $\eta_j = \xi_j \; \forall j \neq i, i+1$. Khi n điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn $x_1 < x_2, x_2 < x_3, \ldots, x_{n-1} < x_n$, và $x_n < x_1$, nghĩa là $x_{i+1} - x_i = \varepsilon e_{h(i)} (i = 1, \ldots, n-1), x_1 - x_n = \varepsilon e_{h(n)}$ trong đó $(h(1), \ldots, h(n))$ là một hoán vị của $\{1, 2, \ldots, n\}$ thì các điểm $x_1, \ldots, x_n$ là đỉnh của một $(n-1)$-đơn hình có đường kính bằng $\varepsilon\sqrt{n-1}$. Chú ý rằng khi ấy với i bất kỳ ta đều có $x_i < x_{i+1}, \ldots, x_{n-1} < x_n, x_n < x_1, \ldots, x_{i-1} < x_i$. Ta gọi một đơn hình con $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ như thế là một *ô* và tập tất cả các ô đó là một lưới *tam giác phân* của S, ký hiệu $\mathcal{P}$. Hình 16 cho thấy $\mathcal{P}$ khi $n = 3$ và $m = 5$.

Nếu $U = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ là một ô thì mỗi tập con W của U gồm đúng $n-1$ phần tử gọi là một *đáy* của nó. Như vậy một ô có n đáy, đối diện với n đỉnh.



Hình 16

Bổ đề 8. *Cho một ô $U = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ và một đáy W của nó. Nếu W không nằm trong một diện của S thì có vừa đúng một ô $U' \neq U$ nhận W làm đáy, nếu trái lại thì không có ô nào khác U nhận W làm đáy.*

Chứng minh. Giả sử $x_{i+1} - x_i = \varepsilon e_{h(i)}, i = 1, \ldots, n-1, x_1 - x_n = e_{h(n)}$. Đương nhiên W có một trong các dạng sau :

1) $W = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$;
2) $W = \{x_2, \ldots, x_n\}$;
3) $W = \{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$.

Trong trường hợp 1) , nếu $U' = W \cup \{y\}$ là một ô thì $y < x_1, x_1 < x_2, \ldots, x_{n-2} < x_{n-1}, x_{n-1} < y$, cho nên hoặc $y = x_{n-1} + \varepsilon e_{h(n-1)} = x_n$, hoặc $y = x_{n-1} + \varepsilon e_{h(n)}$. Mà $y \neq x_n$ vậy chỉ có thể $y = x_{n-1} + \varepsilon e_{h(n)} = x_{n-1} + x_1 - x_n$, do đó nếu $x_{n-1} + x_1 - x_n \in Q$ thì có một ô duy nhất $U' \neq U$ nhận W làm đáy; nếu trái lại thì không có $U' \neq U$ nhận W làm đáy. Nhưng dễ thấy rằng nếu W nằm trong diện F_i của S thì $\lambda_i(x_1) = \lambda_i(x_{n-1}) = 0$; ngược lại nếu $\lambda_i(x_1) = \lambda_i(x_{n-1}) = 0$ thì phải có $\lambda_i(x_n) = \varepsilon$ do đó $x_n = x_{n-1} + \varepsilon e_i$, nghĩa là $h(n-1) = i$, và điều này lại kéo theo $i \notin \{h(1), \ldots, h(n-2)\}$, mà vì $\lambda_i(x_1) = 0$ nên cũng phải có $\lambda_i(x_2) = \ldots = \lambda_i(x_{n-1}) = 0$, nghĩa là $W \subset F_i$. Vậy $W \subset F_i$ khi và chỉ khi $\lambda_i(x_1) = \lambda_i(x_{n-1}) = 0$, mà $\lambda_i(y) = \lambda_i(x_{n-1}) + \lambda_i(x_1) - \lambda_i(x_n)$ (do $y = x_{n-1} + x_1 - x_n$), cho nên $W \subset F_i$ khi và chỉ khi $\lambda_i(y) = -\lambda_i(x_n) < 0$, tức là khi và chỉ khi $y \notin Q$. Rốt cục, $y = x_{n-1} + \varepsilon e_{h(n)} \notin Q$ khi và chỉ khi W nằm trong một diện.

Trường hợp 2) tương tự trường hợp 1). Trường hợp 3) đưa về trường hợp 1) bằng cách viết lại $W = \{x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}\}$. □

4.3. NGUYÊN LÝ BROUWER. Ta tiếp tục xét đơn hình chuẩn S trong $\mathbb{R}^n$, với các diện là $F_1, \ldots, F_n$.

Định lý 19. (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz) *Nếu $L_1, \ldots, L_n$ là những tập đóng sao cho:*

$$F_i \subset L_i \ (i = 1, \ldots, n), \quad S \subset \cup_{i=1}^n L_i \tag{62}$$

thì chúng phải có một điểm chung trong S.

Chứng minh. Cho m là một số tự nhiên tùy ý, $\varepsilon = 1/m$, và Q là một lưới chia nhỏ S như trên. Ta gán cho mỗi phần tử $x \in S$ một số $l(x) \in \{1, \ldots, n\}$ xác định như sau. Nếu $u_{n-1} = a_n + \varepsilon(a_{n-1} - a_n)$ và $u_i = a_n + \varepsilon(a_i - a_n)$ $(i = 1, \ldots, n-2)$, thì $u_{n-1} \in F_1 \subset L_1$, và $u_i \in F_{i+1} \subset L_{i+1}$ với $i = 1, \ldots, n-2$, cho nên ta đặt $l(u_{n-1}) = 1, l(u_1) = 2, \ldots, l(u_{n-2}) = n-1$. Với mọi $x \in S$ còn lại, dựa vào giả thiết $x \in \cup_{i=1}^n L_i$ ta đặt $l(x) = \min\{i : \ x \in L_i\}$. Như vậy $l(x)$ được xác định với mọi $x \in Q$ và $l(x) = i$ kéo theo $x \in L_i$. Một ô $U = [x_1, \ldots, x_n]$ trong lưới Q gọi là "đầy đủ" nếu $l(U) = \{1, \ldots, n\}$, nghiã là $l(x_i) = i$, $i = 1, \ldots, n$. Trước hết ta chứng minh có một ô đầy đủ U trong lưới Q.

Ta gọi một tập $W \subset Q$ là "tập tốt" nếu W gồm $n-1$ phần tử và $l(W) = \{1, \ldots, n-1\}$. Trước hết, ta nhận xét $W_0 = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$

là một tập tốt, và là tập tốt duy nhất mà các phần tử đều thuộc biên $\partial S = \cup_{i=1}^{n} F_i$ (nghĩa là ngoài W_0 không còn tập tốt nào khác nằm trong ∂S).

Bây giờ để cho gọn lập luận ta đặt $a_n = u_0$ và xét ô $U_0 = [u_1, \ldots, u_{n-1}, u_0]$ nhận W_0 là một đáy tốt. Ta sẽ tìm cách chuyển từ ô U_0 sang một ô U_1, rồi sang một ô U_2, v.v..., sao cho mỗi U_k đều có một đáy tốt, cho đến khi nào được một ô đầy đủ.

Giả sử ta đã có ô $U_k = W_k \cup \{u_k\}$, trong đó W_k là một đáy tốt. Nếu $l(u_k) = n$ thì U_k là ô đầy đủ và ta dừng. Nếu trái lại $l(u_k) \in \{1, \ldots, n-1\}$ thì phải có một phần tử $v_k \in W_k$ sao cho $l(v_k) = l(u_k)$. Khi ấy nếu ký hiệu $W_k(v_k/u_k) := (W_k \setminus \{v_k\}) \cup \{u_k\}$ thì $W_{k+1} = W_k(v_k/u_k)$ cũng là một tập tốt khác W_0 (như sau đây sẽ thấy), cho nên không thể nằm trong một diện của S và theo Bổ đề 8 phải có duy nhất một $u_{k+1} \in Q$ để cho $U_{k+1} = W_{k+1} \cup \{u_{k+1}\}$ là một ô nhận W_{k+1} làm đáy.

Như vậy, xuất phát từ U_0 ta sẽ xây dựng được một dãy ô sao cho ô sau chung với ô trước một đáy tốt. Ta chứng minh các ô trong dãy ấy đều phân biệt nhau. Thật vậy, dĩ nhiên với mọi k, $U_{k+1} \neq U_k$ và chúng có chung đáy W_{k+1}; hơn nữa $U_{k+1} \neq U_{k-1}$ vì đỉnh đối diện với đáy W_{k+1} trong U_k không thuộc U_{k+1} nhưng là một đỉnh của $W_k \subset U_{k-1}$. Sau khi ghi nhớ điều đó, giả sử tất cả các U_k với $k \leq s$ đều phân biệt. Ta xét U_{s+1}. Nếu $U_{s+1} = U_0$ thì như vừa thấy $s > 1$ và ta phải có $W_{s+1} \neq W_0$ vì nếu $W_{s+1} = W_0$ thì hoá ra W_0 vừa chung cho cặp $U_{s+1}(= U_0), U_s$ vừa chung cho cặp U_0, U_1 cho nên $U_s = U_1$, trái với giả thiết. Nhưng như vậy thì W_{s+1} và W_0 là hai đáy tốt phân biệt của U_0, cho nên chỉ có thể $W_{s+1} = W_1$, và lại cũng suy ra $U_s = U_1$, trái với giả thiết. Vậy nếu U_{s+1} trùng với một U_k với $k \leq s$ thì chỉ có thể $1 \leq k \leq s-2$. Khi ấy U_k chung W_k với U_{k-1}, chung W_{k+1} với U_{k+1}, chung W_{s+1} với U_s. Vì ba ô U_{k-1}, U_{k+1}, U_s phân biệt nên W_k, W_{k+1}, W_{s+1} cũng phân biệt: hoá ra U_k có đến 3 đáy tốt: vô lý. Vậy U_{s+1} phân biệt với các $U_0, \ldots, U_s$.

Tóm lại dãy $U_0, U_1, \ldots, U_k, \ldots$ xây dựng như trên gồm toàn những ô phân biệt. Vì số ô hữu hạn nên dãy đó phải kết thúc bằng một ô đầy đủ. Thành thử, cho trước $\varepsilon = 1/m$ bao giờ cũng có một ô đầy đủ $U_\varepsilon = [x_1(\varepsilon), \ldots, x_n(\varepsilon)]$. Do $\mathrm{diam} U_\varepsilon = \varepsilon\sqrt{n-1} \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$ nên phải có một điểm $x^* \in S$ sao cho $x^* = \lim_{\varepsilon \to 0} x_i(\varepsilon)$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Mà $x_i(\varepsilon) \in L_i$, $i = 1, \ldots, n$, vậy $x^* \in \cap_{i=1}^{n} L_i$. □

Chú ý. Định lý trên có thể giải thích trực quan như sau. Giả sử có n người cùng chia nhau một đóng góp nào đó, xem như bằng 1. Mỗi

điểm $x \in S$ biểu thị một phương án trong đó người thứ i đóng góp một phần bằng x_i (nhớ rằng $0 \le x_i \le 1, \sum_{i=1}^n x_i = 1$). Tập đóng L_i là tập các phương án chấp nhận được cho người thứ i. Định lý 19 khẳng định rằng: nếu mọi phương án trong đó người thứ i không phải đóng góp gì đều chấp nhận được cho anh ta ($F_i \subset L_i$), và nếu bất cứ phương án nào cũng chấp nhận được cho ít nhất một người nào đó ($S \subset \cup_{i=1}^n L_i$) thì phải có một phương án chấp nhận được cho mọi người: $x^* \in \cap_{i=1}^n L_i$. Như vậy, ý nghĩa định lý rất tự nhiên mặc dù chứng minh khá phức tạp.

Định lý 20. (Brouwer) *Mọi ánh xạ liên tục $f : S \to S$ từ một đơn hình vào chính nó đều có một điểm bất động $x^* = f(x^*)$.*

Chứng minh. Đặt $L_i = \{x \in S : \ f_i(x) \ge x_i\}$, ta có n tập đóng $L_1, \ldots, L_n$ do $f(x)$ liên tục. Vì $f(x) \in S$ nên với mọi $x \in S : \ f_i(x) \ge 0 \ \forall i$, trong khi đó $F_i = \{x \in S : \ x_i = 0\}$, cho nên $F_i \subset L_i \ \forall i$. Hơn nữa, với mỗi $x \in S$ phải có một i sao cho $f_i(x) \ge x_i$, vì nếu không tức là $f_i(x) < x_i \ \forall i$, thì $1 = \sum_{i=1}^n f_i(x) < \sum_{i=1}^n x_i = 1$, vô lý. Vậy $S \subset \cup_{i=1}^n L_i$. Do đó theo Định lý 19, phải có một $x^* \in \cap_{i=1}^n L_i$. Nói cách khác: $f_i(x^*) \ge x_i^* \ \forall i$, và chú ý rằng $\sum_{i=1}^n f_i(x^*) = \sum_{i=1}^n x_i^*$ ta suy ra $f(x^*) = x^*$. □

Chú ý. Định lý 19 thường được gọi là Bổ đề KKM (Knaster, Kuratowski, Mazurkievicz) vì thường được dùng để suy ra Định lý bất động Brouwer như ta đã làm. Nhưng ngược lại, từ Định lý Brouwer cũng có thể suy ra Bổ đề KKM (Bài tập 15), thành thử hai Định lý 19 và 20 thật ra tương đương nhau.

Định lý Brouwer cũng có nội dung trực quan rất tự nhiên như sau. Giả sử có n doanh nghiệp cạnh tranh nhau trên một thị trường, và mỗi điểm $x \in S$ biểu thị tình thế trong đó doanh nghiệp i chiếm được một thị phần bằng x_i. Do cạnh tranh nên từ một tình thế $x \in S$ có thể dẫn tới tình thế mới $f(x)$. Đương nhiên, doanh nghiệp i mong muốn chuyển đến một tình thế $f(x)$ với $f_i(x) > x_i$. Định lý Brouwer cho biết nếu ánh xạ f liên tục thì bao giờ cũng có một điểm $x^* = f(x^*)$, nghĩa là một tình thế cân bằng mà không doanh nghiệp nào muốn thay đổi để được lợi hơn. Chính với ý nghĩa đó mà Định lý bất động Brouwer (cùng với các mở rộng của nó) là công cụ xây dựng các lý thuyết cân bằng trong kinh tế và nhiều lĩnh vực khác.

4.4. BỔ ĐỀ PHÂN HOẠCH ĐƠN VỊ. Định lý Brouwer được phát

biểu cho ánh xạ đơn trị. Để mở rộng nó cho ánh xạ đa trị ta dựa vào bổ đề sau, gọi là bổ đề "phân hoạch đơn vị".

Bổ đề 9. *Cho một tập compac C trong một không gian metric X và một số hữu hạn tập mở $G_1, G_2, \ldots, G_m$ phủ C. Bao giờ cũng có những hàm số liên tục $e_i : X \to [0,1]$ $(i = 1, \ldots, m)$ sao cho*

1) $e_i(x) = 0$ *ở ngoài* G_i,

2) $e_1(x) + e_2(x) + \cdots + e_m(x) = 1$ với mọi $x \in C$.

Chứng minh. Trước hết ta nhận xét rằng nếu F_1, F_2 là hai tập đóng rời nhau trong không gian metric X thì có một hàm số liên tục $e_1 : X \to [0,1]$ bằng 0 trên F_1 và bằng 1 trên F_2, đó là

$$e_1 = \frac{\rho(x, F_1)}{\rho(x, F_1) + \rho(x, F_2)}$$

(trong đó $\rho(x, M)$ là khoảng cách từ x đến M, tức là số $\inf_{y \in M} \rho(x, y)$). (xem chú thích ở Chương 5, Định lý 3, về sự liên tục của $\rho(x, M)$).

Ta chứng minh bổ đề bằng qui nạp theo m. Nếu $m = 2$ thì đặt $F_1 = C \setminus G_1$, $F_2 = C \setminus G_2$, và lấy $e_1(x)$ như trên, $e_2(x) = 1 - e_1(x)$ ta sẽ có được những hàm số đòi hỏi. Giả sử bổ đề đã được chứng minh cho trường hợp $m - 1$ tập mở phủ C, và xét trường hợp có m tập như thế: $G_1, G_2, \ldots, G_m$. Tập hợp $F = C \setminus G_m$ compac (vì là tập con đóng của C) và được phủ bởi $m - 1$ tập mở $G_1, \ldots, G_{m-1}$, cho nên theo giả thiết qui nạp, có những hàm số liên tục $h_i : X \to [0,1]$ sao cho $h_i(x) = 0$ ở ngoài G_i và $h_1(x) + \cdots + h_{m-1}(x) = 1$ trên F. Mặt khác, hai tập đóng F và $F_1 = C \setminus \cup_{i=1}^{m-1} G_i$ rời nhau, cho nên có một hàm số liên tục $h : X \to [0,1]$ bằng 0 trên F_1 và bằng 1 trên F. Các hàm liên tục

$$\begin{aligned} e_i(x) &= h_i(x).h(x) \quad (i = 1, \ldots, m-1) \\ e_m(x) &= 1 - e_1(x) - \cdots - e_{m-1}(x), \end{aligned}$$

đáp ứng yêu cầu nêu ra trong bổ đề. □

Các hàm $e_1(x), \ldots, e_m(x)$ như trên gọi là một *phân hoạch đơn vị* ứng với phủ mở $G_1, \ldots, G_m$ của C.

Dựa vào Bổ đề 9 có thể suy ra dễ dàng hệ quả sau đây của Định lý Brouwer:

Hệ quả. *Mọi ánh xạ liên tục $f : C \to C$ từ một tập lồi compac $C \subset \mathbb{R}^n$ vào chính nó đều có một điểm bất động $x^* = f(x^*)$.*

Chứng minh. Bằng cách tịnh tiến và thay (nếu cần) $\mathbb{R}^n$ bằng không gian nhỏ nhất chứa C, có thể cho rằng C có một điểm trong a (xem Chương 6, tiết1, tính chất V) và C nằm trong phần trong của một đơn hình S. Với mỗi $k = 1, 2, \ldots$, cho $C_k = \{x \in C : \rho(x, S \setminus C) \geq 1/k\}$. Hai tập mở int$C$ (phần trong của C) và $S \setminus C_k$ phủ S, cho nên theo trên, có một hàm số liên tục $e_k : S \to [0, 1]$ sao cho $e_k(x) = 1$ trên C_k và bằng 0 ở ngoài C. Đặt $\varphi_k(x) = e_k(x)f(x) + (1 - e_k(x))a$ ta có một ánh xạ liên tục từ S vào S, vậy theo Định lý 20, phải có một điểm $x_k = \varphi_k(x_k)$. Vì S compac và $0 \leq e_k(x) \leq 1$, ta có thể thay (nếu cần) các dãy bằng dãy con thích hợp để có $x_k \to x^*$, $e_k(x_k) \to \alpha$. Nếu với một k nào đó $e_k(x_k) = 1$ thì $x_k = f(x_k)$ là điểm bất động. Vậy có thể coi như $e_k(x_k) < 1$ với mọi k. Khi ấy $\rho(x_k, S \setminus C) < 1/k \to 0$, cho nên $\rho(x^*, S \setminus C) = 0$, tức là x^* là một điểm biên của C. Mà $x^* = \alpha f(x^*) + (1 - \alpha)a$, vậy (theo tính chất IV, mục 1.3, Chương 6) chỉ có thể $\alpha = 1$, tức là $x^* = f(x^*)$. □

4.5. ĐỊNH LÝ KAKUTANI. Một ánh xạ đa trị $f : C \to 2^Y$ từ một tập C trong không gian định chuẩn X vào một không gian định chuẩn Y, gọi là *đóng*, nếu đồ thị của nó

$$\{(x, y) : x \in C,\ y \in f(x)\}$$

là tập đóng trong không gian $X \times Y$, hay nói cách khác, từ $x_\nu \to x$, $y_\nu \to y$ và $y_\nu \in F(x_\nu)$ luôn luôn suy ra $y \in f(x)$.

Định lý 21. *Cho một tập lồi compac $C \subset \mathbb{R}^n$, và một ánh xạ đa trị đóng $f : C \to 2^D$ từ C vào một tập compac $D \subset \mathbb{R}^n$, sao cho với mọi $x \in C$, $f(x)$ là tập lồi compac không rỗng . Khi ấy có $x^* \in C$ và $y^* \in f(x^*)$ nghiệm đúng.*

$$(\forall x \in C) \quad (x - x^*, y^*) \geq 0 \tag{63}$$

(ở đây (u, v) biểu thị tích vô hướng của u, v trong $\mathbb{R}^n$).

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh có một $x^* \in C$ để cho

$$(\forall x \in C)\ (\exists y \in f(x^*)) \quad (x - x^*, y) \geq 0. \tag{64}$$

Giả sử trái lại, tức là

$$(\forall x \in C)\ (\exists u \in C)\ (\forall y \in f(x)) \quad (u - x, y) < 0. \tag{65}$$

Với mỗi $u \in C$ đặt

$$G(u) = \{x \in C : (u - x, y) < 0 \ \ \forall y \in f(x)\}.$$

Nếu $x \in C$ thì theo (65) phải có ít nhất một $u \in C$ sao cho $x \in G(u)$. Vậy họ các $G(u)$, $u \in C$, phủ C. Dễ thấy các $G(u)$ đều là tập mở *trong* C. Thật vậy, nếu $x_\nu \in C \setminus G(u)$ và $x_\nu \to \bar{x}$ $(\nu \to \infty)$ thì với mỗi ν có một $y_\nu \in f(x_\nu)$ nghiệm đúng $(u - x_\nu, y_\nu) \geq 0$, và do D compac ta có thể thay (nếu cần) các dãy bằng dãy con thích hợp để có $y_\nu \to \bar{y}$: khi ấy, chú ý rằng f đóng, ta có $\bar{y} \in f(\bar{x})$ và $(u - \bar{x}, \bar{y}) \geq 0$, chứng tỏ $\bar{x} \in C \setminus G(u)$.

Vì C compac nên theo tính chất Heine-Borel (Định lý 9, Chương 2) có một số hữu hạn phần tử $u_i \in C$ $(i = 1, \ldots, m)$ sao cho $G(u_1)$, $\ldots, G(u_m)$ vẫn phủ C. Cho $e_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ là phân hoạch đơn vị ứng với phủ ấy theo Bổ đề 9 và đặt

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} e_i(x) u_i.$$

Vì C lồi nên $g(x) \in C$, tức là $g : C \to C$. Vả lại ánh xạ g liên tục, cho nên theo hệ quả ở mục trước phải có một $\tilde{x} = g(\tilde{x})$. Nhưng với mọi $x \in C$ và mọi $y \in f(x)$:

$$(g(x) - x, y) = \sum\nolimits_{*} e_i(x)(u_i - x, y)$$

trong đó $\sum_*$ biểu thị tổng lấy theo các i nào mà $e_i(x) > 0$, tức là $x \in G(u_i)$ (do đó $(u_i - x, y) < 0$). Ta có $\sum_* e_i(x) = 1$, vậy $(g(x) - x, y) < 0$: điều này đưa đến mâu thuẫn khi lấy $x = \tilde{x}$ (theo giả thiết $f(x) \neq \emptyset$ với mọi x). Vậy ta phải có (64).

Bây giờ ta đặt, với mỗi $x \in C$:

$$D(x) = \{y \in f(x^*) : (x - x^*, y) < 0\}$$

Dĩ nhiên để hoàn thành việc chứng minh định lý ta chỉ còn phải vạch rõ ràng có ít nhất một điểm y^* của $f(x^*)$ không thuộc một $D(x)$ nào cả.

Giả sử trái lại, các $D(x)$, $x \in C$, phủ lên tập $f(x^*)$. Vì mỗi $D(x)$ hiển nhiên là một tập mở, mà $f(x^*)$ compac nên theo tính chất Heine-Borel, phải có một số hữu hạn các $D(x)$, chẳng hạn $D(x_1), D(x_2), \ldots, D(x_m)$, vẫn phủ $f(x^*)$. Ta khẳng định có một số $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ để cho hệ bất đẳng thức

$$(x_i - x^*, y) + \varepsilon \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{66}$$

không có nghiệm trong $f(x^*)$. Thật vậy, nếu trái lại ta sẽ có một dãy $y_k \in f(x^*)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sao cho $(x_i - x^*, y_k) + \varepsilon_k \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ với $\varepsilon_k \downarrow 0$ $(k \to \infty)$. Vì $f(x^*)$ compac ta có thể lấy một dãy con để có $y_k \to y_0 \in f(x^*)$. Hiển nhiên $(x_i - x^*, y_0) \geq 0$ $(i = 1; 2, \ldots, m)$, có nghĩa là y_0 không thuộc các $D(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, mâu thuẫn với trên. Vậy với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ hệ (62) không có nghiệm trong tập lồi $f(x^*)$. Theo Định lý 6 (Chương này) về bất đẳng thức không tương thích, phải có những số thực $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, sao cho $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \mu_i > 0$, và

$$(\forall y \in f(x^*) \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i[(x_i - x^*, y) + \varepsilon] \geq 0.$$

Đặt $\alpha_i = \mu_i/\alpha$ ta có $x_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in C$ và

$$(\forall y \in f(x^*)) \quad (x_0 - x^*, y) < 0,$$

mâu thuẫn với (67). □

Chú ý. Một điểm $x^* \in C$ sao cho có $y^* \in f(x^*)$ thỏa mãn (63) cũng gọi là một nghiệm (lời giải) của *bất đẳng thức biến phân*

$$\sup_{y \in f(x)} \inf_{x \in C} (x - x^*, y) \geq 0$$

Hệ quả. (Định lý Kakutani). *Cho một tập lồi compac $C \subset \mathbb{R}^n$ và một ánh xạ đa trị đóng $f : C \to 2^C$ từ C vào chính nó, sao cho với mọi $x \in C$, $f(x)$ là tập lồi, compac, không rỗng . Khi ấy f có một điểm bất động, nghĩa là một điểm $x^* \in C$ sao cho $x^* \in f(x^*)$:*

Chứng minh. Áp dụng định lý trước cho ánh xạ[1] $F(x) = x - f(x)$ ta được một điểm $x^* \in C$ và một $y^* \in f(x^*)$ sao cho $(\forall x \in C)$

[1] Ở đây $D = C - C$ mà C compac nên dễ thấy rằng D cũng compac.

$(x-x^*,\ x^*-y^*) \geq 0$. Lấy $x = y^* \in C$ ta suy ra $(y^*-x^*,\ x^*-y^*) \geq 0$, từ đó $x^* = y^* \in f(x^*)$. □

Đương nhiên định lý Brouwer (Định lý 20) là trường hợp riêng của định lý Kakutani, khi f là ánh xạ đơn trị.

4.6. ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN. Các kết quả trên có thể mở rộng vào không gian định chuẩn.

Định lý 22. (Ky Fan) *Cho một tập lồi compac C trong một không gian định chuẩn X, và một ánh xạ đa trị đóng $f : C \to 2^C$ từ C vào chính nó, sao cho với mọi $x \in C$, $f(x)$ là tập lồi compac, không rỗng. Khi ấy tồn tại $x^* \in C$ sao cho $x^* \in f(x^*)$.*

Chứng minh. Xét một hình cầu mở W_r tâm ở gốc, và có bán kính bằng $1/r$. Họ các tập mở $x + W_r$ phủ C, mà C compac nên có một số hữu hạn tập ấy vẫn phủ C : $x_i + W_r, i = 1, \ldots, n$. Gọi S là bao lồi của các $x_1, \ldots, x_n$ và $F : S \to 2^S$ là ánh xạ xác định bởi

$$F(x) = (f(x) + \overline{W_r}) \cap S.$$

Với mỗi $x \in S$ có it nhất một $y \in f(x) \subset C$ và với y này lại có một x_i sao cho $y \in x_i - W_r$, tức là $x_i \in y + W_r$ (vì $W_r = -W_r$), mà hiển nhiên $x_i \in S$ nên $x_i \in F(x)$. Vậy $F(x) \neq \emptyset$. Cũng rõ ràng $F(x)$ lồi vì là giao của hai tập lồi $f(x) + \overline{W_r}$ và S. Ta kiểm tra lại F là ánh xạ đóng. Giả sử $x_\nu \to x, y_\nu \to y, y_\nu \in F(x_\nu)$. Ta có $y_\nu = z_\nu + u_\nu$ với $z_\nu \in f(x_\nu)$, $u_\nu \in \overline{W_r}$. Vì $\{z_\nu\} \subset C$ mà C compac nên có một dãy con $z_{\nu_\mu} \to z \in C$, và do f là ánh xạ đóng nên $z \in f(x)$. Mặt khác, $u_{\nu_\mu} = y_{\nu_\mu} - z_{\nu_\mu} \to y - z$, mà $\overline{W_r}$ đóng nên $y - z \in \overline{W_r}$, do đó $y \in z + \overline{W_r} \subset f(x) + \overline{W_r}$, tức là $y \in F(x)$ vì hiển nhiên $y \in S$. Vậy F quả là ánh xạ đóng. Theo Định lý Kakutani phải có x_r sao cho $x_r \in f(x_r) + \overline{W_r}$ tức là có một $y_r \in f(x_r)$ sao cho $y_r \in x_r + \overline{W_r}$. Vì $\{x_r, r = 1, 2, \ldots\} \subset C$ compac nên có một dãy con $x_{r_s} \to x^* \in C$ $(s \to +\infty)$. Khi ấy $y_{r_s} \to x^*$, và do f đóng ta phải có $x^* \in f(x^*)$. □

Hệ quả. (Schauder) *Một ánh xạ liên tục $f : C \to C$ từ một tập lồi compac C trong một không gian định chuẩn vào chính nó bao giờ cũng có một điểm bất động $x^* = f(x^*)$.*

Định lý Ky Fan (và do đó cả định lý Schauder) vẫn còn đúng khi

X là không gian lồi địa phương -- một lớp không gian rộng hơn không gian định chuẩn, sẽ được nghiên cứu ở Chương 8.

BÀI TẬP

Định lý Hahn-Banach

1. Trong một không gian định chuẩn thực X, nếu hai tập lồi A, B không có điểm chung và A là mở, thì có một phiếm hàm $f \in X^*$ sao cho

$$(\forall x \in A,\ y \in B)\quad f(x) \le \alpha < f(y).$$

Nếu X là không gian phức, thì kết luận thay đổi như thế nào?

Chỉ dẫn. Dựa vào Bổ đề 2. Nếu X là không gian phức thì coi nó như không gian thực sẽ có một phiếm hàm tuyến tính thực trên X sao cho $g(x) \le \alpha < g(y)$ $(\forall x \in A, y \in B)$, sau đó đặt $f(x) = g(x) - ig(ix)$, sẽ có $f \in X^*$, nghiệm đúng

$$(\forall x \in A,\ y \in B)\quad \mathrm{Re} f(x) \le \alpha < \mathrm{Re} f(y).$$

2. Nếu hai tập lồi đóng $A, B \subset X$ (không gian thực) không có điểm chung, và A compac thì có một phiếm hàm $f \in X^*$ *tách hẳn* A với B, nghĩa là sao cho

$$\forall x \in A,\ y \in B\quad f(x) < \alpha_1 < \alpha_2 < f(y).$$

Chỉ dẫn. Lấy một hình cầu mở S đủ nhỏ để $A + S$ vẫn không cắt B và áp dụng Bài tập 1.

3. Mỗi tập lồi đóng A là bằng giao của tất cả các nửa không gian đóng chứa nó.

Chỉ dẫn. Gọi B là giao của tất cả các nửa không gian, đóng chứa A. B là tập lồi đóng, chứa A. Nếu có $x_0 \in B \setminus A$ thì áp dụng kết quả bài tập 2 sẽ có một phiếm hàm $f \in X^*$ tách hẳn x_0 với A, và ta sẽ có một nửa không gian đóng chứa A nhưng không chứa một điểm $x_0 \in B$: vô lý.

4. Cho một tập A trong một không gian định chuẩn X. Một *phiếm hàm tựa* của A tại $x_0 \in A$ là một phiếm hàm $f \in X^*$ sao cho $f(x) \ge f(x_0)$ $(\forall x \in A)$. Khi ấy siêu phẳng đóng $H = \{x : f(x) = f(x_0)\}$ cũng gọi là một *siêu phẳng*

tựa của A tại x_0. Chứng minh rằng nếu A là tập lồi đóng có điểm trong, thì tại mỗi điểm biên của A có ít nhất một siêu phẳng tựa.

5. Một hàm số thực $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (f có thể lấy giá trị $-\infty, +\infty$) trên một không gian định chuẩn X được gọi là *lồi* nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$ và mọi số thực $\alpha \in [0,1]$: $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$. Hàm lồi f gọi là *chính thường* nếu có một tập lồi $C \subset X$ sao cho $f(x)$ hữu hạn trên C, và $f(x) = +\infty$ ngoài C. Khi ấy ký hiệu $C = \text{dom} f$.

Cho một hàm lồi chính thường $f : X \to \mathbb{R}$. Một phiếm hàm $x^* \in X^*$ gọi là *dưới gradien* của f tại a nếu

$$(\forall x \in X)\ (f(x) - f(a)) \geq\ (x^*, x - a)$$

trong đó, với mỗi $x^* \in X^*$ ta ký hiệu $(x^*, u)\ = x^*(u)$ (giá trị của phiếm hàm x tại điểm $u \in X$). Tập hợp tất cả các dưới gradien của f tại a gọi là *dưới vi phân* của f tại a và được ký hiệu $\partial f(a)$.

Chứng minh rằng nếu f là một hàm lồi chính thường, liên tục tại một điểm $a \in \text{dom} f$ thì $\partial f(a)$ là một tập không rỗng .

Chỉ dẫn. Có thể cho rằng có một $\bar{x}$ tại đó $f(\bar{x}) < f(a)$ (nếu trái lại thì $0 \in \partial f(a)$. Dựa trên sự liên tục của f tại a có thể suy ra x là một điểm trong của tập lồi $E = \{x : f(x) < f(a)\}$. Vì $a \notin E$ nên áp dụng định lý tách sẽ có một $x^* \in X^*$ sao cho $(x^*, x) \leq \alpha = (x^*, a)$ $(\forall x \in E)$ tức là hệ $f(x) - f(a) < 0$, $(x^*, a - x)\ < 0$ không có nghiệm. Từ đó lại suy ra có một số $t \geq 0$ để $(\forall x)\ f(x) - f(a) + t(x^*, a - x)\ \geq 0$ v.v...

6. Nếu f_1, f_2 là hai hàm lồi chính thường thì với mọi a :

$$\partial(f_1 + f_2)(a) \supset \partial f_1(a) + \partial f_2(a)$$

và nếu f_1 liên tục tại một $x_0 \in \text{dom} f_2$, thì với mọi a :

$$\partial(f_1 + f_2)(a) = \partial f_1(a) + \partial f_2(a)$$

Chỉ dẫn. Giả sử f_1 liên tục tại $x_0 \in \text{dom} f_2$. Nếu $x^* \in \partial(f_1 + f_2)(a)$ thì với mọi $(u, v, \alpha) \in X \times X \times \mathbb{R}$ hệ sau vô nghiệm:

$$f_1(a+u) - f_1(a) - \alpha < 0,\ \alpha - (x^*, v)\ + f_2(a+v) - f_2(a) < 0,\ u - v = 0.$$

Dựa vào các giả thiết, suy ra phải có $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, và $g \in X^*$ sao cho λ_1, λ_2, g không cùng $= 0$ và

$\lambda_1[f_1(a+u) - f_1(a) - \alpha] + \lambda_2[\alpha - (x^*, v)\ + f_2(a+v) - f_2(a)] + g(u-v) \geq 0$ với mọi $u, x \in X$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Vì bất đẳng thức đúng với mọi α, nên $\lambda_1 = \lambda_2$, do đó có thể cho rằng $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Cho $\alpha = 0$, rồi lần lượt $v = 0$, $u = 0$, suy ra

$$x^* \in \partial f_1(a) + \partial f_2(a).$$

Định lý ánh xạ mở và nguyên lý chặn đều

7. Cho X, Y, là hai không gian Banach, và $A : X \to Y$ là toán tử tuyến tính liên tục từ X lên Y. Khi ấy $(\mathrm{Ker}A)^{\perp} = \mathrm{Im}A^*$.

Ở đây $A^* : Y^* \to X^*$ là toán tử phó (liên hợp) của A xác định bởi $(A^*y^*, x) = (y^*, Ax)$ với mọi $y^* \in Y^*$ và mọi $x \in X$. Còn $E^{\perp} = \{x^* : (x^*, x) = 0 \ \forall x \in E\}$.

8. Nếu $A : X \to Y$ là toán tử tuyến tính liên tục 1-1 từ không gian Banach X lên không gian Banach Y thì phải có hai số dương a, b sao cho

$$(\forall x \in X) \quad a\|x\| \le \|Ax\| \le \|b\| \, \|x\|$$

9. Nếu $\|.\|_1$ và $\|.\|_2$ là hai chuẩn trong một không gian tuyến tính X sao cho với mỗi chuẩn ấy X đều là không gian Banach, và $\|x_n\|_1 \to 0$ luôn luôn kéo theo $\|x_n\|_2 \to 0$, thì hai chuẩn ấy tương đương.

Chỉ dẫn. Xét ánh xạ đồng nhất $x \mapsto x$.

10. Nếu M, N là hai không gian con đóng của một không gian Banach X sao cho mọi x đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $x = u + v$, $u \in M$, $v \in N$, thì các toán tử chiếu $x \mapsto u$, và $x \mapsto v$ liên tục.

11. Cho X, Y là hai không gian Banach, và $A : X \to Y$ là một toán tử tuyến tính sao cho: với mọi dãy $x_n \to 0$ và mọi phiếm hàm $g \in Y^*$ ta đều có $g(Ax_n) \to 0$. Khi ấy A phải liên tục.

Chỉ dẫn. Chứng minh A có đồ thị đóng.

12. Cho một dãy toán tử tuyến tính liên tục $A_n : X \to Y$ từ không gian Banach X vào không gian Banach Y. Muốn cho dãy A_n hội tụ điểm tới một toán tử tuyến tính liên tục A điều kiện cần và đủ là:

a) dãy các chuẩn $\|A_n\|$ bị chặn $\|A_n\| \le M$ $(n = 1, 2 \ldots)$

b) dãy $\{A_n(x')\}$ là dãy cơ bản, với mọi $x \in E$, trong đó E là một tập trù mật trong X.

Định lý điểm bất động

Trong các bài tập 13-14, S là một $(n-1)$-đơn hình với các đỉnh là $a_1, \ldots, a_n$ và các diện là $F_1, \ldots, F_n$. Chứng minh các định lý sau:

13. Nếu có n tập hợp đóng $L_1, \ldots, L_n$ sao cho:

1) $S \subset \cup_{i=1}^{n} L_i$,

2) $a^i \in L_i$, $F_i \cap L_i = \emptyset$ $(\forall i)$

thì các tập $L_1, \ldots, L_n$ có một điểm chung trong S.

Chỉ dẫn. Áp dụng Định lý 19.

14. Nếu có n tập đóng $L_1, \ldots, L_n$ sao cho với mọi $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ đơn hình sinh bởi $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ đều được phủ bởi hợp của các $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}$, thì các tập $L_1, \ldots, L_n$ có một điểm chung trong S.

15. Áp dụng Định lý bất động Brouwer để suy ra Định lý 19.

Chỉ dẫn. Với $k > 0$ đặt $H_i = \{x \in S : \rho(x, L_i) \geq 1/k\}$ và xét ánh xạ $f(x)$ xác định bởi $f_i(x) = \dfrac{x_{i-1}\rho(x, H_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i \rho(x, H_i)}$, với quy ước $x_0 = x_n$. Chứng minh rằng nếu $\bar{x} = f(\bar{x})$ thì $f_i(\bar{x}) > 0$ $\forall i$, do đó $\rho(\bar{x}, L_i) \leq 1/k$. Vì k có thể lớn tùy ý suy ra có một $x^* \in \cap_{i=1}^{n} L_i$.

Chú ý. Mỗi mệnh đề trong hai bài tập 13, 14 cùng với Định lý 19 đều là những dạng tương đương của Định lý Brouwer.

16. Cho hai tập lồi compac A, B trong $\mathbb{R}^n$, và một hàm $f(x, y)$ xác định trên $A \times B$. Nếu f lồi theo x, lõm theo y, và liên tục theo riêng từng biến x, y thì

$$\max_{y \in B} \min_{x \in A} f(x, y) = \min_{x \in A} \max_{y \in B} f(x, y)$$

($\varphi(y)$ gọi là lõm nếu $-\varphi(y)$ là lồi).

Chỉ dẫn. Cho $C = A \times B$. Với mỗi $z = (x, y) \in C$ đặt $F(z) = M_x(z) \times M_y(z)$, trong đó

$$M_x(z) = \{u \in A : f(u, y) = \min_{x \in A} f(x, y)\}$$
$$M_y(z) = \{v \in A : f(u, v) = \min_{y \in A} f(x, y)\}$$

Ánh xạ F thỏa mãn các điều kiện của định lý Kakutani.

17. Trong một không gian tuyến tính tôpô X cho n tập lồi đóng $C_1, \ldots, C_n$, có hợp là một tập lồi C. Nếu giao của bất kỳ $n-1$ tập nào trong số đó cũng có giao không rỗng thì giao của cả n tập không rỗng.

Chỉ dẫn. Lấy $b_i \in \cap_{j \neq i} C_j$, và $T = \text{conv}\{b_1, \ldots, b_n, S = [a_1, \ldots, a_n$ là đơn hình chuẩn $n-1$ chiều trong R^n, $\varphi : S \to T$ là ánh xạ affin chuyển mỗi a_i tới b_i (một ánh xạ $\varphi(x)$ gọi là affin nếu $\varphi(x) - \varphi(0)$ là tuyến tính). Áp dụng Định lý 19 cho hệ tập $L_i = \varphi^{-1}(C_i)$.

Chương 7

KHÔNG GIAN HILBERT

1. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN HILBERT

1.1. TÍCH VÔ HƯỚNG. Trong không gian $\mathbb{R}^k$ tích vô hướng của hai vectơ $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$, $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k)$:

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_k\eta_k$$

giữ một vai trò rất quan trọng, và là một khái niệm được ứng dụng rộng rãi trong toán học, cơ học, vật lý, v.v... Biết tích vô hướng của mọi cặp vectơ thì có thể suy ra độ dài các vectơ (bình phương độ dài một vectơ bằng tích vô hướng của vectơ ấy với chính nó) và góc giữa hai vectơ (cosin của góc này bằng tích vô hướng của hai vectơ chia cho tích các độ dài của chúng). Thành thử trong khái niệm tích vô hướng đã bao hàm khả năng đo độ dài, đo góc, và từ đó đi đến những khái niệm quan trọng khác như tính trực giao, hình chiếu thẳng, v.v...

Ta hãy xét xem làm thế nào đưa được khái niệm tích vô hướng vào không gian định chuẩn. Ta nhận thấy tích vô hướng (x, y) của hai vectơ x, y trong $\mathbb{R}^k$ có các tính chất cốt yếu sau đây:

1) $(x, y) = (y, x)$.
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.
3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ với mọi số thực α.

4) $(x, x) > 0$ nếu $x \neq 0$; $(x, x) = 0$ nếu $x = 0$.

Vả lại tích vô hướng liên hệ với độ dài (chuẩn) của các vectơ bởi hệ thức

5) $(x.x) = \|x\|^2$.

Như vậy phải làm thế nào xác định được trong không gian định chuẩn một hàm hai biến (x, y) với các tính chất 1) - 4) và liên hệ với chuẩn bởi hệ thức 5). Một không gian định chuẩn mà trong đó có thể xác định được một hàm hai biến (x, y) với các điều kiện ấy gọi là một *không gian tiền Hilbert* (hay không gian unita).

Từ 1) 2) 3) ta có

$$(x + y, x + y) + (x - y,\ x - y) = 2(x, x) + 2(y, y)$$

và kết hợp với 5) ta suy ra chuẩn trong một không gian tiền Hilbert phải thỏa mãn điều kiện

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1}$$

Đẳng thức này có nghĩa là: tổng bình phương các cạnh của một hình hình hành bằng tổng bình phương của hai đường chéo, cho nên thường gọi là *điều kiện bình hành*.

Vậy muốn đưa được tích vô hướng vào một không gian định chuẩn thì không gian này phải thỏa mãn điều kiện bình hành. Ngược lại có thể chứng minh (không khó khăn lắm!) rằng nếu một không gian định chuẩn thỏa mãn điều kiện bình hành thì bằng cách đặt

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \tag{2}$$

ta sẽ có hàm hai biến (x, y) với các tính chất 1) - 4).

Tóm lại, không gian Hilbert chẳng qua là không gian định chuẩn thỏa mãn điều kiện bình hành (1).

Nhưng trong phần lớn các ứng dụng, khái niệm tích vô hướng đi trước khái niệm chuẩn, cho nên trong lý thuyết không gian Hilbert người ta thường xuất phát từ một không gian tuyến tính (chưa định chuẩn), lấy các tính chất 1) - 4) làm những tiên đề để định nghĩa tích vô hướng trong không gian đó, rồi mới định nghĩa chuẩn bởi 5) tức là

$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ (đương nhiên cần chứng minh rằng đó là một chuẩn, nghĩa là nó thỏa mãn đủ các tiên đề về chuẩn). Sau đây chúng ta sẽ theo đường lối này.

1.2. KHÔNG GIAN HILBERT. Một không gian tuyến tính thực X được gọi là *không gian tiền Hilbert*, nếu trong đó có xác định một hàm hai biến (x,y), gọi là *tích vô hướng* của hai vectơ (x,y), với các tính chất 1) - 4).

Ta hãy chứng minh rằng hệ thức 5) tức là

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \tag{3}$$

xác định *một chuẩn* trong không gian X, nói cách khác không gian tiền Hilbert định nghĩa như trên là một không gian định chuẩn.

Trước hết, với mọi số thực α ta có

$$0 \leq (x - \alpha y, x - \alpha y) = (x,x) - 2\alpha(x,y) + \alpha^2(y,y),$$

cho nên tam thức bậc hai theo α này phải có biệt số ≤ 0:

$$|(x,y)|^2 - (x,x)(y,y) \leq 0$$

hay

$$|(x,y)| \leq \|x\|.\|y\|. \tag{4}$$

Từ đó

$$(x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Vậy:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

nghĩa là bất đẳng thức tam giác được thoả mãn. Mặt khác từ 3) 4) 5) ta suy ra ngay: $\|x\| > 0$ nếu $x \neq 0$, $\|x\| = 0$ nếu $x = 0$, và $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$. Do đó $\|x\|$ đúng là một chuẩn.

Qua chứng minh trên ta thấy rằng trong không gian tiền Hilbert luôn luôn có bất đẳng thức (4) gọi là *bất đẳng thức Schwarz*. Vả lại theo trên đẳng thức bình hành (1) cũng luôn luôn đúng.

Ta có $(x+y, x+y) - (x-y, x-y) = 4(x, y)$ nên giữa tích vô hướng và chuẩn có hệ thức (2). Khi $\|x_n - x\| \to 0$, $\|y_n - y\| \to 0$ thì $\|x_n + y_n\| \to \|x+y\|$, $\|x_n - y_n\| \to \|x-y\|$, cho nên theo (2) ta cũng có $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Vậy *tích vô hướng* (x, y) *là một hàm liên tục đối với* x *và* y. Vả chăng các tính chất 2), 3) có nghĩa là: (x, y) là một phiếm hàm song tuyến tính trên X, và bất đẳng thức Schwarz (4) cho thấy phiếm hàm này bị chặn, do đó theo kết quả ở Chương 5, mục 5.3, nó phải liên tục.

Vì một không gian tiền Hilbert là không gian định chuẩn, nên mọi khái niệm và sự kiện về không gian định chuẩn đều áp dụng cho nó. Nói riêng một không gian tiền Hilbert có thể đủ hay không đủ. Một không gian tiền Hilbert đủ gọi là một *không gian Hilbert*.

Một không gian tiền Hilbert không đủ bao giờ cũng có thể bổ sung cho thành không gian Hilbert : muốn như thế, người ta coi nó là một không gian định chuẩn với chuẩn $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ để bổ sung cho thành một không gian Banach (như đã thấy ở Chương 5, mục 1.4), sau đó sẽ chứng minh rằng trong không gian Banach này có thể định nghĩa tích vô hướng thêm cho các phần tử mới để vẫn có $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Giữa các khái niệm không gian metric, không gian tuyến tính, không gian định chuẩn và không gian Hilbert, có những liên hệ như trong Bảng 1.

Trong những ví dụ về không gian định chuẩn đã gặp, $\mathbb{R}^k$ dĩ nhiên là không gian Hilbert, với tích vô hướng là $(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \eta_i$.

Không gian $L^2(E, \mu)$ cũng là không gian Hilbert, với tích vô hướng:

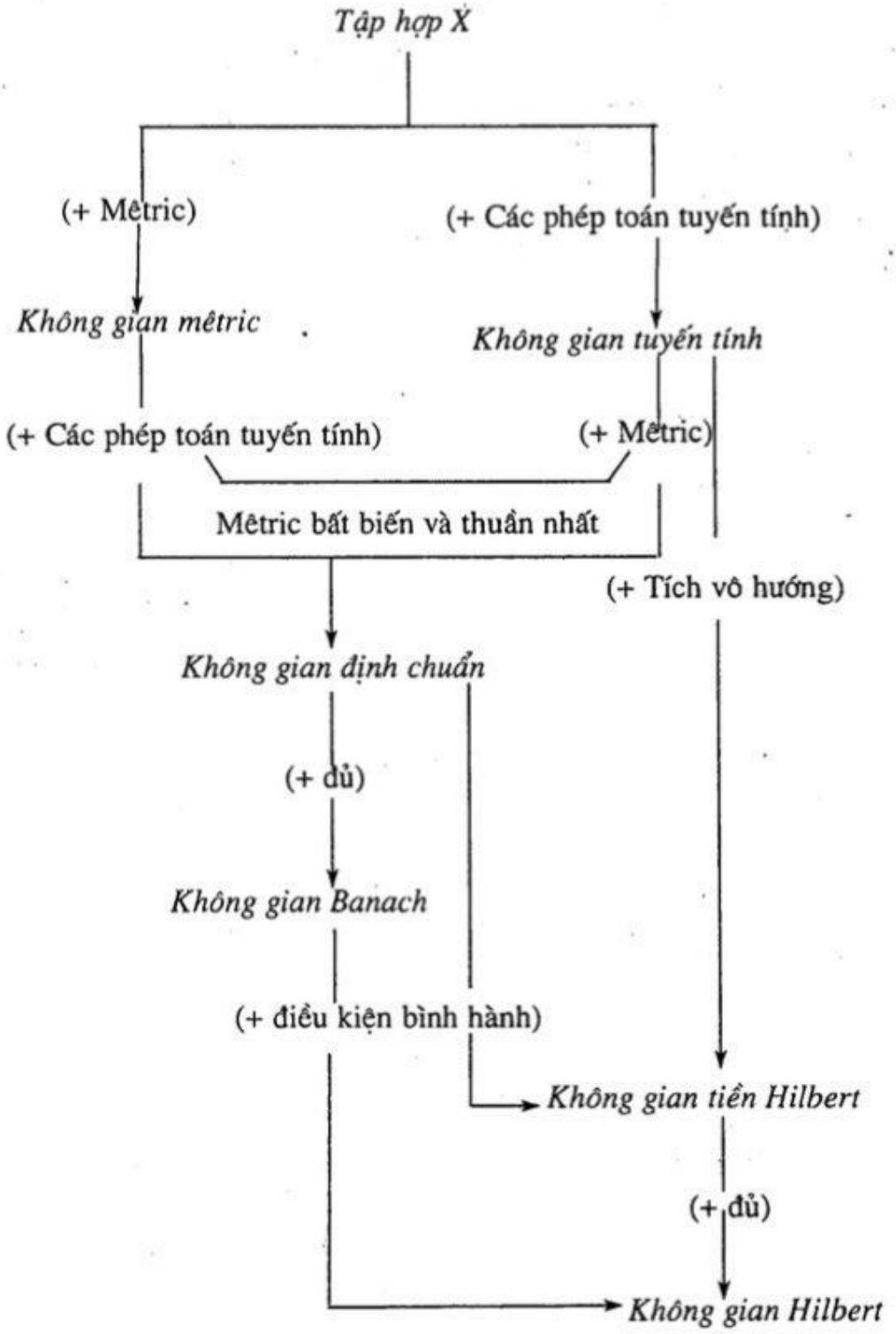
$$(x, y) = \int_E x(t) y(t) d\mu.$$

Tích phân này tồn tại và hữu hạn vì theo bất đẳng thức Hölder:

$$\int_E |xy| \leq \left(\int x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int y^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Không gian $C^{L^2}_{[a,b]}$ gồm tất cả các hàm liên tục trên $[a, b]$ với các phép toán tuyến tính thông thường và với tích vô hướng

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt$$


Tập hợp X
(+ Mêtric)
(+ Các phép toán tuyến tính)
Không gian mêtric
Không gian tuyến tính
(+ Các phép toán tuyến tính)
(+ Mêtric)
Mêtric bất biến và thuần nhất
(+ Tích vô hướng)
Không gian định chuẩn
(+ đủ)
Không gian Banach
(+ điều kiện bình hành)
Không gian tiền Hilbert
(+ đủ)
Không gian Hilbert

Bảng 1

là một không gian tiền Hilbert không đủ (tính không đủ này cũng chứng minh tương tự như đối với $C^{L^2}_{[a,b]}$, Chương 2, mục 3.1).

Một không gian Hilbert thường gặp nữa là không gian l^2, lập thành bởi tập tất cả các dãy số $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ sao cho $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 < \infty$, với các phép toán tuyến tính : $x+y = (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, ...)$; $\alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, ...)$, và tích vô hướng

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i.$$

Không gian này là trường hợp riêng của $L^2(E, \mu)$ với

$$E = \{1, 2, ..., n, ...\},\ \mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = ... = \mu(\{n\}) = ... = 1.$$

Hai không gian Hilbert X, X' gọi là *đẳng cấu* nếu có một ánh xạ 1-1 π từ X lên X' bảo toàn các phép toán tuyến tính và bảo toàn tích vô hướng, nghĩa là sao cho

1) $\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y)$; $\pi(\alpha x) = \alpha\pi(x)$;

2) $(\pi x, \pi y) = \pi(x, y)$

Chẳng hạn, sau này sẽ thấy rằng hai không gian l^2 và L^2 là đẳng cấu.

2. TÍNH TRỰC GIAO, HÌNH CHIẾU

2.1. VECTƠ TRỰC GIAO. Trong không gian Hilbert, nhờ tích vô hướng, có thể định nghĩa khái niệm trực giao giống như trong không gian $\mathbb{R}^3$ thông thường.

Ta nói hai vectơ x, y của một không gian Hilbert X *trực giao* với nhau, và kí hiệu $x \perp y$, nếu $(x, y) = 0$.

Từ định nghĩa ấy có thể suy ra ngay các tính chất đơn giản sau đây:

I. *Nếu $x \perp y$ thì $y \perp x$. Ta có $x \perp x$ khi và chỉ khi $x = 0$. Vectơ 0 trực giao với mọi vectơ x.*

II. *Nếu $x \perp y_1, y_2, \ldots, y_n$ thì $x \perp \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n$.*

Thật vậy $(x, \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n) = \alpha_1(x_1, y_1) + \cdots + \alpha_n(x, y_n) = 0$.

III. *Nếu $x \perp y_n$, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ thì $x \perp y$.*

Thật vậy $(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} (x, y_n) = 0$ (liên tục của tích vô hướng).

Ta nói một vectơ x *trực giao với một tập* $M \subset X$ nếu x trực giao với mọi phần tử của M. Từ các tính chất 2) và 3) ta suy ra: tập tất cả các vectơ trực giao với một tập $M \subset X$ cho trước làm thành một không gian con đóng của X. Không gian con này thường được kí hiệu $M^{\perp}$ và gọi là *phần bù trực giao của* M.

IV. *Nếu tập* M *trù mật trong* X *thì* $M^{\perp}$ *gồm một phần tử duy nhất là* 0, nghĩa là: $x \perp M \Rightarrow x = 0$.

Thật vậy, vì M trù mật trong X nên mọi $x \in X$ đều là giới hạn của một dãy $x_n \in M : x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Vậy $x \perp M$ kéo theo $x \perp x_n$ với mọi n, và do đó $x \perp x$ theo tính chất 3), rồi $x = 0$ theo tính chất 1).

V. *Nếu* $x \perp y$ *thì* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ *(định lý Pythagore).*

Thật vậy, $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$ vì $(x,y) = 0$.

Bằng qui nạp ta chứng minh rằng tổng quát hơn, nếu các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ từng đôi một trực giao nhau và $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ thì $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

VI. Nếu $\{x_n\}$ là một hệ trực giao (nghĩa là các vectơ x_n trực giao từng đôi một) thì chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} x_n$ *hội tụ khi và chỉ khi chuỗi số* $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$.

Thật vậy, cho $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$. Với $n > m$ ta có, theo định lý Pythagore,

$$\|s_n - s_m\|^2 = \|x_{m+1} + \ldots + x_n\|^2 = \|x_{m+1}\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2 = \sigma_n - \sigma_m.$$

Do đó $\|s_n - s_m\| \to 0$ khi và chỉ khi $\sigma_n - \sigma_m \to 0$. Nhưng không gian Hilbert là không gian đủ, cho nên điều này cũng có nghĩa là: s_n có giới hạn khi và chỉ khi σ_n có giới hạn.

2.2. HÌNH CHIẾU LÊN MỘT KHÔNG GIAN CON. Một trong các tính chất cơ bản của không gian Hilbert là:

Định lý 1: *Cho* M *là một không gian con đóng của một không gian Hilbert* X. *Bất kỳ phần tử* x *nào của* X *cũng có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng*

$$x = y + z \text{ với } y \in M,\ z \in M^{\perp}, \tag{5}$$

trong đó y là phần tử của M gần x nhất, tức là $\|x-y\| \leq \|x-u\|$ với mọi $u \in M$.

Chứng minh. Có thể thấy ngay rằng phân tích (5) nếu có, phải là duy nhất vì nếu $x = y + z = y' + z'$ với $y, y' \in M$, $z, z' \in M^{\perp}$ thì $y - y' = z' - z$ mà $M, M^{\perp}$ đều là không gian con nên $y - y' \in M$, $z' - z \in M^{\perp}$ tức là $(z' - z) \perp (z' - z)$, do đó $y - y' = z' - z = 0$. Thành thử vấn đề chủ yếu là sự tồn tại của phân tích (5).

Ta nhận xét rằng trong trường hợp riêng $X = \mathbb{R}^2$ và M là một đường thẳng thì định lý nói lên một sự kiện quen thuộc.

Trong trường hợp tổng quát, ta đặt

$$d = \inf_{u \in M} \|x - u\|.$$

Theo định nghĩa cận dưới đúng, tồn tại một dãy $u_n \in M$ sao cho $\|x - u_n\| \to d$ $(n \to \infty)$. Áp dụng đẳng thức bình hành cho $x - u_n$ và $x - u_m$, ta có

$$\|2x - (u_n + u_m)\|^2 + \|u_m - u_n\|^2 = 2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2$$

Khi $n, m \to \infty$ thì vế phải dần tới $4d^2$, còn phần đầu vế trái bằng

$$4\left\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\right\|^2 \geq 4d^2$$

vì $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in M$. Vậy khi $n, m \to \infty$ thì $\|u_n - u_m\| \to 0$, do đó u_n dần tới một giới hạn y nào đó. Ta có $y \in M$ vì M đóng và $\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x - u_n\| = d$.

Bây giờ ta đặt $z = x - y$ (như thế $x = y + z$) và tìm cách chứng minh $z \in M^{\perp}$. Muốn thế, xét một phần tử u bất kỳ của M. Ta có, với mọi số thực α :

$$(z - \alpha u, z - \alpha u) = \|z\|^2 - 2\alpha(z, u) + \alpha^2\|u\|^2.$$

Mà $y + \alpha u \in M$, nên $(z - \alpha u, z - \alpha u) = \|z - \alpha u\|^2 = \|x - (y + \alpha u)\|^2 \geq d^2$. Mặt khác $\|z\|^2 = \|x - y\|^2 = d^2$, do đó với mọi số thực α

$$-2\alpha(z, u) + \alpha^2\|u\|^2 \geq d^2 - d^2 = 0,$$

điều này chỉ có thể xảy ra nếu $(z, u) = 0$, tức là $z \perp u$. Vậy $z \in M^{\perp}$ và như đòi hỏi. □

Vectơ y trong phân tích (1) gọi là *hình chiếu* của x lên không gian con M. Như đã thấy trong chứng minh vừa rồi, đó là vectơ của M mà khoảng cách tới x nhỏ nhất. Đặt $Px = y$, ta xác định một toán tử P gọi là *toán tử chiếu lên* M. Rõ ràng P là toán tử tuyến tính và do $\|Px\| \leq \|x\|$ nên P cũng bị chặn (liên tục).

3. HỆ TRỰC CHUẨN

3.1. ĐỊNH NGHĨA , BẤT ĐẲNG THỨC BESSEL. Một hệ $\{e_n\}$ các phần tử của không gian Hilbert X gọi là *hệ trực chuẩn* nếu $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, trong đó δ_{ij} là ký hiệu Kronecker, (tức $\delta_{ij} = 1$ với $i = j$ và $\delta_{ij} = 0$ với $i \neq j$). Như vậy một hệ trực chuẩn là một hệ trực giao (các phần tử của nó trực giao từng đôi một) và chuẩn hoá: $\|e_i\| = 1$ với mọi i.

Khi $\{e_n\}$ là một hệ trực chuẩn thì với mọi $x \in X$ số $\xi_i = (x, e_i)$, gọi là *hệ số Fourier* của x đối với e_i và chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ gọi là *chuỗi Fourier* (hay *khai triển Fourier*) của x theo hệ $\{e_n\}$. Ta có thể chứng minh dễ dàng các tính chất sau đây:

1) $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \leq \|x\|^2$ *(bất đẳng thức Bessel).*

Thật vậy, đặt $y_n = x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ ta có $x = y_n + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ và $(y_n, e_i) = (x, e_i) - \sum_{i=1}^{n} \xi_i (e_i, e_j) = (x, e_i) - \xi_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, tức là $y_n \perp \xi_i e_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ cho nên theo định lý Pythagore $\|x\|^2 = \|y_n\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i e_i\|^2 = \|y_n\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, và cho $n \to \infty$ ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

2) *Chuỗi* $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ *hội tụ và* $(x - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i) \perp e_n$ *với mọi* n.

Thật vậy, $\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \leq \|x\|^2 < \infty$ cho nên theo tính chất VI ở mục 2.1, chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ hội tụ. Mặt khác với mọi $n > m$ ta có, như trên đã thấy

$$(x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i,\ e_m) = 0$$

Vậy cho $n \to \infty$ ta sẽ được $(x - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i,\ e_m) = 0$ với mọi m.

3.2. HỆ TRỰC CHUẨN ĐẦY ĐỦ. Một hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ gọi là *đầy đủ* khi chỉ có vectơ 0 mới trực giao với tất cả các phần tử của hệ: $x \perp e_n$ $(n = 1, 2, ...) \Rightarrow x = 0$.

Định lý 2. *Cho $\{e_n\}$ là một hệ trực chuẩn, $\xi_n = (x, e_n)$ là các hệ số Fourier của x đối với e_n. Các mệnh đề sau đây tương đương.*

1) *$\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn đầy đủ;*

2) $(\forall x \in X)$ $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$;

3) $(\forall x \in X)$ $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2$ *(điều kiện đóng).*

4) $(\forall x \in X)(\forall y \in X)$ $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$ *(η_i là hệ số Fourier của y đối với e_i).*

5) *Hệ $\{e_n\}$ tuyến tính trù mật trong X, nghĩa là họ các tổ hợp tuyến tính của các e_n (bao tuyến tính của hệ $\{e_n\}$) trù mật trong X.*

Chứng minh. 1) $\Rightarrow$ 2). Theo trên $x - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \perp e_n$ $(n = 1, 2...)$, vậy theo định nghĩa hệ trực chuẩn đầy đủ $x - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i = 0$.

2) $\Rightarrow$ 4). Ta có

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{\infty} \eta_i e_i) = (\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i.$$

4) $\Rightarrow$ 3). Cho $y = x$ ta được $(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2$.

3) $\Rightarrow$ 1). Giả sử có 3) và $x \perp e_n$ $(n = 1, 2, ...)$. Ta sẽ có $\xi_i = (x, e_i) = 0$ $(i = 1, 2...)$ nên $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 = 0$, do đó $x = 0$.

2) $\Rightarrow$ 5). Nếu có 2) thì với mọi $x \in X$ ta có $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, tức là mọi x đều là giới hạn của một dãy các tổ hợp tuyến tính của các e_n. Nói cách khác, hệ $\{e_n\}$ là tuyến tính trù mật trong X.

5) $\Rightarrow$ 1). Giả sử có 5) và $x \perp e_n$ $(n = 1, 2, ...)$. Như vậy $x \perp M$ (M là bao tuyến tính của họ $\{e_n\}$) và vì M trù mật trong X nên theo tính chất IV, mục 2.1, ta phải có $x = 0$. □

Định lý 3. (Riesz-Fischer). *Cho một hệ trực chuẩn đầy đủ* $\{e_n\}$ *trong không gian Hilbert* X. *Nếu một dãy số* $\{\xi_i\}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 < \infty \tag{6}$$

thì sẽ có một vectơ duy nhất $x \in X$ *nhận các* ξ_i *làm hệ số Fourier và*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2. \tag{7}$$

Chứng minh. Theo tính chất VI, mục 2.1, điều kiện (6) kéo theo sự hội tụ của chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$, vì $\|\xi_i e_i\|^2 = \xi_i^2$. Cho x là tổng của chuỗi ấy: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$, ta có $(x, e_n) = (\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i, e_n) = \xi_n$, vậy x nhận các ξ_n làm hệ số Fourier và vì $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn đầy đủ nên ta phải có (7), đồng thời mọi x nhận các ξ_n làm hệ số Fourier đều phải bằng $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i = x$. □

3.3. ỨNG DỤNG VÀO KHÔNG GIAN $L^2_{[0,2\pi]}$.

Trong không gian $L^2_{[0,2\pi]}$ *tập các hàm*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \ldots \tag{8}$$

lập thành một hệ trực chuẩn đầy đủ.

Thật vậy, tính trực giao và chuẩn hoá của hệ này có thể kiểm tra lại dễ dàng (để ý rằng ở đây hai hàm $f(x), g(x)$ trực giao tức là $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = 0$). Ta chỉ cần chứng minh thêm tính đầy đủ, và muốn thế, dựa vào Định lý 2, chỉ cần chứng minh rằng hệ (8) là tuyến tính trù mật trong $L^2_{[0,2\pi]}$.

Cho một hàm bất kỳ $f(x) \in L^2_{[0,2\pi]}$. Do tính trù mật của họ hàm liên tục trong không gian này (Chương 5, Định lý 3), ta có thể tìm được một hàm $g(x)$ liên tục sao cho $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sau đó theo định lý Weierstrass II (Chương 2, Hệ quả 2) có thể tìm được một đa thức lượng giác

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

sao cho $\max_{0\le x\le 2\pi} |g(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$, do đó

$$\|g - s_n\| = \left(\int_0^{2\pi} |g(x) - s_n)^2|^{\frac{1}{2}} dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Khi ấy ta sẽ có $\|f - s_n\| \le \|f - g\| + \|g - s_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Vậy với mỗi hàm $f \in L^2_{[0,2\pi]}$ với mọi $\varepsilon > 0$ đều tìm được một đa thức lượng giác s_n sao cho $\|f - s_n\| < \varepsilon$, chứng tỏ rằng họ các đa thức lượng giác là trù mật trong $L^2_{[0,2\pi]}$. Nhưng mỗi đa thức lượng giác là một tổ hợp tuyến tính các hàm trong hệ (8). Vậy hệ này tuyến tính trù mật trong $L^2_{[0,2\pi]}$ và do đó nó là một hệ trực chuẩn đầy đủ trong không gian này.

Các hệ số Fourier của một hàm $f(x) \in L^2_{[0,2\pi]}$ đối với hệ (8) là

$$\left(f, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)dx,\ \left(f, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x\right) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx,$$
$$\left(f, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x\right) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx, \ldots,$$

Vậy đặt

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx,\ a_k = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$$
$$b_k = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

ta có khai triển Fourier của $f(x)$:

$$f(x) \underset{(L^2)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{9}$$

Theo những kết quả trên, bây giờ ta biết rằng chuỗi này bao giờ cũng hội tụ đến $f(x)$ theo mêtric của $L^2_{[0,2\pi]}$ tức là

$$\|f(x) - \tfrac{a_0}{2} - \textstyle\sum_{k=1}^{n}((a_k \cos kx + b_k \sin kx)\|^k_{L^2}$$
$$= \textstyle\int_0^{2\pi} |f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx|^2 dx \to 0\ (n \to \infty).$$

Một câu hỏi nảy ra: có thể thay trong mệnh đề trên đây sự hội tụ theo mêtric của $L^2_{[0,2\pi]}$ bằng sự hội tụ hầu khắp nơi không, nghĩa là có thể chăng khẳng định được rằng chuỗi Fourier của một hàm $f(x) \in L^2_{[0,2\pi]}$

hội tụ hầu khắp nơi đến nó? Vấn đề này càng được nhiều người chú ý sau khi Kolmogorov xây dựng được năm 1926 một hàm $f \in L_{[0,2\pi]}$ có chuỗi Fourier phân kỳ khắp nơi. Nhưng phải đợi hơn 40 năm sau, đến 1966 Carleson mới chứng minh được rằng chuỗi Fourier của một hàm thuộc $L^2_{[0,2\pi]}$ bao giờ cũng hội tụ hầu khắp nơi đến nó.

3.4. PHƯƠNG PHÁP TRỰC HÓA. Để thu được một hệ trực chuẩn từ một hệ độc lập tuyến tính cho trước, ta dựa vào mệnh đề sau đây của Schmidt.

Định lý 4. *Cho một hệ $\{x_n\}$ các phần tử của một không gian tiền Hilbert X, sao cho với mọi n các vectơ $x_1, x_2, ..., x_n$ là độc lập tuyến tính. Bao giờ cũng có thể xây dựng được một hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ cùng lực lượng với hệ $\{x_n\}$, và sao cho với mọi n, tập các vectơ $e_1, e_2, ..., e_n$ cùng một bao tuyến tính với các vectơ $x_1, x_2, ..., x_n$.*

Chứng minh. Do giả thiết độc lập tuyến tính nên các vectơ x_n đều khác 0. Ta hãy xác định các vectơ $y_1, y_2, ...,$ và $e_1, e_2, ...$ theo các hệ thức sau đây:

$$y_1 = x_1 \qquad e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, e_1)e_1 \qquad e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} - (x_{n+1}, e_n)e_n \qquad e_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Để cho tiện ta tạm kí hiệu : $T\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là bao tuyến tính của $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Rõ ràng do $x_1 \neq 0$ nên sau bước thứ nhất ta xác định được e_1 và $T\{e_1\} = T\{x_1\}$. Giả sử sau bước thứ n ta xác định được $e_1, e_2, ..., e_n$ và $T\{e_1, e_2, ..., e_n\} = T\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Theo công thức trên (đẳng thức $n+1$) ta xác định được y_{n+1}, và $y_{n+1} \neq 0$ vì nếu trái lại thì x_{n+1} là tổ hợp tuyến tính của các $e_1, e_2, ..., e_n$, do đó là tổ hợp tuyến tính của các $x_1, x_2, ..., x_n$, trái với giả thiết. Vậy ta sẽ xác định được e_{n+1}, và rõ ràng e_{n+1} là tổ hợp tuyến tính của $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ (vì mỗi $e_1, e_2, ..., e_n$ là tổ hợp tuyến tính của $x_1, x_2, ..., x_n$), đồng thời x_{n+1} cũng là tổ hợp tuyến tính của $e_1, e_2, ..., e_{n+1}$ cho nên $T\{e_1, e_2, ..., e_{n+1}\} = T\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$.

Như vậy ta đã chứng minh được rằng có thể xây dựng các $e_1, e_2, \ldots$ theo các công thức trên và với mọi n bao tuyến tính của $e_1, e_2, \ldots, e_n$ trùng với bao tuyến tính của $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Vì $\|e_n\| = 1$ với mọi n nên vấn đề còn lại là chứng minh tính trực giao của hệ $\{e_n\}$. Điều này không có gì khó. Thật vậy, vì $(e_1, e_1) = 1$ nên $(y_2, e_1) = (x_2, e_1) - (x_2, e_1)\,(e_1, e_1) = 0$ tức là $y_2 \perp e_1$ và do đó $e_2 \perp e_1$. Giả sử $e_1, e_2, \ldots, e_n$ trực giao từng đôi một, ta thấy ngay rằng vì $(e_i, e_i) = 1$ nên $(y_{n+1}, e_i) = (x_{n+1}, e_i) - (x_{n+1}, e_i) \times (e_i, e_i) = 0$, tức là $y_{n+1} \perp e_i$ và do đó $e_{n+1} \perp e_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Vậy $\{e_n\}$ là một hệ trực chuẩn và định lý đã được xác lập. □

Hệ quả 1. *Mọi không gian Hilbert tách được có một hệ trực chuẩn đầy đủ đếm được hoặc hữu hạn.*

Thật vậy, cho $\{a_n\}$ là dãy phần tử trù mật trong một không gian Hilbert X tách được . Ta hãy bỏ đi khỏi dãy mọi phần tử a_n nào là tổ hợp tuyến tính của những phần tử trước nó $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Ta sẽ được một dãy mới (hữu hạn hay vô hạn) mà ta sẽ kí hiệu là $\{x_n\}$, trong đó không một phần tử nào là tổ hợp tuyến tính của những phần tử trước nó, cho nên với mọi n các phần tử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sẽ là độc lập tuyến tính. Vả lại rõ ràng bao tuyến tính của dãy $\{x_n\}$ bao hàm $\{a_n\}$, cho nên là trù mật trong X. Áp dụng định lý trước ta sẽ tìm được một hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ mà bao tuyến tính cũng sẽ trù mật trong X. Vậy theo Định lý 4 hệ trực chuẩn này là đầy đủ trong X. □

Hệ quả 2. *Hai không gian Hilbert cùng một số chiều hữu hạn hoặc cùng tách được và có vô số chiều là đẳng cấu.*

Thật vậy, cho X, X' là hai không gian Hilbert tách được và có vô số chiều (nếu chúng cùng một số chiều hữu hạn thì chứng minh càng đơn giản). Theo Hệ quả 1, mỗi không gian ấy có một hệ trực chuẩn đầy đủ $\{e_n\}$, $\{e'_n\}$, và theo Định lý 4

$$(\forall x \in X) \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i; \qquad (\forall x' \in X') \quad x' = \sum_{i=1}^{\infty} \xi'_i e'_i.$$

Ta hãy xác định ánh xạ π sau đây:

$$x' = \pi(x) \Leftrightarrow (\forall i) \;\; \xi'_i = \xi_i.$$

Rõ ràng đó là một ánh xạ 1-1 từ X lên X', bảo toàn các phép toán tuyến tính và cũng bảo toàn tích vô hướng vì cũng theo Định lý 4, với

mọi $x, y \in X$, $x', y' \in X'$ ta có

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i \quad (x', y') = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i' \eta_i'.$$

Do đó π là một phép đẳng cấu giữa X và X'.

Ta đã biết rằng L^2 là tách được (Chương 5, mục 2.3). Vậy mọi không gian Hilbert *tách được vô số chiều đều đẳng cấu với* L^2.

Không gian l^2 cũng tách được vì tập các dãy $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ trong đó các ξ_i hữu tỉ và bằng 0 kể từ một hàng nào đó trở đi, là đếm được và trù mật trong l^2. Vậy l^2 cũng đẳng cấu với L^2.

Sự đẳng cấu giữa l^2 và L^2 cũng có thể chứng minh trực tiếp dễ dàng: với mỗi phần tử $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in L^2$ (trong đó $\{e_n\}$ là một hệ trực chuẩn đầy đủ cho trước của L^2) cho ứng dãy $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l^2$. Sự tương ứng ấy có thể thực hiện được là nhờ $x \in L^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 < \infty$ theo Định lý 4.

Trước đây cơ học lượng tử đã ra đời dưới hình thức hai lý thuyết bề ngoài có vẻ khác nhau: một của Heisenberg và một của Schrödinger. Nhưng về sau Schrödinger đã chứng minh được sự tương đương giữa hai lý thuyết ấy. Về phương diện toán học, sự khác nhau chỉ là ở chỗ Heisenberg dùng không gian l^2, còn Schrödinger dùng L^2.

4. PHIẾM HÀM TUYẾN TÍNH VÀ SONG TUYẾN TÍNH TRÊN KHÔNG GIAN HILBERT

4.1. DẠNG TỔNG QUÁT CỦA PHIẾM HÀM TUYẾN TÍNH LIÊN TỤC TRÊN KHÔNG GIAN HILBERT. Trong ví dụ 1) ở mục 4.2, Chương 5, ta đã thấy rằng dạng tổng quát của một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathbb{R}^k$ là $f(x) = (a, x)$, trong đó a là một vectơ nào đó của $\mathbb{R}^k$ và $\|f\| = \|a\|$. Mở rộng sự kiện đó vào không gian Hilbert, ta được định lý Riesz sau đây có ý nghĩa rất cơ bản trong toàn bộ lý thuyết không gian Hilbert.

Định lý 5. (F. Riesz). *Với mỗi vectơ a cố định thuộc một không gian Hilbert X, hệ thức*

$$f(x) = (a, x) \tag{10}$$

xác định một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ trên không gian X, với

$$\|f\| = \|a\|. \tag{11}$$

Ngược lại, bất kỳ phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ nào trên một không gian Hilbert X cũng đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng (10) trong đó a là một vectơ của X thỏa mãn (11).

Chứng minh. Phần thứ nhất của định lý không có gì khó vì $f(x) = (a, x)$ rõ ràng là một phiếm hàm tuyến tính và do

$$|f(x)| = |(a, x)| \leq \|a\|.\|x\| \tag{12}$$
$$|f(a)| = (a, a) = \|a\|.\|a\| \tag{13}$$

nên phiếm hàm ấy bị chặn và thỏa mãn (11).

Để chứng minh phần ngược lại ta xét một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ trên một không gian Hilbert X. Tập hợp $M = \{x \in X : f(x) = 0\}$ rõ ràng là một không gian con đóng của X. Nếu $M^{\perp} = \{0\}$ thì dựa vào cách phân tích $x = y + z$, với $y \in M$, $z \in M^{\perp}$ (Định lý 1), ta thấy rằng $z = 0$, cho nên $f(x) = f(y) = 0$ với mọi $x \in X$, do đó $f(x) = (0, x)$, nghĩa là ta có cách biểu diễn (10) với $a = 0$. Vậy chỉ còn phải xét trường hợp $M^{\perp} \neq \{0\}$, tức là tồn tại một $x_0 \in M^{\perp}$, $x_0 \neq 0$. Ta có $f(x_0) \neq 0$, nên vectơ $a = \frac{f(x_0)}{(x_0, x_0)} x_0 \neq 0$. Với mọi $x \in X$, $y = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \in M$ vì $f(y) = f(x) - \frac{f(x)}{f(x_0)} f(x_0) = 0$. Mà $x_0 \in M^{\perp}$, vậy $(y, x_0) = 0$, tức là

$$\left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0, x_0\right) = (x, x_0) - \frac{f(x)}{f(x_0)} (x_0, x_0) = 0,$$

hay

$$f(x) = \left(\frac{f(x_0)}{(x_0, x_0)} x_0, x\right) = (a, x).$$

Thành thử $f(x)$ có dạng (10). Cách biểu diễn đó là duy nhất, vì nếu $f(x) = (a', x)$ thì $(a - a', x) = 0$ với mọi $x \in X$, do đó $(a - a', a - a') = 0$, nghĩa là $a - a' = 0$. Cuối cùng do (12) và (13) nên phải có (11) như trên đã thấy. □

Định lý vừa chứng minh cho phép lập một tương ứng 1-1: $f \leftrightarrow a$ giữa các phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên X và các vectơ $a \in X$.

Tương ứng đó là một phép đẳng cự tuyến tính, cho nên nếu ta đồng nhất phiếm hàm f với vectơ a sinh ra nó thì ta có $X^* = X$, nghĩa là: *không gian Hilbert trùng với không gian liên hợp của nó* (xê xích một phép đẳng cấu).

Nói riêng, không gian L^2 đẳng cấu với liên hợp của nó. Kết quả này đã được chứng minh trực tiếp ở Chương 5, mục 4.2.

4.2. PHIẾM HÀM SONG TUYẾN TÍNH TRÊN KHÔNG GIAN HILBERT. Từ định lý Riesz ta suy ra hệ quả quan trọng dưới đây.

Cho $f(x, y)$ là một phiếm hàm song tuyến tính liên tục trên không gian Hilbert X. Với mỗi x cố định $f(x, y)$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục theo y, cho nên theo định lý trước, tồn tại một vectơ xác định duy nhất, được kí hiệu là Ax (vì nó phụ thuộc x), sao cho với mọi $y \in X$:

$$f(x, y) = (Ax, y). \tag{14}$$

Có thể thấy ngay A là một toán tử tuyến tính trong X. Thật vậy, nếu $x_1, x_2 \in X$ thì $f(x_1, y) = (Ax_1, y)$, $f(x_2) = (Ax_2, y)$ cho nên $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = (\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2, y)$, và do Ax được xác định duy nhất với mỗi x nên đẳng thức này chứng tỏ $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2$. Mặt khác ta có (Chương 5, mục 4.3)

$$|(Ax, y)| = |f(x, y)| \leq \|f\| . \|y\| . \|x\|, \tag{15}$$

và cho $y = Ax$ ta được

$$(Ax, Ax) \leq \|f\| . \|Ax\| . \|x\|,$$

hay $\|Ax\| \leq \|f\| . \|x\|$, chứng tỏ rằng toán tử A bị chặn (do đó liên tục) và $\|A\| \leq \|f\|$. Nhưng ta lại có theo bất đẳng thức Schwarz

$$|(f(x, y)| = |(Ax, y)| \leq \|Ax\| \, \|y\| \leq \|A\| \, \|x\| \, \|y\|, \tag{16}$$

từ đó $\|f\| \leq \|A\|$. Vậy:

$$\|f\| = \|A\|. \tag{17}$$

Ngược lại, nếu cho trước toán tử tuyến tính liên tục A thì công thức (14) xác định một phiếm hàm song tuyến tính $f(x, y)$ và từ (16) và (15) ta suy ra (17) như trên. Thành thử :

Hệ quả: *Mỗi toán tử tuyến tính liên tục A trong không gian Hilbert X xác định theo (14) một phiếm hàm song tuyến tính liên tục $f(x,y)$ nghiệm đúng (17). Ngược lại bất kỳ phiếm hàm song tuyến tính liên tục $f(x,y)$ nào trên X cũng có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng (14) trong đó A là một toán tử tuyến tính liên tục trên X thỏa mãn điều kiện (17).*

Như vậy có thể lập một tương ứng 1-1: $f \leftrightarrow A$ giữa các phiếm hàm song tuyến tính liên tục f và các toán tử tuyến tính liên tục A trong không gian Hilbert.

Ta cũng chú ý tính chất sau đây:

Nếu một phiếm hàm song tuyến tính $f(x,y)$ trong một không gian Hilbert là đối xứng, tức là $f(x,y) = f(y,x)$ với mọi x, y thì chuẩn của nó bằng

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x,x)|. \tag{18}$$

Thật vậy, như đã biết (Chương 5, mục 4.3)

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |f(x,y)| \tag{19}$$

cho nên gọi K là vế phải của (18) ta có $K \leq \|f\|$, và chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ngược lại. Với mọi x, y : $f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) = 2f(x,y) + 2(y,x)$ và do $f(x,y)$ đối xứng ta có

$$f(x,y) = \frac{1}{4}[f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y)].$$

Nhưng theo định nghĩa của K thì với mọi z : $\left|f\left(\frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|}\right)\right| \leq K$ hay $|f(z,z)| \leq K\|z\|^2$ nên, kết hợp với đẳng thức bình hành:

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{4}K(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \frac{1}{2}K(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Nói riêng với $\|x\| = \|y\| = 1$ ta sẽ có $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}K(1+1) = K$, cho nên, theo (19), $\|f\| \leq K$.

5. TOÁN TỬ ĐỐI XỨNG HOÀN TOÀN LIÊN TỤC

5.1. TOÁN TỬ ĐỐI XỨNG, TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG. Cho một toán tử tuyến tính liên tục A trong không gian Hilbert X. Như đã thấy trên, (Ax, y) là một phiếm hàm song tuyến tính liên tục, cho nên có một toán tử tuyến tính liên tục duy nhất A^* để cho

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \tag{20}$$

Toán tử A^* gọi là *toán tử liên hợp (hay toán tử phó)* của A. Vì $\|A^*\|$ bằng chuẩn của phiếm hàm (Ax, y), mà chuẩn của phiếm hàm này lại bằng $\|A\|$ nên

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Ta cũng có thể chứng minh dễ dàng các tính chất sau đây:

(i) $(A^*)^* = A$
(ii) $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.
(iii) $(AB)^* = B^*A^*$.

Thật vậy, $(A^*y, x) = (y, (A^*)^*x)$ và so sánh với (20) ta rút ra $Ax = (A^*)^*x$ với mọi x, tức là $A = (A^*)^*$. Tính chất (ii) không có gì khó khăn. Còn (iii) chẳng qua là hệ quả của các đẳng thức $(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y)$.

Một toán tử tuyến tính liên tục A gọi là *đối xứng* nếu ta có với mọi x, y:

$$(Ax, y) = (x, Ay). \tag{21}$$

Đương nhiên khi ấy $A = A^*$ cho nên A cũng gọi là *toán tử tự liên hợp* (hay tự phó).

Chẳng hạn *toán tử chiếu* lên một không gian con M, tức là toán tử P biến mỗi vectơ x thành hình chiếu Px của nó lên M, là một toán tử đối xứng, vì với mọi x, y ta có $x = x' + x''$, $y = y' + y''$ với $x', y' \in M$, $x'', y'' \in M^\perp$, cho nên

$$(Px, y) = (x', y) = (x', y') = (x, y') = (x, Py).$$

Đẳng thức (21) cho thấy rằng phiếm hàm song tuyến tính $f(x, y) = (Ax, y)$ là đối xứng. Do đó, theo kết quả cuối tiết trước: nếu A là toán tử đối xứng thì

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \tag{22}$$

Một không gian con $M \subset X$ gọi là *bất biến* đối với một toán tử A khi nào $Ax \in M$ với mọi $x \in M$.

Dĩ nhiên, X và $\{0\}$ là hai không gian bất biến đối với mọi toán tử. Trong nhiều vấn đề người ta cần biết ngoài hai không gian con bất biến tầm thường đó ra, còn có những không gian con bất biến nào khác đối với một toán tử cho trước.

Ta nói một số λ là *trị riêng* của toán tử A, nếu phương trình $Ax = \lambda x$ có nghiệm x không tầm thường (nghĩa là $x \neq 0$). Khi ấy nghiệm x này gọi là một *vectơ riêng của* A, ứng với trị riêng λ.

I. *Tập hợp tất cả các vectơ riêng của toán tử tuyến tính liên tục A ứng với cùng một trị riêng λ làm thành (cùng với phần tử 0) một không gian con đóng của X bất biến đối với A. Không gian con này gọi là* không gian con riêng *ứng với trị riêng* λ.

Thật vậy, nếu $Ax = \lambda x, Ay = \lambda y$ thì $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta By = \lambda(\alpha x + \beta y)$, chứng tỏ rằng $\alpha x + \beta y$ cũng là vectơ riêng với trị riêng λ, miễn là nó $\neq 0$. Mặt khác nếu $Ax_n = \lambda x_n$, và $x_n \to x$, thì $\lambda x_n \to \lambda x$, $Ax_n \to Ax$, cho nên $Ax = \lambda x$, và x cũng là vectơ riêng ứng với trị riêng λ.

II. *Nếu A là một toán tử đối xứng thì các vectơ riêng của A ứng với hai trị riêng khác nhau bao giờ cũng trực giao với nhau.*

Do đó hai không gian con riêng khác nhau trực giao với nhau.

Thật vậy, cho λ, μ là hai trị riêng khác nhau, x, y là hai vectơ riêng ứng với chúng: $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$. Vì A là đối xứng: $(Ax, y) = (x, Ay)$ nên $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$ hay $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$, do đó $(x, y) = 0$.

III. *Nếu A là một toán tử đối xứng thì phần bù trực giao của mọi không gian con bất biến đối với A cũng bất biến đối với A.*

Thật vậy, cho M là không gian con bất biến đối với A, $M^\perp$ là phần bù trực giao của M. Với mọi $x \in M$, $y \in M^\perp$ ta có $(x, Ay) =$

$(Ax, y) = 0$ vì $Ax \in M$. Vậy Ay trực giao với mọi vectơ M, tức là $Ay \in M^{\perp}$, chứng tỏ $M^{\perp}$ bất biến.

Vấn đề phân tích theo vectơ riêng nảy ra trong rất nhiều lĩnh vực toán học. Dưới dạng đơn giản nhất, đó là việc qui một mặt bậc hai về trục chính, cũng tức là đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc. Ta đã biết rằng vấn đề này có cách giải quyết trọn vẹn, nhờ định lý cơ bản trong đại số tuyến tính về sự tồn tại cho mọi toán tử đối xứng A trong không gian n chiều một hệ n vectơ riêng $e_1, e_2, ..., e_n$ làm thành một hệ trực giao đầy đủ. Nhờ định lý này nếu $f(x)$ là dạng toàn phương liên hệ với A bởi $f(x) = (Ax, x)$ thì với mọi x:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad Ax = \sum_{i=1}^{n} \xi_i Ae_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \lambda_i e_i$$

cho nên

$$f(x) = (Ax, x) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \xi_i \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2$$

đó chính là dạng chính tắc cần tìm cho $f(x)$.

Nhiều bài toán quan trọng về cơ học, vật lý cũng dẫn tới vấn đề phân tích theo vectơ riêng cho các toán tử trong không gian Hilbert vô số chiều. Nhưng ở đây vấn đề phức tạp hơn là vì không phải mọi toán tử đối xứng đều có một hệ trực giao đầy đủ các vectơ riêng như trong không gian hữu hạn chiều. Cho nên để mở rộng các kết quả đã có trong đại số tuyến tính vào không gian vô số chiều, người ta chỉ xét một lớp toán tử đối xứng tương đối hẹp (nhưng đủ quan trọng về lý thuyết và ứng dụng), đó là các toán tử đối xứng *hoàn toàn liên tục* mà sau đây ta sẽ khảo sát.

5.2. TOÁN TỬ HOÀN TOÀN LIÊN TỤC. Nếu A là một toán tử tuyến tính liên tục trong không gian Hilbert X thì $\|x\| \leq K$ kéo theo $\|Ax\| \leq \|A\|K$, nghĩa là A biến mỗi tập bị chặn thành một tập bị chặn.

Ta nói một toán tử tuyến tính A trong không gian Hilbert X là *hoàn toàn liên tục* (triệt để liên tục) nếu nó biến một tập bị chặn thành một tập hoàn toàn bị chặn. Vì không gian Hilbert đủ, nên một tập con đóng của nó là hoàn toàn bị chặn khi và chỉ khi nó là compac (Chương 2, Định lý 9). Vậy cũng có thể nói một toán tử tuyến tính A là hoàn toàn liên tục nếu nó biến mỗi tập bị chặn, đóng, thành tập compac nghĩa là

nếu $\|x_n\| \leq K$ $(n = 1, 2, ...)$ kéo theo sự tồn tại một dãy $\{Ax_{n_k}\}$ hội tụ.

Rõ ràng một toán tử hoàn toàn liên tục thì cũng liên tục (tức là bị chặn). Mặt khác một toán tử A liên tục mà miền trị $\mathrm{Im}A$ của nó là một không gian con hữu hạn chiều của X thì cũng hoàn toàn liên tục, vì không gian con đó đẳng cấu với một không gian Euclide hữu hạn chiều (Hệ quả 2, Định lý 4), mà trong không gian Euclide hữu hạn chiều thì các tập bị chặn cũng hoàn toàn bị chặn.

Một toán tử tuyến tính liên tục A mà miền trị $\mathrm{Im}A$ của nó là một không gian hữu hạn chiều, gọi là một toán tử hạn chiều hay *toán tử thoái hoá* (suy biến). Như vậy các toán tử thoái hoá đều là hoàn toàn liên tục. Nói riêng các toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^k$ vào $\mathbb{R}^m$ đều hoàn toàn liên tục. Thành thử lớp các toán tử hoàn toàn liên tục tuy hẹp hơn lớp các toán tử liên tục trong không gian vô số chiều, nhưng vẫn bao hàm lớp các toán tử (tuyến tính) trong không gian hữu hạn chiều.

Điều kiện hoàn toàn liên tục làm cho toán tử có một số tính chất gần gũi các toán tử trong không gian hữu hạn chiều, chẳng hạn:

Đối với một toán tử hoàn toàn liên tục A mọi hệ trực chuẩn gồm những vectơ riêng ứng với những trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn hơn một số dương c bất kỳ cho trước, đều phải hữu hạn.

Nói cách khác, không thể có một hệ trực chuẩn vô hạn $\{e_n\}$, mà mỗi e_n là vectơ riêng của A ứng với trị riêng λ_n và $|\lambda_n| > c$ với mọi n. Thật vậy trong trường hợp đó ta sẽ có $\|\frac{1}{|\lambda_n|}e_n\| = \frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{1}{c}$, tức là dãy $\left\{\frac{1}{\lambda_n}e_n\right\}$ bị chặn, cho nên phải có một dãy $\left\{A\left(\frac{1}{\lambda_{n_k}}e_{n_k}\right)\right\}$ hội tụ. Nhưng $Ae_{n_k} = \lambda_{n_k}e_{n_k}$, vậy dãy e_{n_k} hội tụ, do đó là một dãy cơ bản, mà điều này không thể xảy ra được, vì với mọi k, h ta có $\|e_{n_k} - e_{n_h}\|^2 = \|e_{n_k}\|^2 + \|e_{n_h}\|^2 = 2$, không dần tới 0 khi $k, h \to \infty$.

Từ đó suy ra: *bất kỳ không gian con riêng nào ứng với một trị riêng khác 0 của một toán tử hoàn toàn liên tục cũng phải có thứ nguyên hữu hạn*. Vì nếu trái lại thì trong không gian đó sẽ có một hệ độc lập tuyến tính vô hạn mà sau khi trực hoá sẽ thành một hệ trực chuẩn vô hạn, gồm những vectơ riêng ứng với cùng một trị riêng $\neq 0$.

Ta có thể e rằng như thế thì lớp toán tử hoàn toàn liên tục quá hẹp. Nhưng các tính chất sau đây cho thấy rằng lớp đó vẫn khá rộng.

I. *Nếu toán tử A hoàn toàn liên tục, toán tử B liên tục (tức là bị chặn) thì các toán tử AB, BA cũng hoàn toàn liên tục.*

Thật vậy, từ $\|x_n\| \leq K$ ta suy ra sự tồn tại một dãy $\{Ax_{n_k}\}$ hội tụ, và do B liên tục nên dãy $\{BAx_{n_k}\}$ cũng hội tụ.

Vậy BA hoàn toàn liên tục. Mặt khác từ $\|x_n\| \leq K$ ta suy ra $\|Bx_n\| \leq \|B\|.K$, do đó phải có một dãy $\{ABx_{n_k}\}$ hội tụ. Vậy AB cũng hoàn toàn liên tục.

II. *Nếu toán tử A hoàn toàn liên tục thì các toán tử A^*, AA^*, A^*A cũng hoàn toàn liên tục.*

Việc AA^*, A^*A cũng hoàn toàn liên tục suy ra ngay từ tính chất I và từ $\|A^*\| = \|A\|$ (do đó A^* bị chặn).

Ta hãy chứng minh A^* hoàn toàn liên tục. Nếu $\|x_n\| \leq K$ thì vì AA^* hoàn toàn liên tục nên có một dãy $\{AA^*x_{n_k}\}$ hội tụ. Ta có

$$\begin{aligned}\|A^*x_{n_k} - A^*x_{n_h}\|^2 &= (A^*x_{n_k} - A^*x_{n_h}, A^*x_{n_k} - A^*x_{n_h}) \\ &= (AA^*x_{n_k} - AA^*x_{n_h}, x_{n_k} - x_{n_h}) \\ &\leq \|AA^*x_{n_k} - AA^*x_{n_h}\| \, \|x_{n_k} - x_{n_h}\| \to 0 \ (k, h \to \infty),\end{aligned}$$

vì rằng $\{AA^*x_{n_k}\}$ đã hội tụ thì phải là dãy cơ bản và $\|x_{n_k} - x_{n_h}\| \leq \|x_{n_k}\| + \|x_{n_h}\| \leq 2K$. Vậy $\{A^*x_{n_k}\}$ là dãy cơ bản, do đó hội tụ (X là không gian đủ!).

III. *Nếu các toán tử A hoàn toàn liên tục và $\|A_n - A\| \to 0$ thì toán tử A cũng hoàn toàn liên tục.*

Thật vậy, cho một tập đóng và bị chặn $M \subset X$, chẳng hạn $\|x\| \leq K$ với mọi $x \in M$. Vì A_n hoàn toàn liên tục nên các tập $V_n = \{A_nx : x \in M\}$ compac. Với $\varepsilon > 0$ cho trước ta có thể lấy n_0 đủ lớn để $\|A_{n_0} - A\| < \frac{\varepsilon}{K}$.

Khi ấy $\|A_{n_0}x - Ax\| \leq \|A_{n_0} - A\|.\|x\| < \frac{\varepsilon}{K}.K = \varepsilon$ với mọi x, nên V_{n_0} là một ε-lưới compac cho $V = \{Ax : x \in M\}$. Vậy bản thân V cũng compac. Do đó A hoàn toàn liên tục.

5.3. TOÁN TỬ ĐỐI XỨNG HOÀN TOÀN LIÊN TỤC. Bây giờ ta xét một toán tử A vừa đối xứng vừa hoàn toàn liên tục trong không gian Hilbert X.

Có thể đoán trước rằng một toán tử như thế sẽ có một số tính chất cơ bản quen thuộc của toán tử đối xứng trong $\mathbb{R}^k$.

Cụ thể là:

I. *Một toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục A bao giờ cũng có một trị riêng λ với $|\lambda| = \|A\|$.*

Thật vậy vì A đối xứng nên, như đã thấy trên

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Ta hãy lấy một dãy x_n với $\|x_n\| = 1$, $|(Ax_n, x_n)| \to \|A\|$. Bằng cách thay, nếu cần, dãy x_n bởi một dãy con, ta có thể giả thiết rằng bản thân dãy (Ax_n, x_n) hội tụ, chẳng hạn $(Ax_n, x_n) \to \lambda$ ($\lambda = \pm\|A\|$). Ta có:

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \|Ax_n - \lambda x_n\|^2 = (Ax_n - \lambda x_n,\ Ax_n - \lambda x_n) = \\ =\ & \|Ax_n\|^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \lambda^2\|x_n\|^2 \leq \\ \leq\ & \|A\|^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \lambda^2 \to \lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = 0. \end{aligned}$$

Vậy $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$. Nhưng do A hoàn toàn liên tục nên có một dãy $\{Ax_{n_k}\}$ hội tụ, vì vậy dãy $\{\lambda x_{n_k}\}$ hội tụ và dãy $\{x_{n_k}\}$ cũng hội tụ, chẳng hạn $x_{n_k} \to e$. Ta có $Ae - \lambda e = \lim_{n\to\infty}(Ax_n - \lambda x_n) = 0$, chứng tỏ rằng λ là một trị riêng và e là một vectơ riêng.

II. *Tập các trị riêng của một toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục cùng lắm là đếm được. Nếu là đếm được thì tập đó làm thành một dãy hội tụ đến 0.*

Thật vậy, theo tính chất chung của các toán tử đối xứng, các vectơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau phải trực giao. Do đó, với mỗi n cho trước chỉ có một số hữu hạn trị riêng có giá trị tuyệt đối vượt quá $\frac{1}{n}$ (vì nếu có vô số trị riêng ấy thì sẽ có một hệ trực chuẩn vô hạn vectơ riêng tương ứng trái với tính chất các toán tử hoàn toàn liên tục). Cho nên chỉ có một số hữu hạn trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1, rồi chỉ có một số hữu hạn trị riêng có giá trị tuyệt đối gồm giữa 1 và $\frac{1}{2}$, chỉ có một số hữu hạn trị riêng có giá trị tuyệt đối gồm giữa $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$, v.v...

Dựa vào hai tính chất trên, ta có thể chứng minh mệnh đề cơ bản sau đây:

Định lý 6. (Hilbert) *Nếu A là một toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục thì mọi $x \in X$ đều có thể biểu diễn thành một tổng trực giao:*

$$x = \sum_j (x, e_j)e_j + z \tag{23}$$

trong đó mỗi e_j là một vectơ riêng ứng với một trị riêng khác 0, và $Az = 0$. Do đó mọi phần tử có dạng Ax đều phân tích ra được theo các vectơ riêng ứng với các trị riêng khác 0:

$$Ax = \sum_j (Ax, e_j)e_j = \sum_j \lambda_j (x, e_j)e_j. \tag{24}$$

Chứng minh. Đương nhiên ta có thể coi như $\|A\| > 0$, vì trường hợp $A = 0$ tầm thường. Theo trên, tập các trị riêng khác 0 của A không rỗng và cùng lắm là đếm được, mặt khác theo tính chất toán tử hoàn toàn liên tục, không gian con riêng ứng với mỗi trị riêng ấy là hữu hạn chiều. Ta hãy lấy trong mỗi không gian con riêng này một cơ sở trực chuẩn (gồm một số hữu hạn phần tử), và kí hiệu $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ là hợp của tất cả các cơ sở có được như vậy. Theo tính chất của toán tử đối xứng (tính chất II, mục 5.1), $\{e_n\}$ cũng là một hệ trực chuẩn. Cho λ_n là trị riêng ứng với e_n (nếu e_n, e_m cùng thuộc một không gian con riêng thì $\lambda_n = \lambda_m$). Như vậy dãy $\{\lambda_n\}$ bao gồm tất cả các trị riêng khác 0, mỗi trị riêng được lặp lại một số lần bằng thứ nguyên của không gian con riêng tương ứng. Gọi M là bao tuyến tính của hệ $\{e_n\}$, N là phần bù trực giao của nó. Vì M đương nhiên là không gian con bất biến đối với A, nên theo tính chất của toán tử đối xứng (tính chất III, mục 5.1), N cũng bất biến đối với A. Mà N là một không gian con đóng của X, nên bản thân nó cũng là một không gian Hilbert. Vậy ta có thể xét toán tử A thu hẹp trong N: dĩ nhiên trong N toán tử A cũng đối xứng và hoàn toàn liên tục nên theo tính chất I ở trên nó phải có một trị riêng λ với $|\lambda| = \|A\|_N$ (chuẩn của A xét trong N). Nhưng theo cách xây dựng của ta, dãy $\{\lambda_n\}$ đã bao gồm tất cả các trị riêng khác 0 rồi, cho nên $\lambda = 0$, tức là $\|A\|_N = 0$. Do đó $Az = 0$ với mọi $z \in N$. Đến đây ta có thể hoàn thành chứng minh định lý một cách dễ dàng. Thật vậy cho một vectơ bất kỳ $x \in X$. Vì hệ $\{e_n\}$ là trực chuẩn nên chuỗi Fourier $\sum_j (x, e_j)e_j$ của x hội tụ và $z = x - \sum_j (x, e_j)e_j$ trực giao với mọi e_n (mục 3.1, tính chất II). Vậy $z \in N$ và do đó $Az = 0$. Như thế (23) đã được xác lập, và áp dụng toán tử A cho hai vế của nó ta suy ra (24). □

Hệ quả. (chính hệ quả này cũng có khi gọi là Định lý Hilbert). *Trong không gian Hilbert tách được, mọi toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục đều có một hệ trực chuẩn đầy đủ vectơ riêng.*

Thật vậy không gian con N vừa xác định ở trên là không gian con riêng ứng với trị riêng 0 (nếu $N \neq \{0\}$). Vì X tách được nên N cũng tách được và có một hệ trực chuẩn đầy đủ $\{f_m\}$. Hệ này cùng với $\{e_n\}$ lập thành một hệ trực chuẩn đầy đủ trong X (vì nếu x trực giao với mọi e_n và mọi f_m thì theo (23) $x = 0$). □

Sau cùng, dựa vào những kết quả trên ta có thể chứng minh định lý sau đây, cho thấy rằng bất cứ toán tử hoàn toàn liên tục nào cũng có thể xấp xỉ, với độ chính xác tuỳ ý, bởi một toán tử thoái hoá.

Định lý 7. *Một toán tử tuyến tính A trong không gian Hilbert là hoàn toàn liên tục khi và chỉ khi nó là giới hạn (theo chuẩn) của một dãy toán tử thoái hoá.*

Chứng minh. Phần "khi" đã rõ, vì mỗi toán tử thoái hoá là hoàn toàn liên tục và giới hạn của một dãy toán tử hoàn toàn liên tục cũng hoàn toàn liên tục (mục 5.2). Vậy chỉ cần chứng minh phần "chỉ khi".

Cho A là một toán tử hoàn toàn liên tục. Toán tử A^*A cũng hoàn toàn liên tục (mục 5.2) và đối xứng vì

$$(A^*Ax, y) = (Ax, Ay) = (x, A^*Ay).$$

Vậy theo Định lý Hilbert có một hệ trực chuẩn vectơ riêng $\{e_n\}$ của A^*A sao cho $A^*Ae_n = \lambda_n e_n$, $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$ và với mọi $x \in X$ ta có

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j)e_j + z$$

trong đó $A^*Az = 0$. Áp dụng toán tử A cho hai vế của đẳng thức trên và chú ý rằng $Az = 0$ vì $(Az, Az) = (A^*Az, z) = 0$ ta được

$$Ax = \sum_{j=1} (x, e_j)Ae_j.$$

Các hệ thức $(Ae_i, Ae_j) = (A^*Ae_i, e_j) = \lambda_j(e_i, e_j)$ chứng tỏ rằng các vectơ Ae_j làm thành một hệ trực giao và $\|Ae_j\|^2 = \lambda_j$. Ta hãy xác định toán tử A_n bởi

$$A_n x = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) A e_j.$$

Rõ ràng A_n là toán tử thoái hoá vì miền trị của nó nằm trong không gian n chiều sinh bởi các Ae_j $(j = 1, 2, ..., n)$. Vì $\|Ae_j\|^2 = \lambda_j \to 0$ $(j \to \infty)$ ta có thể chọn n đủ lớn để $\|Ae_j\|^2 < \varepsilon^2$ với mọi $j > n$. Khi ấy

$$\begin{aligned} \|(A - A_n)x\|^2 &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |(x, e_j) A e_j|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 . \|Ae_j\|^2 \\ &\leq \varepsilon^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} |(x, e_j)| \leq \varepsilon^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

cho nên $\|A - A_n\| \leq \varepsilon$. Do đó $\|A - A_n\| \to 0$. □

Chú ý. Chứng minh vừa rồi cho thấy rằng bất cứ toán tử hoàn toàn liên tục nào cũng có dạng

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) A e_j \tag{25}$$

trong đó $\{e_j\}$ là một hệ trực chuẩn, $\{Ae_j\}$ là một hệ trực giao và $Ae_j \to 0$ $(j \to \infty)$. Cách biểu diễn đó cũng là đặc trưng của toán tử hoàn toàn liên tục, vì nếu A có thể biểu diễn dưới dạng đó, thì đoạn cuối chứng minh trên đã cho thấy rằng $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, trong đó A_n là toán tử thoái hoá xác định bởi $A_n x = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) A e_j$.

Đặt $Ae_j = \lambda_j e_j$, với $\|e_j\| = 1$, ta có thể viết

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (x, e_j) e_j.$$

Công thức này mở rộng công thức (24) của toán tử hoàn toàn liên tục đối xứng.

6. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN

Nhiều vấn đề toán học (phương trình vi phân với điều kiện ban đầu hay điều kiện biên), cơ học, vật lý, dẫn đến những phương trình trong đó hàm chưa biết ở dưới dấu tích phân. Những phương trình ấy gọi là *phương trình tích phân.*

Sau đây chúng ta sẽ vận dụng lý thuyết toán tử trong không gian Hilbert vào việc khảo sát các phương trình tích phân thường gặp nhất, gọi là *phương trình Fredhom* loại hai, có dạng như sau:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds \tag{26}$$

trong đó $\varphi(x)$ là hàm chưa biết, $f(x), K(x,s)$ là những hàm cho trước. Nếu $f(x) = 0$ thì phương trình được gọi là *thuần nhất*.

Phương trình Fredhom loại một là phương trình có dạng

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x).$$

Lý thuyết các phương trình này phức tạp hơn lý thuyết phương trình Fredhom loại hai, mà lại không có ý nghĩa nhiều lắm nên sẽ không được xét tới ở đây.

6.1. TOÁN TỬ TÍCH PHÂN. Cho một hàm hai biến $K(x,s)$ có bình phương khả tích nghĩa là

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,s)dxds = N^2 < \infty. \tag{27}$$

Ta hãy xác định trong $L^2_{[a,b]}$ một toán tử A bởi công thức

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds. \tag{28}$$

Toán tử này gọi là *toán tử tích phân Fredhom sinh bởi hạch* $K(x,s)$.

Trước hết, có thể thấy rằng đó là một toán tử tuyến tính liên tục trong $L^2_{[a,b]}$.

Thật vậy cho $\varphi(x) \in L^2_{[a,b]}$. Do (27) nên theo định lý Fubini, hàm $K^2(x,s)$ khả tích theo s, với hầu hết mọi x, nghĩa là $K(x,s)$, xét như một hàm của s, thuộc $L^2_{[a,b]}$. Do đó tích phân (28), tức là tích vô hướng của $K(x,s)$ và $\varphi(x)$, tồn tại với hầu hết mọi x. Cũng theo Định lý Fubini, hàm

$$k^2(x) = \int_a^b K^2(x,s)ds$$

khả tích theo x và tích phân của $k^2(x)$ (từ a đến b) bằng $N^2 < \infty$, cho nên $k(x) \in L^2_{[a,b]}$. Theo bất đẳng thức Schwarz-Buniakowski áp dụng cho tích vô hướng (28) ta có:

$$|A\varphi(x)| \leq (\int_a^b K^2(x,s)ds)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b \varphi^2(s)ds)^{\frac{1}{2}} = \|\varphi\|.k(x).$$

Vậy $A\varphi(x) \in L^2_{[a,b]}$, nghĩa là A quả là một toán tử trong $L^2_{[a,b]}$. Toán tử ấy dĩ nhiên là tuyến tính, và do

$$\int_a^b |A\varphi(x)|^2 dx \leq \|\varphi\|^2 . \int_a^b k^2(x)dx = N^2\|\varphi\|^2$$

tức là

$$\|A\varphi\| \leq N\|\varphi\|$$

nên A là toán tử bị chặn (liên tục), với

$$\|A\| \leq N = (\int_a^b \int_a^b K^2(x,s)dxds)^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

Định lý 8. *Toán tử Fredhom là một toán tử hoàn toàn liên tục trong* $L^2_{[a,b]}$.

Chứng minh. Trước hết ta xét trường hợp hạch $K(x,s)$ *thoái hoá*, nghĩa là có dạng

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^m p_i(x)q_i(s), \quad \text{với} \quad p_i, q_i \in L^2_{[a,b]}.$$

Khi ấy:

$$A\varphi = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = \sum_{i=1}^m p_i(x) \int_a^b q_i(s)\varphi(s)ds = \sum_{i=1}^m (\varphi, q_i)p_i$$

thành thử miền trị của A nằm trong không gian con sinh bởi m vectơ $p_i(x)$. Vậy A là toán tử thoái hoá, do đó hoàn toàn liên tục.

Trong trường hợp tổng quát ta sẽ chứng minh rằng:

Hạch $K(x,s)$ (với bình phương khả tích) là giới hạn, theo chuẩn trong $L^2_{[a,b]\times[a,b]}$ của một dãy hạch thoái hoá, và toán tử tích phân (28) sinh bởi hạch $K(x,s)$ là giới hạn của dãy toán tử thoái hoá tương ứng (do đó theo tính chất III ở mục 5.2, A là hoàn toàn liên tục.[1]

Cho $\{e_i\}$ là một hệ trực chuẩn đầy đủ trong $L^2_{[a,b]}$. Ta hãy xét hệ $\{e_i(x)e_j(s)\}$ trong không gian $L^2_{[a,b]\times[a,b]}$. Rõ ràng đó là một hệ trực giao, hơn nữa là hệ đầy đủ. Thật vậy giả sử $f(x,s)$ trực giao với mọi $e_i(x)e_j(s)$, tức là

$$\begin{aligned}(f_i, e_ie_j) &= \int_a^b\int_a^b f(x,s)e_i(x)e_j(s)dxds \\ &= \int_a^b e_i(x)\Big(\int_a^b f(x,s)e_j(s)ds\Big) = 0.\end{aligned}$$

Như thế hàm $\int_a^b f(x,s)e_j(s)ds$ trực giao với $e_i(x)$ trong $L^2_{[a,b]}$. Điều này đúng với mọi i, cho nên, do tính đầy đủ của hệ $\{e_i(x)\}$:

$$\int_a^b f(x,s)e_j(s)ds = 0 \text{ với hầu hết mọi } x.$$

Điều này đúng với mọi j, cho nên, do tính đầy đủ của hệ $\{e_j(s)\}$:

$$f(x,s) = 0 \text{ với hầu hết mọi } x, \text{ và mọi } s,$$

nghĩa là $f = 0$ trong $L^2_{[a,b]\times[a,b]}$. Vậy hệ $\{e_i(x)e_j(s)\}$ quả là đầy đủ trong không gian này. Mà $K(x,s)$ là một phần tử của không gian này (do giả thiết (27)), cho nên theo Định lý 3, $K(x,s)$ có thể phân tích thành:

$$K(x,s) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}e_i(x)e_j(s).$$

Điều này có nghĩa là:

$$\int_a^b\int_a^b [K(x,s) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_i(x)e_j(s)]^2 dxds \to 0 (n,m\to\infty) \quad (30)$$

[1] $L^2_{[a,b]\times[a,b]}$ là không gian các hàm $f(x,s)$, xác định trong chữ nhật: $a \le x \le b$, $a \le s \le b$, và có bình phương khả tích.

Vậy $K(x,s)$ là giới hạn, trong $L^2_{[a,b]\times[a,b]}$ của dãy hạch thoái hoá

$$K_{m,n}(x,s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j(x)e_j(s)$$

và gọi $A_{m,n}$ là toán tử sinh bởi hạch $K_{m,n}(x,s)$ ta suy ra từ ước lượng (29) (áp dụng cho toán tử $A - A_{m,n}$) và từ (30): $\|A - A_{m,n}\| \to 0$. Định lý đã được chứng minh . □

Ta nói hạch $K(x,s)$ là *đối xứng* nếu:

$$K(x,s) = K(s,x) \tag{31}$$

hầu khắp nơi trong $[a,b]\times[a,b]$.

Định lý 9. *Toán tử Fredhom sinh bởi một hạch đối xứng là một toán tử đối xứng.*

Thật vậy, do (6) và định lý Fubini ta có:

$$\begin{aligned}(A\varphi,\psi) &= \int_a^b \Big(\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds\Big)\psi(x)dx = \\ &= \int_a^b \Big(\int_a^b K(s,x)\psi(x)dx\Big)\varphi(s)ds = (\varphi, A\psi).\end{aligned}$$

Ở đây, định lý Fubini áp dụng được vì $\varphi(s)\psi(x) \in L^2_{[a,b]\times[a,b]}$ và $K(x,s) \in L^2_{[a,b]\times[a,b]}$ cho nên tích vô hướng của hai hàm ấy tức là tích phân kép sau đây tồn tại:

$$\int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi(x)\psi(x)dsdx.$$

6.2. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN VỚI HẠCH ĐỐI XỨNG. Ta hãy áp dụng các kết quả vừa rồi để khảo sát phương trình:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds \tag{32}$$

trong đó $f(x), K(x,s)$ cho trước, và giả thiết: $f(x) \in L^2_{[a,b]}$, $K(x,s)$ đối xứng và có bình phương khả tích.

Phương trình này có thể viết lại dưới dạng trừu tượng:

$$\varphi = f + A\varphi \tag{33}$$

trong đó A là một toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục.

Như đã biết (mục 5.3), toán tử A có một hệ trực chuẩn đầy đủ vectơ riêng $\{e_n\}$ ($L^2_{[a,b]}$ tách được!) ứng với các trị riêng λ_n và $\lambda_n \to 0$ ($0 \to \infty$). Giả sử rằng bằng cách nào đó ta đã biết $\{e_n\}$ và $\{\lambda_n\}$. Khi ấy, muốn xác định φ chỉ cần biết các hệ số Fourier (φ, e_i) của nó đối với hệ $\{e_i\}$ vì $\varphi = \sum_i (\varphi, e_i) e_i$.

Vậy ta hãy xác định các (φ, e_i).

Với mỗi i ta có:

$$\begin{aligned}(\varphi, e_i) &= (f, e_i) + (A\varphi, e_i) \\ &= (f, e_i) + (\varphi, Ae_i) = (f, e_i) + \lambda_i(\varphi, e_i).\end{aligned} \tag{34}$$

Thành thử nếu $\lambda_i \neq 1$ thì

$$(\varphi, e_i) = \frac{(f, e_i)}{1 - \lambda_i}.$$

Còn nếu $\lambda_i = 1$ thì (34) cho thấy rằng hàm f cho trước phải thỏa mãn $(f, e_i) = 0$, nhưng khi ấy (34) không đặt điều kiện nào cả cho (φ, e_i).

Ta hãy chứng minh rằng với giả thiết $(f, e_i) = 0$ cho mọi e_i ứng với $\lambda_i = 1$, nghiệm của phương trình (33) là:

$$\varphi = \Sigma' \frac{(f, e_i)}{1 - \lambda_i} e_i + \Sigma'' \xi_i e_j \tag{35}$$

trong đó ξ_j là những số tuỳ ý, Σ' chỉ tổng số lấy theo các e_i có $\lambda_i \neq 1$, và Σ'' chỉ tổng lấy theo các e_j có $\lambda_j = 1$.

Vì $\lambda_i \to 0$ ($i \to \infty$) nên $M = \sup_i \frac{1}{1-\lambda_i} < \infty$, và

$$\Sigma' \left| \frac{(f, e_i)}{1 - \lambda_i} \right|^2 \leq M^2 \Sigma' |f(e_i)|^2 \leq M^2 \|f\|^2 < \infty.$$

Do đó chuỗi thứ nhất trong (35) hội tụ, (mục 2.1, tính chất VI), chẳng hạn cho φ' là tổng của chuỗi ấy. Còn tổng thứ hai trong (35) thì chỉ gồm một số hữu hạn hạng tử, vì theo tính chất của toán tử hoàn toàn liên tục (mục 2.2), chỉ có thể có một số hữu hạn e_j với $\lambda_j = 1$. Vậy tổng ấy bao giờ cũng xác định và bằng một phần tử φ''. Ta có:

$$\begin{aligned} A\varphi' &= \Sigma' \frac{(f, e_i)}{1-\lambda_i} Ae_i = \Sigma' \frac{(f, e_i)}{1-\lambda_i} \lambda_i e_i = \\ &= -\Sigma'(f, e_i)e_i + \Sigma' \frac{(f, e_i)}{1-\lambda_i} e_i = -f + \varphi' \\ A\varphi'' &= \Sigma'' \xi_i Ae_i = \Sigma'' \xi_i e_i = \varphi''. \end{aligned}$$

Cho nên

$$A\varphi = A\varphi' + A\varphi'' = -f + \varphi' + \varphi'' = -f + \varphi,$$

đó chính là điều cần chứng minh. Để ý rằng φ'' thuộc không gian con riêng ứng với trị riêng 1, ta có thể phát biểu:

Định lý 10. *Nếu A không có trị riêng nào bằng 1, thì phương trình (33) có một nghiệm duy nhất, với mọi f cho trước. Nếu A có trị riêng bằng 1 thì phương trình (33) chỉ có nghiệm khi f trực giao với không gian con riêng với trị riêng 1, và khi đó nghiệm được xác định xê xích một phần tử tuỳ ý của không gian con riêng này.*

Như vậy, việc giải phương trình tích phân (32) hoặc (33) trong trường hợp hạch đối xứng được qui về tìm các vectơ riêng và các trị riêng của toán tử A tương ứng.

6.3. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN VỚI HẠCH THOÁI HÓA. Để chuyển sang khảo sát các phương trình tích phân với hạch không đối xứng, ta chú ý sự kiện đã được chứng minh ở mục 6.1 là bất kỳ hạch nào (miễn là có bình phương khả tích) cũng có thể được xấp xỉ, với độ chính xác tuỳ ý, bởi một hạch thoái hoá có dạng:

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x) q_i(s), \; p_i, q_i \in L^2_{[a,b]}. \tag{36}$$

Dựa vào sự kiện đó, một phương trình tích phân với hạch bất kỳ (không nhất thiết đối xứng) có thể thay thế gần đúng bởi một phương trình tích phân với hạch thoái hoá. Vì vậy bước đầu tiên trong việc nghiên cứu của chúng ta là xét các phương trình có hạch thoái hoá.

Các phương trình này có thể khảo sát dễ dàng theo phương pháp sau đây.

Cho phương trình

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \tag{37}$$

với hạch $K(x,s)$ xác định bởi (36). Ta có

$$\varphi(x) - \sum_{i=1}^{m} p_i(x) \int_a^b q_i(s)\varphi(s)ds = f(x),$$

hay là

$$\varphi - \sum_{i=1}^{m} (q_i, \varphi)p_i = f. \tag{38}$$

Thành thử đặt

$$(q_i, \varphi) = \xi_i \tag{39}$$

ta có thể viết

$$\varphi = f + \sum_{i=1}^{m} \xi_i p_i. \tag{40}$$

Đem biểu thức này thay vào φ trong (39) và đặt

$$b_i = (q_i, f), \quad a_{ij} = (q_i, p_j)$$

ta được hệ phương trình đại số bậc nhất chứa m ẩn số:

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, \xi_i = b_i \ (i = 1, 2, ..., m). \tag{41}$$

Hệ phương trình này cho phép ta xác định các ξ_i và từ đó suy ra φ theo công thức (40).

Ta hãy xét sự liên hệ giữa các nghiệm φ của phương trình (38) với các nghiệm $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$ của hệ (41). Trước tiên có thể giả thiết rằng các $p_i(x)$, cũng như các $q_i(s)$, là độc lập tuyến tính (sự độc lập này hiểu theo nghĩa $L^2_{[a,b]}$, tức là các $p_i(x)$ là độc lập tuyến tính nếu: $\alpha_1 p_1(x) + \ldots + \alpha_m p_m(x) = 0$ hầu khắp nơi, kéo theo $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$). Vì rằng, nếu chẳng hạn các $p_i(x)$ không độc lập tuyến tính thì có một $p_{i_0}(x)$ là tổ hợp tuyến tính của các $p_i(x)$ khác, và đem thay

tổ hợp này vào $p_{i_0}(x)$ trong $K(x,s)$ ta sẽ được một biểu thức vẫn có dạng (36), nhưng trong đó sẽ bớt đi được $p_{i_0}(x)$; lấp lại phép toán đó một số lần cần thiết dĩ nhiên cuối cùng ta sẽ thu được một biểu thức có dạng (36) trong đó các $p_i(x)$, cũng như các $q_i(s)$ đều độc lập tuyến tính.

Với giả thiết đó, hệ thức (40) xác lập một phép tương ứng giữa tập các nghiệm φ của phương trình (38) với tập các nghiệm $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$ của hệ (41). Thật vậy, với mỗi nghiệm φ của (38), hệ thức (40) hoàn toàn xác định các ξ_i (nhờ các p_i độc lập tuyến tính), và các ξ_i này, như đã thấy trên, sẽ nghiệm đúng hệ (41). Ngược lại với mỗi nghiệm $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$ của hệ (41), hệ thức (40) hoàn toàn xác định φ, và từ (40) và (41) ta suy ra $(q_i, \varphi) = \xi_i$, tức là φ nghiệm đúng phương trình (38). Do đó việc khảo sát phương trình (38) hoàn toàn tương đương với việc khảo sát hệ phương trình (41).

Hơn nữa khi $f = 0$ thì hệ thức (40) trở thành $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \xi_i p_i$ và thực hiện một phép đẳng cấu giữa không gian tuyến tính tạo thành bởi các nghiệm của phương trình thuần nhất

$$\varphi - \sum_{i=1}^{m} (q_i, \varphi) p_i = 0 \tag{42}$$

với không gian tuyến tính các nghiệm của hệ thuần nhất

$$\xi_i - \sum_{i=1}^{m} q_{ij} \xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, ..., m) \tag{43}$$

Cùng với phương trình (37) ta hãy xét *phương trình liên hợp* của nó.

$$\psi(x) - \int_a^b K(s,x) \psi(s) ds = g(x) \tag{44}$$

có hạch $K(s,x)$ thay cho cho $K(x,s)$. Dễ thấy rằng toán tử

$$B\psi = \int_a^b K(s,x) \psi(s) ds$$

là liên hợp của toán tử

$$A\varphi = \int_a^b K(s,x) \varphi(s) ds,$$

tức là $B = A^*$. Thật vậy:

$$(A\varphi, \psi) = \int_a^b \Big(\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds \Big)\psi(x)dx =$$
$$= \int_a^b \varphi(x) \left\{ \int_a^b K(s,x)\psi(s)ds \right\} dx = (\varphi, B\psi).$$

(Ở đây ta đã chuyển từ tích phân thứ nhất sang tích phân thứ hai bằng cách đánh đổi vai trò của x và s, rồi đổi thứ tự lấy tích phân, điều này hợp pháp nhờ định lý Fubini).

Trong trường hợp đang xét, hạch $K(x,s)$ có dạng thoái hoá (36) thì phương trình liên hợp là:

$$\psi(x) - \sum_{i=1}^{m} q_i(x) \int_a^b p_i(s)\psi(s)ds = g(x)$$

hay là, dưới dạng trừu tượng

$$\psi - \sum_{i=1}^{m} (p_i, \psi)q_i = g. \tag{45}$$

Bằng lập luận tương tự như trước ta cũng thấy rằng việc khảo sát (45) hoàn toàn tương đương với việc khảo sát hệ phương trình đại số

$$\eta_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\eta_i = c_i \ (i = 1, 2, ..., m) \tag{46}$$

trong đó $a_{ji} = (p_i, q_j)$, $c_i = (p_i, g)$. Cụ thể là hệ thức $\psi = g + \sum_{i=1}^{m} \eta_i q_i$ xác lập một phép tương ứng 1-1 giữa tập các nghiệm ψ của phương trình (45) với tập các nghiệm $\eta = (\eta_1, ..., \eta_m)$ của hệ (46), và khi $g = 0$, xác lập một phép đẳng cấu giữa không gian tuyến tính tạo thành bởi các nghiệm của phương trình thuần nhất

$$\psi - \sum_{i=1}^{m} (p_i, \psi)q_i = 0 \tag{47}$$

với không gian tuyến tính các nghiệm của hệ thuần nhất

$$\eta_i - \sum_{i=1}^{m} a_{ji}\eta_j = 0 \ (i = 1, 2, ..., m). \tag{48}$$

Trong đại số ta biết nếu hệ thuần nhất (43) không có nghiệm nào khác 0 thì với mỗi $b = (b_1, ..., b_m)$ cho trước hệ (41) có một nghiệm duy nhất, và do ma trận của hệ (48) chẳng qua là chuyển vị của ma trận hệ (43), nên trong trường hợp này hệ (48) cũng không có nghiệm khác 0 và với mỗi $c = (c_1, ..., c_m)$ cho trước hệ (46) cũng có một nghiệm duy nhất.

Còn nếu hệ thuần nhất (43) có nghiệm khác 0 thì hệ (48) cũng có nghiệm khác 0 và số nghiệm độc lập tuyến tính của hai hệ (43) và (48) bằng nhau (nhớ rằng ma trận của hệ (48) là chuyển vị của ma trận của hệ (43) !). Khi ấy, muốn cho hệ (41) có nghiệm, điều kiện cần và đủ là vectơ $b = (b_1, ..., b_m)$ phải trực giao với mọi nghiệm $\eta = (\eta_1, ..., \eta_m)$ của hệ thuần nhất (48). Thật vậy cho u_i là vectơ m chiều mà thành phần thứ i là $1 - a_{ii}$, còn thành phần thứ $j \neq i$ là $-a_{ji}$ ta thấy rằng vế thứ nhất của (48) chính là tích vô hướng của $\eta = (\eta_1, ..., \eta_m)$ với u_i, cho nên tập N các nghiệm của hệ (48) chẳng qua là tập các vectơ $\eta = (\eta_1, ..., \eta_m)$ trực giao với mọi vectơ $u_1, u_2, ..., u_m$; hay nói khác đi, cho M là không gian con sinh bởi $u_1, u_2, ..., u_m$ thì $N = M^{\perp}$. Nếu hệ (41) có nghiệm thì vectơ $b = (b_1, ..., b_m) \in M$, do đó $b \perp N$; ngược lại nếu $b \perp N$ thì $b \in M$, tức là tồn tại những số $\xi_1, ..., \xi_m$ nghiệm đúng (41), do đó hệ (41) có nghiệm. Tương tự như thế, muốn cho hệ (46) co nghiệm, điều kiện cần và đủ là vectơ $c = (c_1, ..., c_m)$ trực giao với mọi nghiệm của hệ (43).

Nhưng ta để ý rằng điều kiện: $b = (b_1, ..., b_m)$ trực giao với các nghiệm η của (48) có nghĩa là f trực giao với các nghiệm ψ của (47), cũng như điều kiện : $c = (c_1, ..., c_m)$ trực giao với các nghiệm ξ của (43) có nghĩa là g trực giao với các nghiệm φ của (38), vì chẳng hạn

$$(f, \psi) = (f, \sum_i \eta_i q_i) = \sum_i \eta_i (f, q_i) = \sum_i \eta_i b_i$$

Dựa vào nhận xét đó và dựa vào sự liên hệ nói trên giữa tập các nghiệm của (37) hoặc (45) với tập các nghiệm của (41) hoặc (48), ta suy ra *"Định lý hai khả năng"* sau đây cho các phương trình tích phân có hạch thoái hoá.

Định lý 11. (Fredhom). *Đối với các phương trình*

$$\varphi - A\varphi = f \tag{49}$$
$$\varphi - A\varphi = 0 \tag{50}$$
$$\psi - A^*\psi = g \tag{51}$$
$$\psi - A^*\psi = 0 \tag{52}$$

trong đó A, A^* là các toán tử tích phân với hạch

$$K(x,s), \quad K^*(x,s) = K(s,x),$$

chỉ có hai khả năng:

I. *Hoặc là phương trình thuần nhất (50) không có nghiệm khác 0, thì khi ấy phương trình thuần nhất (52) cũng không có nghiệm khác 0, và với mọi f, g cho trước, mỗi phương trình (49), (51) đều có một nghiệm duy nhất.*

II. *Hoặc là phương trình thuần nhất (50) có nghiệm khác 0, thì khi ấy phương trình thuần nhất (52) cũng có nghiệm khác 0. Số nghiệm độc lập tuyến tính của (50) và (52) bằng nhau, và phương trình (49) có nghiệm khi và chỉ khi f trực giao với mọi nghiệm của (52), phương trình (51) có nghiệm khi và chỉ khi g trực giao với mọi nghiệm của (50).*

Để ý rằng chúng ta đã chứng minh định lý này không những cho các phương trình tích phân với hạch thoái hoá mà nói chung cho các phương trình trong không gian Hilbert trừu tượng, quí hồ toán tử A có dạng (xem (38))

$$A\varphi = \sum_{i=1}^{m} (q_i, \varphi) p_i.$$

Đây là dạng tổng quát của toán tử thoái hoá, là vì một toán tử thoái hoá A, theo định nghĩa, biến không gian Hilbert X thành một không gian con hữu hạn chiều, chẳng hạn m chiều, và lấy $p_1, p_2, \ldots, p_m$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian con này ta sẽ có

$$A\varphi = \sum_{i=1}^{m} (A\varphi, p_i) p_i = \sum_{i=1}^{m} (\varphi, A^* p_i) p_i$$

tức là A có dạng trên với $q_i = A^* p_i$. Vậy định lý trên đúng cho mọi toán tử thoái hoá A trong không gian Hilbert.

6.4. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN VỚI HẠCH BẤT KỲ. Bây giờ ta xét phương trình tích phân

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)$$

trong đó $K(x,s)$ chỉ giả thiết có bình phương khả tích, còn ngoài ra không đòi hỏi điều kiện gì khác. Một cách tổng quát hơn ta xét phương trình:

$$\varphi - A\varphi = f$$

trong đó A là một toán tử *hoàn toàn liên tục* trong không gian Hilbert X.

Ta sẽ chứng minh rằng định lý Fredhom vẫn đúng cho trường hợp tổng quát này.

Bổ đề 1. *Cho một dãy toán tử (tuyến tính liên tục) A_n hội tụ theo chuẩn tới toán tử A.*

(i) *Nếu dãy phần tử φ_n là bị chặn, và $A\varphi_n$ hội tụ, thì $A_n\varphi_n$ cũng hội tụ đến cùng giới hạn đó.*

(ii) *Nếu A hoàn toàn liên tục, và $\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, ..., \varphi_n^{(r)}$ là r nghiệm trực chuẩn của phương trình $\varphi - A_n\varphi = 0$ thì có một dãy con $\{n_k\}$ sao cho mỗi dãy $\{\varphi_{n_k}^{(i)}\}$ đều hội tụ, và các $\varphi_0^{(i)} = \lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., r)$ là r nghiệm trực chuẩn của phương trình $\varphi - A\varphi = 0$.*

Thật vậy, ta có $\|A\varphi_n - A_n\varphi_n\| = \|(A - A_n)\varphi_n\| \le \|A - A_n\|.\|\varphi_n\|$ $\to 0$, từ đó suy ra ngay (i).

Nếu A hoàn toàn liên tục thì có một dãy $\{n_k\}$ sao cho mỗi dãy $\{A\varphi_{n_k}^{(i)}\}$ hội tụ $(i = 1, 2, ..., r)$, và theo (i), gọi $\varphi_0^{(i)}$ là giới hạn của $A\varphi_{n_k}^{(i)}$. ta có $\varphi_{n_k}^{(i)} = A_{n_k}\varphi_{n_k}^{(i)} \to \varphi_0^{(i)}$, do đó $A\varphi_0^{(i)} = \varphi_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., r)$, chứng tỏ rằng các $\varphi_0^{(i)}$ là nghiệm của phương trình $\varphi - A\varphi = 0$. Vả lại vì các $\varphi_{n_k}^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., r)$ trực chuẩn cho nên giới hạn của chúng là các $\varphi_0^{(i)}$ cũng trực chuẩn, đúng như khẳng định. □

Từ phần (ii) của bổ đề ta suy ra rằng: *Nếu phương trình $\varphi - A\varphi = 0$ chỉ có r nghiệm độc lập tuyến tính thì với mọi n đủ lớn, mỗi phương trình $\varphi - A_n\varphi = 0$ không thể có quá r nghiệm độc lập tuyến tính.* Vì nếu trái lại thì sẽ có vô số phương trình $\varphi - A_n\varphi = 0$ có $r + 1$ nghiệm

độc lập tuyến tính, do đó có $r+1$ nghiệm trực chuẩn và áp dụng bổ đề ta sẽ được $r+1$ nghiệm trực chuẩn cho phương trình $\varphi - A\varphi = 0$.

Sau một số nhận xét sơ bộ đó, ta bắt đầu chứng minh định lý Fredhom.

Gọi M là không gian con tạo thành bởi các nghiệm của (52). Do M chẳng qua là không gian con riêng ứng với trị riêng 1 của toán tử hoàn toàn liên tục A^* (xem mục 6.2) nên M phải có thứ nguyên hữu hạn. Dễ thấy rằng phần bù trực giao $M^\perp$ của nó là một không gian con bất biến đối với A, vì nếu $\psi_1, ..., \psi_r$ là một cơ sở trực chuẩn của M thì với mọi $i = 1, 2, ..., r$: $(A\psi, \psi_i) = (\psi, A^*\psi) = (\psi, \psi_i)$, chứng tỏ rằng nếu $\psi \in M^\perp$, tức là $(\psi, \psi_i) = 0$ $(i = 1, 2, ..., r)$, thì $A\psi \in M^\perp$. Do đó có thể coi A là một toán tử trong $M^\perp$. Mọi $\varphi \in X$ đều có thể đặt một cách duy nhất dưới dạng $\varphi = \varphi' + \varphi''$ với $\varphi' \in M$, $\varphi'' \in M^\perp$, và ta có $A\varphi = A\varphi' + A\varphi''$, hay, nếu gọi P là toán tử chiếu lên M, (tức là toán tử biến φ thành φ') thì $A\varphi = AP\varphi + A\varphi''$. Nhưng toán tử A xét trong không gian $M^\perp$ vẫn là hoàn toàn liên tục cho nên theo nhận xét sau Định lý 7, $A\varphi'' = \sum_i (\varphi'', e_i) Ae_i$ trong đó $\{e_i\}$ là một hệ trực chuẩn trong $M^\perp$, và $\{Ae_i\}$ là một hệ trực giao cũng của $M^\perp$. Chú ý rằng $(\varphi'', e_i) = (\varphi - \varphi', e_i) = (\varphi, e_i)$ vì $(\varphi', e_i) = 0$, ta có thể viết $A\varphi = AP\varphi + \sum_i (\varphi, e_i) Ae_i$. Vả lại cũng theo nhận xét sau Định lý 7, A là giới hạn (theo chuẩn) của dãy toán tử thoái hoá A_n xác định bởi

$$A_n\varphi = AP\varphi + \sum_{i=1}^{n} (\varphi, e_i) Ae_i.$$

Như đã biết, $P = P^*$ (mục 5.1) và dễ thấy rằng liên hợp của toán tử $B\varphi = (\varphi, e)Ae$ là $B^*\psi = (\psi, Ae)e$, vì $((\varphi, e)Ae, \psi) = (\varphi, e)(Ae, \psi) = (\varphi, (\psi, Ae)e)$, cho nên liên hợp của A_n là toán tử

$$A_n^*\psi = PA^*\varphi + \sum_{i=1}^{n} (\psi, Ae_i) e_i.$$

Theo trên, định lý Fredhom đúng cho các phương trình

$$\varphi - A_n\varphi = f \qquad (49_n)$$

$$\varphi - A_n\varphi = 0 \qquad (50_n)$$

$$\psi - A_n^*\psi = g \qquad (51_n)$$

$$\psi - A_n^*\psi = 0. \qquad (52_n)$$

Nếu ψ là một nghiệm của phương trình (52), tức là $\psi \in M$ thì

$$PA^*\psi = P\psi = \psi,\ (\psi, Ae_i) = 0\ (i = 1, 2, ...)$$

cho nên theo biểu thức của $A_n^*\psi$, ta có $A_n^*\psi = \psi$, nghĩa là ψ cũng là nghiệm của phương trình (52_n). Thành thử tập các nghiệm của (52) bao hàm trong tập các nghiệm của (52_n). Theo định lý Fredhom cho toán tử thoái hoá, số nghiệm độc lập tuyến tính của (50_n) bằng số nghiệm độc lập tuyến tính của (52_n), vậy nếu số nghiệm ấy là r_n và số nghiệm độc lập tuyến tính của (50) là r ta có $r \leq r_n$. Mặt khác theo bổ đề, với mọi n đủ lớn $r_n \leq r' =$ số nghiệm độc lập tuyến tính của (25). Vậy $r \leq r'$. Bằng lập luận tương tự, nhưng xuất phát từ A^* và coi A là liên hợp của A^*, ta cũng có $r' \leq r$. Vậy $r = r'$, và do đó $r = r_n$, chứng tỏ rằng tập M các nghiệm của (52) trùng với tập các nghiệm của (52_n), vì ở trên vừa thấy rằng M bao hàm trong tập này.

Nếu phương trình (49) có một nghiệm φ thì với mọi nghiêm ψ của (52) ta có $(f, \psi) = (\varphi - A\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) - (A\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) - (\varphi, A^*\psi) = (\varphi, \psi - A^*\psi) = 0$. Vậy f phải trực giao với mọi nghiệm của (52). Ngược lại, giả sử f trực giao với mọi nghiệm của (52). Khi ấy f cũng trực giao với mọi nghiệm của (52_n) (vì tập các nghiệm của (52) và (52_n) trùng nhau), nên theo định lý Fredhom cho toán tử thoái hoá, phương trình (49_n) có ít nhất một nghiệm, φ_n. Bao giờ ta cũng có thể chọn φ_n trực giao với không gian N tạo thành bởi các nghiệm của (50_n), vì nếu φ_n chưa trực giao với N thì ta có thể thay nó bởi hình chiếu φ_n' của nó lên $N^\perp$ (tức là vectơ φ_n' trong cách biểu diễn $\varphi_n = \varphi_n' + \varphi_n''$ với $\varphi' \in N^\perp$, $\varphi'' \in N$): rõ ràng $\varphi_n' - A_n\varphi_n' = (\varphi_n - A_n\varphi_n) - (\varphi_n'' - A_n\varphi_n'') = f - 0 = f$, cho nên φ_n' cũng là nghiệm của (49_n). Ta cũng có thể khẳng định rằng dãy $\{\varphi_n\}$ bị chặn. Thật vậy, nếu trái lại thì, bằng cách lấy một dãy con (nếu cần) ta có thể cho rằng $\|\varphi_n\| \to \infty$, và lúc ấy

$$\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} - A_n\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{f}{\|\varphi_n\|} \to 0\ (n \to \infty). \tag{53}$$

Vì A hoàn toàn liên tục nên, lại bằng cách lấy một dãy con nữa nếu cần, ta có thể cho rằng $\{Ax_n/\|x_n\|\}$ hội tụ (tới cùng giới hạn). Vậy theo (53) $\{\varphi_n/\|\varphi_n\|\}$ cũng hội tụ và gọi φ_0 là giới hạn của $\varphi_n/\|\varphi_n\|$ ta có $\varphi_0 - A\varphi_0 = 0$, nghĩa là φ_0 là nghiệm của (50). Cho $\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, ..., \varphi_n^{(r)}$

là một cơ sở trực chuẩn của N, tức là một hệ nghiệm trực chuẩn của (50_n). Dựa vào Bổ đề và lấy một dãy con, nếu cần, ta có thể cho rằng $\varphi_n^{(i)} \to \varphi_0^{(i)}$ $(n \to \infty)$ và các $\varphi_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., r)$ là một hệ nghiệm trực chuẩn của (50). Khi ấy $\varphi_n \perp \varphi_n^{(i)}$ với mọi n, nên đến giới hạn sẽ có $\varphi_0 \perp \varphi_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., r)$ và do đó $\varphi_0 = 0$ vì (50) chỉ có r nghiệm độc lập tuyến tính. Nhưng vì $\varphi_n/\|\varphi_n\|$ có chuẩn bằng 1 nên giới hạn của nó là φ_0 cũng phải có chuẩn bằng 1: mâu thuẫn.

Thành thử dãy $\{\varphi_n\}$ bị chặn, và do tính hoàn toàn liên tục của A, có thể cho rằng dãy $\{A\varphi_n\}$ hội tụ. Theo bổ đề dãy $\{A_n\varphi_n\}$ cũng hội tụ tới cùng giới hạn, và do đó dãy $\varphi_n = A_n\varphi_n + f$ cũng hội tụ. Gọi φ là giới hạn của φ_n ta cũng có $\varphi = A\varphi + f$, chứng tỏ rằng φ chính là một nghiệm của phương trình (49).

Như vậy phần thứ hai của định lý Fredhom đã được chứng minh. Còn phần thứ nhất thì có thể suy ra dễ dàng từ đó, vì nếu phương trình (50) không có nghiệm khác 0, thì suy luận vừa rồi cho thấy phương trình (52) cũng thế, tức là $M = \{0\}$: khi ấy mọi f đều trực giao với M, cho nên phương trình (49) có nghiệm với mọi f, và nghiệm ấy là duy nhất, vì nếu φ_1, φ_2 cùng là nghiệm của (49) thì $\varphi_1 - \varphi_2$ là nghiệm của (50), do đó $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$.

Tóm lại Định lý 11 đúng trong trường hợp tổng quát (A là toán tử hoàn toàn liên tục dù đối xứng hay không). Chú ý rằng Định lý 10 chẳng qua là một trường hợp riêng của Định lý 11, vì một vectơ riêng ứng với trị riêng 1 không gì khác là một nghiệm của phương trình thuần nhất $\varphi - A\varphi = 0$.

6.5. PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ DẦN. HẠCH LẶP. Để giải phương trình

$$\varphi = A\varphi + f \tag{54}$$

ta có thể tiến hành theo phương pháp xấp xỉ dần như sau. Xuất phát từ xấp xỉ đầu tiên $\varphi_0 = 0$ ta lần lượt thu được

$$\varphi_1 = f,\ \varphi_2 = f + A\varphi_1 = f + Af,\ \varphi_3 = f + A\varphi_2 = f + Af + A^2 f, \ldots$$
$$\varphi_n = f + A\varphi_{n-1} = f + Af + \cdots + A^{n-1}$$

Nếu φ_n hội tụ tới φ (trong không gian Hilbert X đã cho), thì do

tính liên tục của toán tử A ta có:

$$\begin{aligned} A\varphi &= \lim_{n\to\infty} A\varphi_n = \lim_{n\to\infty} A(f + \cdots + A^{n-1}f) \\ &= Af + A^2f + \cdots + A^nf + \cdots = \lim_{n\to\infty}(\varphi_n - f) = \varphi - f, \end{aligned}$$

cho nên φ sẽ là nghiệm của phương trình (54).

Đương nhiên một nghiệm của phương trình (54) có thể xem là một điểm bất động của toán tử B xác định bởi $B\varphi = A\varphi + f$. Vậy theo kết quả đã biết ở Chương 2, mục 5.3, phương trình (54) sẽ có một nghiệm duy nhất nếu B là một ánh xạ co, và khi ấy, nghiệm này sẽ thu được theo phương pháp xấp xỉ dần liên tiếp. Ta có

$$\|B\varphi - B\psi\| = \|A\varphi - A\psi\| \le \|A\|.\|\varphi - \psi\|$$

cho nên B sẽ là ánh xạ co nếu $\|A\| < 1$. Thành thử:

Định lý 12. *Nếu $\|A\| < 1$ thì với mọi f cho trước, phương trình*

$$\varphi = A\varphi + f$$

có một nghiệm duy nhất φ xác định bởi

$$\varphi = f + Af + A^2f + \cdots \tag{55}$$

Chuỗi (55) thường gọi là *chuỗi Neumann*.

Điều kiện $\|A\| < 1$ là đủ để bảo đảm cho chuỗi Neumann hội tụ và do đó có thể áp dụng phương pháp xấp xỉ dần để giải phương trình (54). Tuy nhiên nó không phải là một điều kiện cần.

Một cách tổng quát hơn, nếu tồn tại một hằng số C sao cho

$$\|A^nf\| \le \frac{C^n}{n!}$$

thì chuỗi (55) sẽ được làm trội bởi một chuỗi hội tụ, cho nên bản thân nó sẽ hội tụ, và do đó, theo trên, tổng của nó cho ta nghiệm của phương trình (54).

Chẳng hạn xét *phương trình Volterra* sau đây trong $L^2_{[a,b]}$

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \tag{56}$$

trong đó hạch $K(x,s)$ là bị chặn: $|K(x,s)| \leq M$. Phương trình này là một trường hợp riêng của phương trình Fredhom, vì có thể xem như $K(x,s) = 0$ với $s \geq x$, khiến cho tích phân đáng lẽ lấy theo s từ a đến b thì chỉ lấy từ a đến x. Đặt $S = \int_a^b |f(x)|dx$ ta có

$$|Af(x)| = |\int_a^s K(x,s)f(s)ds| \leq SM;$$

$$|A^2f(x)| = |\int_a^x K(x,s)[Af(s)]ds|$$

$$\leq \int_a^x M.SMds = SM^2(x-a);$$

$$|A^3f(x)| = |\int_a^x K(x,s)[A^2f(s)]ds|$$

$$\leq \int_a^x M.SM^2(x-a)ds = SM^3\frac{(x-a)^2}{2}, \ldots$$

Một cách tổng quát:

$$|A^nf(x)| \leq SM^n\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \ (n = 1, 2, \ldots)$$

Do đó

$$\|A^nf\| \leq S_1M^n\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \ (n = 1, 2, \ldots).$$

(S_1 là một hằng số). Nghĩa là chuỗi (55), bắt đầu từ hạng tử thứ hai, được làm trội bởi chuỗi số hội tụ:

$$S_1M + S_1M^2(b-a) + S_1M^3\frac{(b-a)^2}{2!} + \ldots$$

Vậy bản thân chuỗi (55) hội tụ trong $(L^2_{[a,b]})$ và tổng của nó cho ta nghiệm của phương trình (56). Nói cách khác phương trình Volterra *luôn luôn* có một nghiệm duy nhất xác định bởi (55).

Ta hãy xét xem trong trường hợp toán tử A trong phương trình (54) là toán tử tích phân sinh bởi hạch $K(x,s)$:

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

thì toán tử A^n được sinh bởi hạch như thế nào.

Bổ đề 2. *Nếu A, B là hai toán tử tích phân sinh bởi các hạch $K(x,s),\ L(x,s) \in (L^2_{[a,b]\times[a,b]})$ thì toán tử AB cũng là toán tử tích phân, sinh bởi hạch*

$$M(x,s) = \int_a^b K(x,t)L(t,s)dt \in (L^2_{[a,b]\times[a,b]})$$

và

$$\|M\| \leq \|K\|.\|L\|. \tag{57}$$

Thật vậy, phần đầu Bổ đề là do

$$\begin{aligned} AB\varphi &= \int_a^b K(x,t)\{\int_a^b L(t,s)\varphi(s)ds\}dt \\ &= \int_a^b \{\int_a^b K(x,t)L(t,s)dt\}\varphi(s)ds \end{aligned}$$

trong đó ta đã có quyền đổi thứ tự lấy tích phân là nhờ dựa vào định lý Fubini áp dụng cho hàm

$$K(x,t)L(t,s)\varphi(s),$$

hàm này là tích của hai hàm có bình phương khả tích theo t và s: $K(x,t)\varphi(s)$ và $L(t,s)$, cho nên bản thân nó khả tích theo t và s.

Ước lượng (57) là do ta có, theo bất đẳng thức Schwarz-Buniakowski:

$$|M(s,x)|^2 \leq \int_a^b K^2(x,t)dt \int_a^b L^2(t,s)dt$$

từ đó

$$\int_a^b \int_a^b M^2(x,s)dxds \leq \int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dtdx. \int_a^b \int_a^b L^2(t,s)dtds.$$

Như vậy, cùng với toán tử A các toán tử $A^2, A^3, ..., A^n, ...$ đều là toán tử tích phân, sinh bởi các *hạch lặp* $K_2, K_3, ..., K_n$ xác định như sau:

$$K_1(x,s) = K(x,s);\ K_n(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt. \tag{58}$$

Chuẩn hạch lặp K_n nghiệm đúng bất đẳng thức $\|K_n\| \leq \|K\|^n$, cho nên nếu $\|K\| < 1$ thì chuỗi

$$K(x,s) + K_2(x,s) + \ldots + K_n(x,s) + \ldots \tag{59}$$

được làm trội bởi một chuỗi hội tụ, và do đó bản thân nó hội tụ trong $L^2_{[a,b]\times[a,b]}$ đến một hàm $H(x,s)$ cũng có bình phương khả tích theo x và s. Cho H là toán tử sinh bởi hạch $H(x,s)$. Vì $\|A\| \leq \|K\| < 1$, nên chuỗi toán tử

$$A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots \tag{60}$$

cũng hội tụ, và dễ thấy rằng H chính là tổng của chuỗi này. Thật vậy, đương nhiên $A+A^2+\ldots+A^n$ là toán tử sinh bởi hạch $K+K_2+\ldots+K_n$ và áp dụng ước lượng (29) (ở mục 6.1) cho toán tử $H-(A+A^2+\ldots+A^n)$ ta có

$$\|H - (A + A^2 + \ldots + A^n)\| \leq$$
$$\int_a^b \int_a^b [H(x,s) - K(x,s) - \ldots - K_n(x,s)]^2 dxds \to 0 \ (n \to \infty).$$

Vậy H chính là tổng của chuỗi (60). Tóm lại:

Định lý 13. *Nếu*

$$\|K(x,s)\| = \int_a^b \int_a^b K^2(x,s)dxds < 1 \tag{61}$$

thì với mỗi hàm $f(x) \in L^2_{[a,b]}$ cho trước, phương trình

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x)$$

có một nghiệm duy nhất $\varphi(x) \in L^2_{[a,b]}$, xác định bởi

$$\varphi(x) = \int_a^b H(x,s)\varphi(s)ds + f(x)$$

trong đó $H(x,s)$ là tổng của chuỗi hạch lặp (59), với các hạch lặp $K_n(x,s)$ xác định theo (58).

Cũng như trước, điều kiện (61) là đã để bảo đảm sự hội tụ của chuỗi (34), nhưng không phải là cần. Một cách tổng quát hơn, nếu tồn tại một hằng số C sao cho

$$\|K_n\| < \frac{C^n}{n!} \tag{62}$$

thì chuỗi (59) được làm trội bởi một chuỗi số hội tụ nên sẽ hội tụ và những kết quả trên vẫn đúng.

Chẳng hạn, đối với phương trình Volterra (56), dễ kiểm tra lại rằng

$$K_n(x,s)\begin{cases} \leq & M\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} & (s \leq x) \\ = & 0 & (s > x) \end{cases}$$

cho nên ước lượng (62) được thoả mãn, và Định lý 15 luôn luôn đúng mà không cần điều kiện (61).

Ví dụ: Giải phương trình

$$\varphi(x) - \int_0^x e^{x-s}\varphi(s)ds = f(x).$$

Ta có

$$K(x,s) = e^{x-s} \qquad (s < x)$$

$$K_2(x,s) = \int_s^x e^{x-t}e^{t-s}dt = e^{x-s}(x-s) \quad (s < x)$$

$$K_3(x,s) = \int_s^x (x-t)e^{x-t}e^{t-s}dt = e^{x-s}\frac{(x-s)^2}{2!} \quad (s < x)$$

.....

$$K_n(x,s) = e^{x-s}\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (s < x)$$

Từ đó:

$$H(x,s) = e^{x-s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-s)^n}{n!} = e^{x-s}e^{x-s}.$$

Vậy

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x e^{2(x-s)}f(s)ds.$$

7. KHÔNG GIAN HILBERT PHỨC

7.1. ĐỊNH NGHĨA. Trong phần trước ta chỉ mới nói đến không gian Hilbert thực. Nhưng trong giải tích nhiều khi phải xét những hàm lấy giá trị phức. Vì vậy cần định nghĩa không gian Hilbert phức.

Trước hết ta nhận xét rằng đối với không gian tuyến tính phức, các tiên đề 1)-4) về tích vô hướng như trước đây (tiết 1) không thể giữ nguyên được, vì chẳng hạn (ix, ix) theo 1) và 3) bằng $i^2(x,x) = -(x,x)$ do đó theo 4) phải âm (với $x \neq 0$) nhưng mặt khác cũng theo 4) thì nó dương.

Cho nên phải thay đổi một chút các tiên đề. Cụ thể, người ta thay 1) bởi

1') $(x,y) = \overline{(y,x)}$,

còn các tiên đề khác vẫn giữ nguyên:

2) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$,

3) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ với mọi số phức α,

4) $(x,x) > 0$ nếu $x \neq 0$; $(x,x) = 0$ nếu $x = 0$.

Do sự thay đổi đó cho nên

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha(y,x)} = \overline{\alpha}(y,x),$$

thành thử qui tắc đưa một thừa số phức ra ngoài dấu tích vô hướng là: nếu thừa số ấy ở ngôi thứ hai trong tích vô hướng thì phải lấy *liên hợp phức* của nó.

Một không gian tuyến tính phức gọi là *không gian tiền Hilbert phức* nếu trong đó có cho một hàm hai biến (x,y), gọi là tích vô hướng, của x và y, với các tính chất 1') 2) 3) 4) kể trên.

Cũng như đối với không gian tiền Hilbert thực, hệ thức

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \tag{63}$$

xác định một chuẩn. Cách chứng minh tương tự như trước, chỉ có khác là để xác lập bất đẳng thức Schwarz

$$|(x,y)| \leq \|x\| . \|y\| \tag{64}$$

lập luận được thay đổi một chút như sau:

$$\begin{aligned} 0 &= (x-\alpha(x,y)y, x-\alpha(x,y)y) = \\ &= \|x\|^2 - 2\alpha|(x,y)|^2 + \alpha^2|(x,y)|^2.\|y\|^2, \end{aligned}$$

từ đó, do bất đẳng thức trên đúng với mọi số thực α, nên

$$|(x,y)|^4 - \|x\|^2.|(x,y)|^2.\|y\|^2 \leq 0.$$

và ước lược ta sẽ có (2).

Thành thử một không gian tiền Hilbert phức là một trường hợp riêng của không gian định chuẩn phức. Cũng như trước, có thể chứng minh dễ dàng đẳng thức bình hành

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

và đẳng thức này không những là điều kiện cần mà cũng là điều kiện đủ để cho một không gian định chuẩn phức có thể biến thành một không gian tiền Hilbert, với tích vô hướng nghiệm đúng (63). Cụ thể là nếu đẳng thức đó đúng với mọi x, y thì đặt

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

có thể chứng minh rằng (x,y) thỏa mãn các tiên đề 1')-4) và nghiệm đúng (63).

Một không gian tiền Hilbert phức đủ gọi là *không gian Hilbert phức*.

Chẳng hạn không gian $L^2(E,\mu)$ gồm tất cả các hàm phức $x(t)$ có bình phương môđun khả tích trên E (đối với độ đo μ) là một không gian Hilbert phức, với tích vô hướng là

$$(x,y) = \int_E x(l)\overline{y(l)}d\mu.$$

Một ví dụ khác là không gian l^2 gồm tất cả các dãy số phức $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ sao cho $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2 < \infty$. Tích vô hướng ở đây là

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\overline{\eta_i}.$$

Tất cả các kết quả cơ bản về không gian Hilbert thực đều mở rộng cho không gian Hilbert phức, với ít nhiều thay đổi hiển nhiên trong phát biểu hoặc chứng minh. Chẳng hạn trong bất đẳng thức Bessel, đẳng thức Parseval, và định lý Riesz-Fisher cần thay $\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2$ bởi $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2$ (ở đây $\xi_i = (x, e_i)$, hệ số Fourier của x, nói chung là số phức), và trong Định lý 2, tiết 3 về các đặc trưng của hệ trực chuẩn đầy đủ cần thay $\sum_i \xi_i\eta_i$ bởi $\sum_i \xi_i\overline{\eta_i}$.

7.2. TOÁN TỬ ĐỐI XỨNG TRONG KHÔNG GIAN HILBERT PHỨC. Vẫn như trước, một toán tử tuyến tính A trong không gian Hilbert X gọi là đối xứng nếu với mọi $x, y \in X$

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Mặc dù trong không gian Hilbert phức tích vô hướng của hai phần tử có thể lấy mọi giá trị phức, và trị riêng của một toán tử có thể là số phức, nhưng *nếu A là toán tử đối xứng thì*

1) Với mọi $x \in X$ tích vô hướng (Ax, x) là số thực.
2) Các trị riêng của A đều là số thực.

Thật vậy, theo định nghĩa tích vô hướng $(x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$, mặt khác, theo định nghĩa toán tử, đối xứng $(x, Ax) = (Ax, x)$ cho nên $(Ax, x) = \overline{(Ax, x)}$, chứng tỏ rằng (Ax, x) là số thực. Nếu $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ thì $(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda\|x\|^2$, và do (Ax, x) thực nên λ cũng thực.

Ngoài ra cần chú ý rằng $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$ và nếu A đối xứng thì αA chỉ còn đối xứng nếu α là số thực.

Toán tử tích phân Fredhom

$$A\varphi = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds$$

trong không gian phức $L^2_{[a,b]}$ là hoàn toàn liên tục nếu

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dxds < \infty,$$

và là đối xứng nếu hầu khắp nơi:

$$K(x, s) = \overline{K(s, x)}.$$

Liên hợp của A là toán tử A^* xác định bởi

$$A^*\psi = \int_a^b \overline{K(s,x)}\psi(s)ds.$$

Các định lý về trị riêng, vectơ riêng... của toán tử hoàn toàn liên tục và đối xứng vẫn đúng trong không gian Hilbert phức. Nói riêng định lý hai khả năng của Fredhom và các Định lý 12, 13 vẫn có giá trị.

7.3. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN VỚI THAM SỐ PHỨC. Ta hãy xét phương trình:

$$\varphi - \mu A\varphi = f \tag{65}$$

trong đó A là một toán tử hoàn toàn liên tục trong không gian Hilbert phức X, và μ là một tham số phức.

Theo định lý Fredhom, với mỗi trị μ cố định: hoặc là phương trình (65) có một nghiệm duy nhất φ với mọi $f \in X$ cho trước (khi ấy μ gọi là một trị thường); hoặc là phương trình

$$\varphi - \mu A\varphi = 0$$

có ít nhất một nghiệm $\varphi_0 \neq 0$, nghiệm này đương nhiên sẽ là một vectơ riêng của A với trị riêng $\lambda = 1/\mu$ (khi ấy μ gọi là một *trị bất thường*).

Gọi I là toán tử đồng nhất, ta có thể viết phương trình (65) dưới dạng

$$(I - \mu A)\varphi = f \tag{66}$$

Nếu μ là một trị thường thì, kí hiệu $R_\mu f$ là nghiệm duy nhất của (66) ứng với f, ta sẽ xác định một toán tử R_μ là nghịch đảo của toán tử $I - \mu A$: $R_\mu = (I - \mu A)^{-1}$.

Áp dụng Định lý 12, ta thấy rằng nếu $\|\mu A\| < 1$ thì với mọi f cho trước phương trình (65) có một nghiệm duy nhất bằng

$$\varphi = f + \mu Af + \mu^2 A^2 f + \cdots$$

Vậy *mọi trị* μ *sao cho* $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$ *đều là trị thường và với các* μ *ấy ta có*

$$R_\mu = I + \mu A + \mu^2 A^2 + \cdots$$

Áp dụng Định lý 13, ta lại được: nếu A là toán tử tích phân sinh bởi hạch $K(x,s)$, có bình phương môđun khả tích và $|\mu| < \frac{1}{\|K\|}$ thì

$$R_\mu = I + H,$$

với H là toán tử tích phân sinh bởi hạch

$$H(x,s) = \mu K(x,s) + \mu^2 K_2(x,s) + \cdots + \mu^n K_n(x,s) + \cdots$$

(dấu = hiểu theo nghĩa hội tụ trong metric của $L^2_{[a,b]\times[a,b]}$).

BÀI TẬP

Khái niệm không gian Hilbert.

1. Nếu tích vô hướng của hai vectơ có trị tuyệt đối bằng tích các độ dài (chuẩn) của chúng thì hai vectơ ấy cộng tuyến (nghĩa là $y = \lambda x$).

2. Cho $c_1, c_2, ...$ là một dãy số dương cho trước, M là tập con của không gian l^2, gồm tất cả các phần tử $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l^2$ cho cho $|\xi_i| \le c_i$ $(i = 1, 2, ...)$. Chứng minh rằng M compac khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$.

Chỉ dẫn. Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ thì với $\varepsilon > 0$ cho trước, có thể chọn n_0 để cho $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n^2 < \varepsilon$. Khi ấy tập các phần tử $x = (\xi_1, ..., \xi_{n_0}, 0, ...)$ với $|\xi_i| \le c_i$ $(i = 1, 2, ..., n_0)$ làm thành một ε-lưới compac của M. Còn nếu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \infty$ thì chọn những n_k sao cho với mỗi $k = 1, 2, ...,$ tổng các c_n^2 từ $n = n_k$ đến $n_{n+k} - 1$ lớn hơn 1, khi ấy các phần tử $x_k = (0, ..., 0, c_{n_k}, ..., c_{n_{k+1}} - 1, 0, ..., 0) \in M$ và $\|x_k - x_h\| > \sqrt{2}$ với mọi k, h.

Tính trực giao, Hình chiếu.

3. Nếu M là một không gian con của một không gian Hilbert H thì $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

4. Cho C là một tập lồi đóng trong không gian Hilbert H, và x là một điểm cho trước trong H. Bao giờ cũng có một phần tử duy nhất $y \in C$, gần x

nhất, nghĩa là sao cho

$$\|x - y\| = \min_{u \in C} \|x - u\|$$

Chỉ dẫn: Xem chứng minh Định lý 1. Chú ý rằng nếu $u_n \in C_1$, $u_m \in C$ thì $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in C$.

5. Cho M là một không gian con đóng của không gian Hilbert H và x là một điểm của H. Chứng minh rằng:

$$\min\{\|x - u\| : u \in M\} = \max\{|(x, y)| : y \in M^{\perp},\ \|y\| = 1\}$$

6. Cho A là một toán tử tuyến tính liên tục từ không gian Hilbert thực H vào chính nó. A gọi là *xác định dương* nếu với mọi $x \in H$ ta có $(Ax, x) \geq \alpha(x, x)$ trong đó $\alpha > 0$. Khi ấy A là song ánh và $\|A^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$.

Chỉ dẫn: Trước hết nhận xét rằng A là đơn ánh sau đó chứng minh rằng $M = \mathrm{Im}A$ là không gian con đúng của H (nếu $x_n \in M$, $x_n \to x$ thì $\{A^{-1}x_n\}$ là dãy cơ bản, cho nên $A^{-1}x_n \to y \in H$, từ đó suy ra $Ay = x$). Chứng minh rằng: $z \in M^{\perp} \Rightarrow z = 0$, và suy ra $M = H$.

Hệ trực chuẩn

7. Trong một không gian Hilbert H, cho một hệ trực chuẩn $e_1, e_2, \ldots$. Gọi B_n là không gian con sinh bởi $e_1, \ldots, e_n$. Chứng minh rằng với mọi $x \in H$, $y_n = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$ là hình chiếu của x trên B_n, và nếu hệ trực chuẩn là đầy đủ thì $y_n \to x$ $(n \to \infty)$.

8. Trong một không gian Hilbert H, cho một hệ $x_1, x_2, \ldots$ Chứng minh rằng có một hệ duy nhất (xê xích những thừa số bằng số) $y_1, y_2, \ldots$ sao cho $y_k \perp x_i$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ và với mọi n, y_n thuộc bao tuyến tính của $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

9. Các phần tử của $L^2_{(-1,1)}$ thu được do trực hoá hệ $1, x, x^2, \ldots$ gọi là các đa thức Legendre. Chứng minh rằng đa thức Legendre thứ n là

$$g_n(x) = C_n[(x^2 - 1)^n]^{(n)}$$

(đạo hàm cấp n của $C_n[(x^2 - 1)^n]$).

Chỉ dẫn: Các vectơ $1, x, x^2$ độc lập tuyến tính. Chỉ cần chứng minh $g_n(x)$ trực giao với $1, x, \ldots, x^{n-1}$.

10. Chứng minh rằng các đa thức Legendre (xem bài tập trước) làm thành một hệ trực giao đầy đủ của $L^2_{[-1,1]}$.

Chỉ dẫn: Dùng định lý Weierstrass về xấp xỉ các hàm liên tục bằng đa thức (Chương 2).

11. Các phần tử của $L^2_{(-\infty,\infty)}$ thu được do trực hoá hệ e^{-x^2}, xe^{-x^2}, ..., $x^n e^{-x^2}$, ... gọi là hàm Hermite.

Chứng minh rằng hàm Hermite thứ n có dạng:

$$\mathbb{E}_n(x) = C_n[e^{-x^2}]^{(n)}$$

(đạo hàm cấp n của $C_n[e^{-x^2}]$).

12. Các hàm Hermite làm thành một hệ đầy đủ của $L^2_{(-\infty,\infty)}$

Chỉ dẫn: Hàm nguyên (theo s) $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}e^{-x^2}dx$ triệt tiêu tại $s = 0$, cùng với đạo hàm của nó, nếu f trực giao với tất cả các hàm Hermite.

13. Chứng minh rằng nếu A là một tập đo được trong $[0, 2\pi]$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \cos nx dx = \lim_{n\to\infty} \int_A \sin nx dx = 0$$

Chỉ dẫn: Khai triển χ_A theo chuỗi Fourier.

14. Cho $n_1 < n_2 < ...$ là những số nguyên dương. Chứng minh rằng tập các điểm $x \in [0, 2\pi]$ tại đó $\sin n_k x$ hội tụ (khi $k \to \infty$), có độ đo bằng 0.

Chỉ dẫn: Dựa vào bài tập trước.

Phiếm hàm tuyến tính và song tuyến tính.

15. Cho một không gian định chuẩn X. Ta nói một dãy $\{x_n\} \in X$ hội tụ yếu tới $x \in X$ nếu với mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên X, ta đều có $f(x_n) \to f(x)$. Chứng minh rằng trong một không gian Hilbert, nếu $x_n \to x$ yếu và $\|x_n\| \to \|x\|$ thì $x_n \to x$.

16. Cho f là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên một không gian con M của một không gian Hilbert H. Chứng minh rằng có một phiếm hàm tuyến tính liên tục duy nhất khuếch f từ M lên toàn không gian mà vẫn bảo toàn chuẩn của f, và phiếm hàm ấy triệt tiêu trên $M^{\perp}$.

Chỉ dẫn: Dùng định lý Riesz.

17. Cho một tập lồi đóng $C \subset H$ (không gian Hilbert) thực và một điểm $x_0 \notin C$. Chứng minh rằng bao giờ cũng có một $y \in H$ sao cho $(\forall x \in C)\ (y, x - x_0) \geq \alpha > 0$.

Chỉ dẫn: Xem bài tập 4. Nếu a là điểm của C gần x_0 nhất thì với mọi $x \in C$ và mọi α, $0 < \alpha < 1$:

$$\|a + \alpha(x - a) - x_0\|^2 \geq \|a - x_0\|^2 \quad \text{hay}$$

$$2(x - a, a - x) + \alpha(x - a, x - a) \geq 0$$

Cho $\alpha \to 0$, suy ra $(x - a, a - x_0) \geq 0$, do đó

$$(a - x_0, x - x_0) \geq \|a - x_0\|^2 > 0.$$

18. Cho một tập lồi đóng $C \subset H$. Nếu $\{x_n\} \subset C$ và x_n hội tụ yếu tới x_0 (xem bài tập 15) thì $x_0 \in C$.

Chỉ dẫn: Dùng kết quả bài tập 17.

19. Cho một dạng song tuyến tính đối xứng liên tục $f(x, y)$ trên H sao cho $f(x, x) \geq \alpha\|x\|^2$. Với mỗi phiếm hàm tuyến tính liên tục L trên H có một phần tử duy nhất $x_0 \in H$ nghiệm đúng $f(x_0, x) = L(x)\ \forall x \in H$ *(bổ đề Lax-Milgram).*

Chỉ dẫn: Xem bài tập 6.

20. Trong một không gian Hilbert thực, cho một tập lồi đóng C, một dạng song tuyến tính liên tục (không nhất thiết đối xứng) $\pi(x, y)$ và một phiếm hàm tuyến tính liên tục $L(x)$. Giả thiết rằng dạng π là *bức* trên C, nghĩa là

$$(\forall x \in C)\ \ \pi(x, x) \geq \alpha\|x\|^2,\ \alpha > 0$$

Bao giờ cũng có một phần tử duy nhất $x_0 \in C$ đạt cực tiểu của phiếm hàm $J(x) = \pi(x, x) - 2L(x)$ trên C.

Chỉ dẫn: Để ý rằng với mọi x, y :

$$\pi(x + y, x + y) + \pi(x - y, x - y) = 2\pi(x, x) + 2\pi(y, y) \qquad (67)$$

Cho $\{x_n\} \subset C$ là một dãy nghiệm đúng $J(x_n) \to \mu = \lim_{x \in C} J(x)$.

Theo (67) có

$$2J(x_n) + 2J(x_m) = \pi(x_n - x_m, x_n - x_m) + 4J\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right)$$

từ đó, khi $n, m \to \infty : \pi(x_n - x_m, x_n - x_m) \to 0$.

Dựa vào giả thiết bức, suy ra $\{x_n\}$ là dãy cơ bản, và chứng minh được $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ đạt cực tiểu $J(x)$ trên C. Tính duy nhất của x_0 dựa vào tính lồi chặt của $\pi(x, x)$, (và do đó của $J(x)$), tức là $\pi(\theta x + (1-\theta)y, \theta x + (1-\theta)y) < \theta\pi(x, x) + (1-\theta)\pi(y, y)$ với mọi $\theta \in (0, 1)$, trừ khi $x = y$.

21. *(Nguyên lý biến phân cơ bản).* Cho A là một toán tử tuyến tính đối xứng liên tục xác định dương (tức là $(Ax, x) \geq \alpha\|x\|^2$, $\alpha > 0$). Muốn cho phần tử $x_0 \in H$ là nghiệm của phương trình $Ax = y$ với $y \in H$ cho trước, điều kiện cần và đủ là x_0 đạt cực tiểu của phiếm hàm $J(x) = (Ax, x) - 2(x, y)$.

Chỉ dẫn: Viết $J(\alpha(x - x_0) + x_0) \geq J(x_0)$ $(\forall x)$ và cho $\alpha \to 0$ sẽ có $(Ax_0 - y, x - x_0) \geq 0$ $(\forall x)$.

Xem bài tập 6 và bài tập 20.

Toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục.

22. Trong không gian $L^2_{[0,1]}$, cho B là toán tử nhân với t tức là $B : x(t) \mapsto t.x(t)$. Chứng minh rằng B là toán tử tuyến tính liên tục, đối xứng, có chuẩn $\|B\| = 1$, và không có trị riêng nào cả.

Chỉ dẫn: Với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý, lấy $x(t)$ là hàm bằng 0 khi $0 \leq t < 1 - \varepsilon$ và bằng $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ khi $1 - \varepsilon \leq t \leq 1$, sẽ có $\|x\| = 1$ và $(Bx, x) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Mặt khác rõ ràng $\|B\| \leq 1$, cho nên $\|B\| = 1$.

Để thấy rõ B không có trị riêng cần chứng minh rằng: $Bx = \lambda x$ kéo theo $x \equiv 0$.

23. Toán tử đồng nhất: $x \mapsto x$ có hoàn toàn liên tục không?

24. Chuẩn của một toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục A, với các trị riêng là $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ có thể xác định như sau:

$$\|A\| = \max |\lambda_j|$$

25. Toán tử A được cho trong một hệ trực chuẩn $\{e_j\}$ bởi công thức $Ae_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} e_k$, hoàn toàn liên tục, nếu $\sum\sum a_{jk}^2 < \infty$.

Chỉ dẫn: A có thể biểu diễn thành giới hạn của một dãy toán tử hữu hạn chiều.

26. Nếu A là toán tử tuyến tính hoàn toàn liên tục thì nó biến mọi dãy hội

tụ yếu (xem định nghĩa ở bài tập 15) thành dãy hội tụ chuẩn, tức là $x_n \to x$ yếu kéo theo $Ax_n \to Ax$.

Chỉ dẫn: Từ $x_n \to x$ yếu suy ra $\{x_n\}$ bị chặn và $Ax_n \to Ax$ yếu. Nếu $Ax_n \not\to Ax$ thì $\varepsilon > 0$ sao cho $\|Ax_{n_k} - Ax\| > \varepsilon$ với một dãy $n_1, n_2, ..., n_k, ...$ Vì A hoàn toàn liên tục, mà $\{x_n\}$ bị chặn nên $\{Ax_{n_k}\}$ chứa một dãy con hội tụ tới y'. Ta có $y' \neq Ax$ đồng thời $y' = Ax$: mâu thuẫn.

Phương trình tích phân.

27. Giải các phương trình:

a) $\varphi(x) = 3\int_0^2 xs\varphi(s)ds + 3x - 2$

b) $\varphi(x) = 3\int_0^1 xs\varphi(s)ds + 3x - 2$

c) $\varphi(x) = \int_0^1 (x+s)\varphi(s)ds + 18x^2 - 9x - 4.$

d) $\varphi(x) = \int_0^\pi \cos(x+s)\varphi(s)ds + 1.$

Chỉ dẫn: Xem mục 6.3. Lời giải:

a) $\varphi(x) = \frac{9}{7}x - 2;$

b) $\varphi(x) = Cx - 2,$ C hằng số tuỳ ý;

c) $\varphi(x) = 18x^2 + 12x + 9;$

d) $(\varphi x) = 1 - \frac{2\sin x}{1 - \frac{\pi}{2}}.$

28. Giải các phương trình:

a) $\varphi(x) = x + \int_0^x (s-x)\varphi(s)ds.$

b) $\varphi(x) = 1 + \int_0^x (s-x)\varphi(s)ds.$

c) $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(s)ds.$

d) $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 + 6(x-s) - 4(x-s)^2]u(s)ds.$

e) $\varphi(x) = 29 + 6x + \int_0^x (6x - 6s + 5)u(s)ds.$

Chỉ dẫn: Lời giải:

a) $\varphi(x) = \sin x.$

b) $\varphi(x) = \cos x.$

c) $\varphi(x) = e^x$.

d) $\varphi(x) = e^x$.

e) $\varphi(x) = e^{2x} - e^{3x}$.

29. Chứng minh rằng phương trình:

$$\varphi(x) = A + Bx + \int_0^x [C + D(x-s)]\varphi(s)ds$$

(A, B, C, D-- hằng số) có nghiệm dạng $\varphi(x) = K_1 e^{m_1 x} + K_2^{m_2 x}$ trong đó K_1, K_2, m_1, m_2 phụ thuộc A, B, C, D.

Chương 8

KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH TÔPÔ

1. KHÔNG GIAN TÔPÔ

1.1. KHÁI NIỆM CẤU TRÚC TÔPÔ. Trong các không gian metric có thể nói tới giới hạn của các dãy điểm và sự liên tục của các ánh xạ. Nhưng thật ra các khái niệm này không nhất thiết gắn liền với metric. Theo nghĩa trực quan, một dãy điểm x_n hội tụ tới x_0 nếu x_n có thể gần tuỳ ý x_0, miễn là n đủ lớn; ánh xạ $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu $f(x)$ có thể gần tuỳ ý $f(x_0)$ miễn là x đủ gần x_0. Như vậy, mấu chốt trong các khái niệm giới hạn và liên tục không phải là bản thân metric, mà là khái niệm trực quan về sự "gần nhau" giữa các điểm.

Nếu có một metric trong X, thì những điểm gần một điểm $x_0 \in X$, chẳng hạn, là những điểm cách x_0 chưa tới một khoảng cách nào đó. Nhưng nếu không có metric thì vẫn có thể nói đến sự "gần" nhau bằng cách: ta khoanh trong X một vùng V nào đó chứa x_0 và qui định những điểm gần x_0 là những điểm thuộc vùng V. Một cách tổng quát, ta qui định, đối với mỗi điểm $x_0 \in X$, một họ tập làm những vùng "lân cận" cho nó. Khi ấy câu nói trực quan: "x gần tuỳ ý x_0" sẽ có nội dung chính xác: "x thuộc một lân cận tuỳ ý của x_0"; "x đủ gần x_0" sẽ có nghĩa: "x thuộc một lân cận có thể chỉ rõ của x_0", v.v... Làm như thế ta tách được khái niệm gần, xa, ra khỏi khái niệm metric, và có thể xét những không gian trừu tượng trong đó tuy không có metric,

vẫn có thể nói tới sự gần nhau của các điểm và từ đó, nói tới sự hội tụ, tính liên tục, v.v... Đại thể những không gian trừu tượng xây dựng theo cách ấy gọi là không gian tôpô.

Như vậy, cách tự nhiên nhất để xác định sự gần nhau mà không dùng tới metric là qui định các lân cận cho từng điểm của không gian. Đương nhiên các lân cận này cần phải thỏa mãn một số điều kiện hợp lý (các "tiên đề về lân cận") thì từ đó mới có thể xây dựng được các khái niệm giới hạn, liên tục và những khái niệm khác cần thiết cho giải tích.

Nhưng bên cạnh khái niệm lân cận, trong không gian metric còn có một khái niệm quan trọng khác là tập mở, xuất phát từ đó cũng có thể xây dựng được khái niệm gần nhau. Nói rõ hơn, người ta có thể xây dựng không gian tôpô bằng cách bắt đầu qui định các tập được coi là tập mở. Những điều kiện mà họ tập mở cần thỏa mãn để cho phép xây dựng được các khái niệm cần thiết của giải tích, lại rất đơn giản: giao của một số hữu hạn, hoặc hợp của một số bất kỳ tập mở bao giờ cũng mở (Chương 2, Định lý 1). Cho nên về phương pháp trình bày, đi từ tập mở có phần thuận tiện hơn và dưới đây ta sẽ theo đường lối đó, mặc dù về trực quan cách làm đó không được tự nhiên bằng đi từ lân cận.

Định nghĩa. Cho một tập X bất kỳ. Ta nói một họ $\mathcal{G}$ những tập con của X là một *tôpô* (hay *xác định một cấu trúc tôpô*) trên X nếu:

(i) Hai tập $\emptyset$ và X đều thuộc họ $\mathcal{G}$.

(ii) $\mathcal{G}$ kín đối với phép giao hữu hạn, tức là: giao của một số hữu hạn tập thuộc họ $\mathcal{G}$ thì cũng thuộc họ đó.

(iii) $\mathcal{G}$ kín đối với phép hợp bất kỳ, tức là: hợp của một số bất kỳ (hữu hạn hay vô hạn) tập thuộc họ $\mathcal{G}$ thì cũng thuộc họ đó.

Một tập X, cùng với một tôpô $\mathcal{G}$ trên X, gọi là *không gian tôpô* $(X, \mathcal{G})$ (hay đơn giản: không gian tôpô X, nếu không sợ nhầm lẫn). Các tập thuộc họ $\mathcal{G}$ gọi là *tập mở*. Như vậy, cho một tôpô trên một tập X, có nghĩa là qui định rõ những tập con nào của X được coi là tập mở, và việc qui định đó phải chú ý sao cho: $\emptyset$ và X đều là mở; và giao của một số hữu hạn, hoặc hợp của một số bất kỳ tập mở, cũng là tập mở.

Vì họ các tập mở trong một không gian metric thỏa mãn các điều kiện trên, nên các không gian metric (bao gồm cả các không gian định

chuẩn và không gian Hilbert) đều là không gian tôpô.

Cùng trên một tập X có thể xác định nhiều tôpô khác nhau để biến nó thành những không gian tôpô khác nhau. Chẳng hạn, nếu lấy $\mathcal{G} = \{\emptyset, X\}$, nghĩa là qui định chỉ có tập rỗng và bản thân không gian là tập mở thì cố nhiên các điều kiện (i) (ii) (iii) được thỏa mãn : tôpô đó gọi là *tôpô thô* hay *tôpô tầm thường* . Một thái cực khác là lấy $\mathcal{G}$ bằng họ tất cả các tập con của X, nghĩa là qui định mọi tập con của X đều là mở: các điều kiện (i) (ii) (iii) cũng được thoả mãn, và tôpô đó gọi là *tôpô rời rạc*.

Khi có hai tôpô $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ trên X ta nói tôpô $\mathcal{G}$ *yếu hơn* tôpô $\mathcal{G}'$ (hay tôpô $\mathcal{G}'$ *mạnh hơn* tôpô $\mathcal{G}$) nếu $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$, nghĩa là mọi tập mở trong tôpô $\mathcal{G}$ đều là tập mở trong tôpô $\mathcal{G}'$. Dĩ nhiên, trong tất cả các tôpô trên X, tôpô thô là yếu nhất, tôpô rời rạc là mạnh nhất.

1.2. TÔPÔ SINH BỞI MỘT HỌ TẬP HỢP. Trước hết ta nhận xét rằng:

Bổ đề 1. *Giao của một số bất kỳ tôpô trên X*

$$\mathcal{G} = \cap_\alpha \mathcal{G}_\alpha$$

thì cũng là một tôpô trên X.

Thật vậy, điều kiện (i) hiển nhiên. Vả lại nếu $G_i \in \mathcal{G}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ thì $G_i \in \mathcal{G}_\alpha$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ nên $\cap_{i=1}^m G_i \in \mathcal{G}_\alpha$ với mọi α, do đó $\cap_{i=1}^m G_i \in \mathcal{G}$, chứng tỏ rằng điều kiện (ii) cũng được thoả mãn. Điều kiện (iii) chứng minh tương tự.

Bây giờ cho $\mathcal{M}$ là một họ tập con tuỳ ý của X. It nhất có một tôpô bao hàm $\mathcal{M}$, đó là tôpô rời rạc trên X. Vậy họ các tôpô bao hàm $\mathcal{M}$ không rỗng. Theo trên, giao của tất cả các tôpô ấy cũng là một tôpô trên X bao hàm $\mathcal{M}$, và dĩ nhiên đó là *tôpô yếu nhất chứa* $\mathcal{M}$. Ta gọi nó là *tôpô sinh bởi* $\mathcal{M}$ và ký hiệu $\mathcal{G}(\mathcal{M})$. Thành thử :

Định lý 1. *Cho trước một họ tập con $\mathcal{M}$ tuỳ ý của X, bao giờ cũng có một tôpô duy nhất $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ trên X, bao hàm $\mathcal{M}$ và yếu hơn tất cả các tôpô khác trên X bao hàm $\mathcal{M}$.* □

Đương nhiên do các điều kiện (i) (ii) (iii) của một tôpô, nên tôpô $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ sinh bởi $\mathcal{M}$ phải bao gồm:

a) các tập hợp $\emptyset$ và X;

b) mọi tập nào là giao của một số hữu hạn tập trong họ $\mathcal{M}$ đã cho;

c) mọi tập nào là hợp của một số bất kỳ những tập có dạng b) vừa nói.

Ngược lại, cho $\mathcal{G}'$ là họ tất cả các tập vừa mô tả. Rõ ràng $\mathcal{G}'$ thỏa mãn các điều kiện (i) và (iii) của một tôpô trên X. Mặt khác, nếu $G_1, G_2 \in \mathcal{G}'$, tức là, chẳng hạn

$$G_1 = \cup_\alpha M_\alpha,\ G_2 = \cup_\beta N_\beta$$

với M_α, N_β là giao của một số hữu hạn tập thuộc họ $\mathcal{M}$, thì $G_1 \cap G_2 = \cup_\alpha \cup_\beta (M_\alpha \cap N_\beta)$, với $M_\alpha \cap N_\beta$ cũng là giao của một số hữu hạn tập thuộc họ $\mathcal{M}$. Vậy $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}'$, chứng tỏ rằng $\mathcal{G}'$ cũng thỏa mãn cả điều kiện (ii). Thành thử $\mathcal{G}'$ cũng là một tôpô bao hàm $\mathcal{M}$, và do đó $\mathcal{G}' \supset \mathcal{G}(\mathcal{M})$. Nhưng ở trên đã thấy $\mathcal{G}(\mathcal{M}) \supset \mathcal{G}'$, vậy $\mathcal{G}(\mathcal{M}) = \mathcal{G}'$, tức là $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ *chính là họ tất cả các tập có dạng a), b) hoặc c) đã mô tả.*

Một trường hợp riêng đáng chú ý là khi $\mathcal{M}$ có các tính chất sau đây:

1) Mỗi $x \in X$ đều thuộc ít nhất một $G \in \mathcal{M}$.

2) Với mọi $G_1, G_2 \in \mathcal{M}$ và mọi $x \in G_1 \cap G_2$ đều có một $G \in \mathcal{M}$ sao cho $x \in G \subset G_1 \cap G_2$.

Định lý 2. *Nếu $\mathcal{M}$ có các tính chất 1) 2) nói trên thì tôpô $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ sinh bởi $\mathcal{M}$ là họ tất cả các tập có thể biểu diễn bằng hợp của một số (bất kỳ) tập thuộc họ $\mathcal{M}$.*

Chứng minh. Rõ ràng $\emptyset = \cup_{\alpha \in \emptyset} G_\alpha$, và do 1) nên $X == \cup_{x \in X} G_x$, trong đó G_x chỉ một phần tử của $\mathcal{M}$ chứa x. Vả lại, nếu $G = G_1 \cap G_2$ với $G_1, G_2 \in \mathcal{M}$ thì do 2) nên với mọi $x \in G$ đều có $G_x \in \mathcal{M}$ sao cho $x \in G_x \subset G_1 \cap G_2$, và rõ ràng $G = \cup_{x \in G} G_x$. Thành thử mọi tập có dạng a) hoặc b) mô tả ở trên đều là hợp của một số tập thuộc họ $\mathcal{M}$. Do đó các tập có dạng c) cũng thế. □

Ta nói một họ $\mathcal{M} \subset \mathcal{G}$ là một *cơ sở* của tôpô $\mathcal{G}$ nếu mọi tập $G \in \mathcal{G}$ đều là hợp của một họ con của $\mathcal{M}$. Như vậy Định lý 2 có thể phát biểu:

Nếu họ $\mathcal{M}$ có các tính chất 1) và 2) thì $\mathcal{M}$ là cơ sở của tôpô $\mathcal{G}(\mathcal{M})$.

1.3. LÂN CẬN. *Lân cận* của một điểm x trong một không gian tôpô X là bất cứ tập nào bao hàm một tập mở chứa x. Nói cách khác V là lân cận của x nếu có một tập mở G sao cho $x \in G \subset V$.

Định lý 3. *Một tập là mở khi và chỉ khi nó là lân cận của mọi điểm của nó.*

Chứng minh. Nếu G là mở thì rõ ràng, theo định nghĩa lân cận, nó phải là lân cận của mọi điểm $x \in G$. Ngược lại, giả sử G có tính chất này và với mỗi $x \in G$ hãy gọi G_x là tập mở sao cho $x \in G_x \subset G$. Khi ấy $G = \cup_{x \in G} G_x$, cho nên G là tập mở. □

Thành thử, nếu biết tất cả các lân cận của tất cả các điểm thì có thể dựa vào định lý trên để nhận ra tất cả các tập mở. Điều đó cho phép xác định tôpô bởi họ tất cả các lân cận. Cụ thể là:

Định lý 4. *Nếu $\mathcal{V}_x$ là họ tất cả các lân cận của điểm x thì:*
(i) *$x \in V$ với mọi $V \in \mathcal{V}_x$;*
(ii) *Nếu $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$ thì $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$;*
(iii) *Nếu $V_1 \in \mathcal{V}_x$ và $V_2 \supset V_1$ thì $V_2 \in \mathcal{V}_x$;*
(iv) *Với mỗi $V \in \mathcal{V}_x$ có một $W \in \mathcal{V}_x$ sao cho $V \in \mathcal{V}_y$ cho mọi $y \in W$.*

Ngược lại, nếu với mỗi $x \in X$ có một họ $\mathcal{V}_x$ các tập con của X, sao cho thỏa mãn các điều kiện trên thì có một tôpô duy nhất trên X nhận mỗi $\mathcal{V}_x$ làm họ tất cả các lân cận của điểm x.

Chứng minh. Các tính chất (i) (ii) (iii) hiển nhiên. Để chứng minh (iv) ta nhận xét rằng nếu $V \in \mathcal{V}_x$ thì có một tập mở G sao cho $x \in G \subset V$: lấy $W = G$ ta sẽ có, với mọi $y \in W$, $W \in \mathcal{V}_y$, do đó $V \in \mathcal{V}_y$.

Bây giờ giả sử với mỗi $x \in X$ có một họ $\mathcal{V}_x$ thỏa mãn các điều kiện (i) (ii) (iii) (iv). Cho $\mathcal{G}$ là họ tất cả các tập G sao cho: *$G \in \mathcal{V}_x$ với mọi $x \in G$*. Rõ ràng $\emptyset \in G$ và do (i) và (iii) nên $X \in \mathcal{G}$. Vả lại nếu $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ thì $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$, vì rằng với mọi $x \in G_1 \cap G_2$ ta có $G_1 \in \mathcal{V}_x$ (do $x \in G_1$), $G_2 \in \mathcal{V}_x$ (do $x \in G_2$) và do đó, theo (ii), $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{V}_x$. Nếu $G_\alpha \in \mathcal{G}$ thì $\cup_\alpha G_\alpha \in G$, vì rằng với mọi $x \in \cup_\alpha G_\alpha$ ta có $x \in G_{\alpha_0}$ (với một α_0 nào đó) và $G_{\alpha_0} \in \mathcal{V}_x$, do đó, theo (iii), $\cup_\alpha G_\alpha \in \mathcal{V}_x$. Vậy $\mathcal{G}$ là một tôpô trên X. Trong tôpô đó, ta hãy chứng minh rằng mỗi $\mathcal{V}_x$ là họ tất cả các lân cận của x. Thật vậy, nếu V là một lân cận của x thì theo định nghĩa phải có một tập $G \in \mathcal{G}$ với $x \in G \subset V$; và vì $x \in G$

nên theo định nghĩa của $\mathcal{G}$, $G \in \mathcal{V}_x$, rồi do đó, theo (iii) $V \in \mathcal{V}_x$. Ngược lại, cho $V \in \mathcal{V}_x$ và gọi G là tập tất cả các điểm y sao cho $V \in \mathcal{V}_y$. Với mỗi $y \in G$, vì $V \in \mathcal{V}_y$ nên theo (iv) có một $W_y \in \mathcal{V}_y$ sao cho $V \in \mathcal{V}_z$ cho mọi $z \in W_y$: điều này có nghĩa là $W_y \subset G$, và do đó theo (iii), $G \in \mathcal{V}_y$. Vậy $G \in \mathcal{G}$, và vì $x \in G \subset V$ nên V là một lân cận của x. Tóm lại $\mathcal{G}$ là tôpô nhận mỗi $\mathcal{V}_x$ làm họ tất cả các lân cận của x.

Nếu có một tôpô $\mathcal{G}'$ cũng có tính chất đó thì theo Định lý 3, ta phải có $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$. Vậy tôpô đó là duy nhất. □

Một tập $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x$ gọi là một *cơ sở lân cận* (hay một *hệ cơ bản lân cận*) của x nếu với mọi $V \in \mathcal{B}_x$ tồn tại một $W \in \mathcal{B}_x$ sao cho $W \subset V$. Chẳng hạn, họ các tập mở chứa x bao giờ cũng là cơ sở lân cận của x. Trong không gian metric, họ các hình cầu tâm x, bán kính $1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ cũng là một cơ sở lân cận của x. Dĩ nhiên, biết một cơ sở lân cận $\mathcal{B}_x$ của x thì mỗi lân cận của x sẽ là một tập bao hàm một phần tử nào đó của $\mathcal{B}_x$.

1.4. TẬP ĐÓNG. Cũng như trong không gian metric, một điểm x gọi là *điểm trong* của tập A nếu có một lân cận x nằm trọn trong A (tức là bản thân A là một lân cận của x). Theo Định lý 3, một tập mở khi và chỉ khi mọi điểm của nó đều là điểm trong của nó.

Một điểm x gọi là *điểm biên* của một tập A nếu mọi lân cận của x đều chứa ít nhất một điểm của A và một điểm không thuộc A. Rõ ràng một tập là mở khi và chỉ khi nó không chứa điểm biên nào của nó cả.

Ta gọi một tập là *đóng* nếu no chứa tất cả các điểm biên của nó.

Định lý 5. *Một tập là đóng khi và chỉ khi phần bù của nó là tập mở.*

Chứng minh. Cho một tập F và phần bù $G = X \setminus F$ của nó. Đương nhiên mỗi điểm biên của F cũng là điểm biên của G và ngược lại. Do đó F chứa tất cả các điểm biên (tức F đóng) khi và chỉ khi G không chứa điểm biên nào (tức G mở, theo nhận xét ở trên). □

Từ định lý này ta suy ra rằng nếu gọi $\mathcal{F}$ là họ các tập đóng thì:

1*) $\emptyset$ và X đều thuộc $\mathcal{F}$ (đều là đóng).

2*) $\mathcal{F}$ kín đối với phép hợp hữu hạn (nghĩa là hợp một số hữu hạn tập đóng là đóng).

3*) $\mathcal{F}$ kín đối với phép giao bất kỳ (nghĩa là giao một số bất kỳ tập đóng là đóng).

Thành thử muốn xác định một tôpô trên X chỉ cần chọn ra một họ tập con $\mathcal{F}$ của X có các điều kiện 1*) 2*) 3*) làm tập đóng: khi ấy, tôpô sẽ gồm có tất cả các phần bù của những tập thuộc họ $\mathcal{F}$.

Một điểm x gọi là *điểm tụ* của một tập A nếu mọi lân cận của nó đều chứa ít nhất một điểm của A khác với x. Dễ thấy rằng một điểm không thuộc A là điểm biên của A khi và chỉ khi nó là một điểm tụ của A, cho nên: *một tập là đóng khi và chỉ khi nó chứa tất cả các điểm tụ của nó.*

Đối với một tập $A \subset X$, bao giờ cũng có : một tập mở bao hàm trong A (đó là $\emptyset$); một tập đóng bao hàm A (đó là X).

Hợp của tất cả các tập mở nằm trọn trong A là tập mở lớn nhất chứa trong A. Ta gọi nó là *phần trong* của A và ký hiệu nó bằng $\mathring{A}$ hay int$A$ (tiếng Anh interior, nghĩa là trong).

Giao của tất cả các tập đóng bao hàm A dĩ nhiên là tập đóng nhỏ nhất chứa A. Ta gọi nó là *bao đóng* của A và ký hiệu nó bằng $\overline{A}$ hay cl$A$ (tiếng Anh closure, nghĩa là bao đóng).

Định lý 6. *Phần trong $\mathring{A}$ của một tập A chính là tập các điểm trong của A. Bao đóng $\overline{A}$ của A bằng hợp của A và tất cả các điểm biên của A. Do đó A là mở khi và chỉ khi $A = \mathring{A}$; A là đóng khi và chỉ khi $A = \overline{A}$.*

Chứng minh. Chứng minh định lý này không khác gì chứng minh định lý tương tự cho không gian metric (Chương 2, Định lý 4).

1.5. ÁNH XẠ LIÊN TỤC, KHÔNG GIAN ĐỒNG PHÔI. Nhờ có khái niệm lân cận ta có thể định nghĩa ánh xạ liên tục như sau:

Cho X, Y là hai không gian tôpô. Một ánh xạ f từ X vào Y được gọi là *liên tục tại* x_0, nếu với mọi lân cận U_{y_0} của điểm $y_0 = f(x_0)$ đều có một lân cận V_{x_0} của điểm x_0 sao cho $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$, nghĩa là: $x \in V_{x_0} \Rightarrow f(x) \in U_{y_0}$. Ánh xạ f gọi là *liên tục* nếu nó liên tục tại mọi $x \in X$. Hiển nhiên định nghĩa này bao hàm định nghĩa về ánh xạ liên tục từ một không gian metric vào một không gian metric khác.

Sau đây là một định lý khái quát định lý tương ứng đối với không gian metric (Chương 2, Định lý 11).

Định lý 7. *Một ánh xạ f từ một không gian tôpô X vào một không gian tôpô Y là liên tục khi và chỉ khi nó có một trong hai điều kiện dưới đây:*

(i) *Nghịch ảnh (bởi f) của mọi tập mở (trong Y) đều là tập mở (trong X).*

(ii) *Nghịch ảnh (bởi f) của mọi tập đóng (trong Y) đều là tập đóng (trong X).*

Chứng minh. Giả sử f liên tục và cho G là một tập mở trong $Y, f^{-1}(G)$ là nghịch ảnh của G. Nếu $x \in f^{-1}(G)$ thì $f(x) \in G$, và vì G mở nên G là một lân cận của $f(x)$, và theo định nghĩa ánh xạ liên tục, có một lân cận V_x của x sao cho $f(V_x) \subset G$, tức là $V_x \subset f^{-1}(G)$. Vậy mỗi $x \in f^{-1}(G)$ đều nhận $f^{-1}(G)$ làm một lân cận. Do đó $f^{-1}(G)$ mở. Ngược lại giả sử ánh xạ f thỏa mãn điều kiện (i) và cho x_0 là một điểm bất kỳ của X. Nếu U_{y_0} là một lân cận của $y_0 = f(x_0)$ thì có một tập mở G sao cho $y_0 \in G \subset U_{y_0}$ và $V_{x_0} = f^{-1}(G)$ sẽ là một tập mở chứa x_0 và có $f(V_{x_0}) = G \subset U_{y_0}$. Vậy f liên tục tại x_0.

Thành thử (i) tương đương với điều kiện : f liên tục. Nhưng vì nghịch ảnh của phần bù của một tập là phần bù của nghịch ảnh của tập đó (Chương 1, mục 7.3), nên (i) và (ii) tương đương nhau. □

Ta nói hai không gian tôpô X, Y là *đồng phôi* nếu có một ánh xạ 1-1 π từ X lên Y sao cho qua ánh xạ đó họ tất cả các tập mở trong X biến thành họ tất cả các tập mở trong Y; nói khác đi, sao cho ảnh của mỗi tập mở trong X là một tập mở trong Y, và nghịch ảnh của mỗi tập mở trong Y là một tập mở trong X. Khi ấy ánh xạ π gọi là một *phép đồng phôi* giữa X và Y.

Do Định lý 7, ta có mệnh đề:

Một ánh xạ 1-1 π từ X lên Y là một phép đồng phôi khi và chỉ khi π và π^{-1} (ánh xạ ngược) đều liên tục.

Như vậy tôpô trong hai không gian đồng phôi là ảnh và nghịch ảnh của nhau, và hai không gian đồng phôi có những tính chất tôpô như nhau, cho nên về phương diện tôpô có thể xem chúng là đồng nhất (mỗi cái là bản sao của cái kia).

1.6. TÔPÔ YẾU XÁC ĐỊNH BỞI MỘT HỌ HÀM.

Cho f là một ánh xạ từ một tập X vào một tập Y. Nếu trên Y có cho một tôpô $\mathcal{G}_y$ thì do toán tử f^{-1} bảo toàn các phép toán tập (Chương 1, mục 1.3), nên $f^{-1}(\mathcal{G}_y)$ (tức là họ tất cả các tập có dạng $f^{-1}(G)$ với $G \in \mathcal{G}_y$) sẽ là một tôpô trên X. Nếu X vốn đã có sẵn một tôpô $\mathcal{G}_x$ thì Định lý 7 cho biết rằng f là ánh xạ liên tục khi và chỉ khi $f^{-1}(\mathcal{G}_y) \subset \mathcal{G}_x$, nghĩa là khi và chỉ khi nghịch ảnh của tôpô trên Y (tức là $f^{-1}(\mathcal{G}_y)$) yếu hơn tôpô trên $X(\mathcal{G}_x)$. Cũng do đó ta thấy rằng: nếu trên Y đã có một tôpô, mà trên X chưa có tôpô, thì có thể biến X thành không gian tôpô bằng cách gán cho nó tôpô $f^{-1}(\mathcal{G}_y)$: đó là tôpô yếu nhất bảo đảm sự liên tục của ánh xạ f.

Tổng quát hơn, cho một họ ánh xạ $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}$, trong đó mỗi Y_α là một không gian tôpô, với tôpô $\mathcal{G}_\alpha$. Khi ấy tôpô trên X sinh bởi họ $\mathcal{M} = \cup_\alpha f_\alpha^{-1}(\mathcal{G}_\alpha)$ (theo Định lý 1) sẽ là *tôpô yếu nhất bảo đảm sự liên tục của tất cả các ánh xạ* f_α; ta gọi nó là *tôpô yếu xác định trên* X *bởi họ* f_α.

Hai trường hợp thường gặp nhất là tôpô tương đối và tôpô tích.

Tôpô tương đối. Nếu M là một tập con của một không gian tôpô $(X, \mathcal{G})$ thì ta có thể xét ánh xạ f từ M vào X biến mỗi điểm $x \in M$ thành chính x, và gán cho M tôpô $f^{-1}(\mathcal{G})$. Tôpô này gọi là *tôpô tương đối* cảm sinh từ X : một tập A là mở trong tôpô này khi và chỉ khi $A = M \cap G$, với G là một tập mở trong X.

Tôpô tích. Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_m$ là những không gian tôpô, và $X = \prod_{i=1}^{m} X_i$ (tích trực tiếp) thì ta có thể xét các phép chiếu $p_i : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \to x_i$. Tôpô yếu xác định trên X bởi họ $p_1, p_2, \ldots, p_m$ gọi là *tôpô tích*: một lân cận của điểm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ trong tôpô này là một tập có dạng $U_1(x_1) \times U_2(x_2) \times \ldots \times U_m(x_m)$ trong đó $U_i(x_i)$ là một lân cận của x_i trong X_i.

Khi $\{X_\lambda\}(\lambda \in \Lambda)$ là một họ bất kỳ không gian tôpô thì tích trực tiếp $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ được hiểu là tập tất cả các hàm $x = (x_\lambda)$ trên Λ sao cho $x_\lambda \in X_\lambda \; \forall \lambda \in \Lambda$. Khi ấy *tôpô tích* trên X là tôpô yếu nhất bảo đảm sự liên tục của các phép chiếu $p_\lambda : x \mapsto x_\lambda$: đó cũng là tôpô sinh bởi họ tất cả các tập $p_\lambda^{-1}(U)$, với $\lambda \in \Lambda$ và U là tập mở trong X_λ, hay

cũng là tôpô sinh bởi họ các tập có dạng $\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ với U_λ là tập mở trong X_λ và $U_\lambda = X_\lambda$ với mọi λ chỉ trừ một số hữu hạn chỉ số.

2. GIỚI HẠN, TÍNH COMPAC

2.1. GIỚI HẠN, LỌC. Trong không gian tôpô cũng có thể định nghĩa sự hội tụ của một dãy điểm tương tự như trong không gian metric, cụ thể là ta nói một dãy $\{x_n\} \subset X$ *hội tụ* tới điểm x (hoặc x là *giới hạn* của x_n) và viết $x_n \to x$ nếu với mọi lân cận V cho trước của x đều tồn tại n_0 sao cho $x_n \in V$ với mọi $n \geq n_0$.

Tuy nhiên nếu trong không gian metric nhiều tính chất quan trọng có thể mô tả qua các dãy hội tụ, thì trong không gian tôpô tổng quát vấn đề phức tạp hơn. Chẳng hạn, trong không gian metric một điểm x thuộc bao đóng của một tập A khi và chỉ khi có một dãy $\{x_n\} \subset A$ hội tụ tới x, nhưng trong không gian tôpô điều đó nói chung không còn đúng. Vì vậy ở đây cần phải đưa vào một khái niệm rộng hơn khái niệm dãy hội tụ.

Một họ S những tập con *không rỗng* của một tập X gọi là một *lọc* trên X nếu:

1) $A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S$;
2) $A \in S,\ A \subset B \Rightarrow B \in S$.

Ví dụ: a) Họ tất cả các tập chứa một tập cho trước $A \subset X$; b) Họ tất cả các lân cận của một điểm $x \in X$.

Một họ $\mathcal{B}$ những tập con *không rỗng* của X, gọi là một *cơ sở lọc* nếu với mọi $A, B \in \mathcal{B}$ có một $C \in \mathcal{B}$ sao cho $C \subset A \cap B$. Khi ấy họ tất cả các tập M sao cho $M \supset A$, với $A \in \mathcal{B}$ (bất kỳ), làm thành một lọc, gọi là *lọc sinh bởi cơ sở* $\mathcal{B}$.

Với mỗi dãy $\{x_n\}$ ta có thể cho ứng cơ sở lọc gồm tất cả các tập $S_n = \{x_i : i \geq n\}$. Lọc sinh bởi cơ sở này gọi là *lọc sơ cấp* ứng với dãy $\{x_n\}$.

Bây giờ cho một không gian tôpô X. Ta nói một lọc (hay cơ sở lọc) S trên X *hội tụ tới* x nếu mỗi lân cận của x đều bao hàm một tập thuộc S. Khi ấy ta viết $S \to x$ và cũng gọi x là *giới hạn* của S. Nếu S là một lọc thì rõ ràng điều đó cũng có nghĩa là: mọi lân cận

của x đều thuộc S.

Ta nói một lọc S *mạnh hơn* một lọc T nếu $T \subset S$. Vì họ các lân cận của một điểm cũng là một lọc, nên khái niệm hội tụ cũng có thể định nghĩa : $S \to x$ nếu S mạnh hơn lọc các lân cận của x.

Dễ thấy rằng: một dãy $\{x_n\} \subset X$ hội tụ tới x khi và chỉ khi lọc sơ cấp tương ứng hội tụ tới x. Thành thử khái niệm lọc có thể coi là khái quát khái niệm dãy. Vả lại, nếu S, T là hai lọc sơ cấp ứng với hai dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ và nếu $\{x_n\}$ là dãy con của $\{y_n\}$ thì đối với mỗi tập $T_m = \{y_i : i \geq m\}$ đều tìm được n sao cho $S_n = \{x_i : i \geq n\} \subset T_m$, cho nên ta có $T \subset S$, nghĩa là lọc S mạnh hơn lọc T. Ngược lại, nếu lọc S mạnh hơn lọc T thì tập T_1 thuộc S cho nên phải bao hàm một S_{n_0} nào đó và ta có $\{x_i : i \geq n_0\} \subset \{y_n\}$, chứng tỏ rằng dãy $\{x_n\}$, bỏ đi một số hữu hạn phần tử, thì là một dãy con của $\{y_n\}$. Như vậy việc chuyển từ một lọc sang một lọc mạnh hơn chẳng qua là khái quát việc lấy một dãy con của một dãy cho trước. Ta cũng để ý thêm rằng nếu $\{x_n\} \subset A$ thì A thuộc lọc sơ cấp S ứng với dãy $\{x_n\}$ (do điều kiện 2 trong định nghĩa lọc). Ngược lại, nếu A thuộc lọc này thì A phải bao hàm một $S_{n_0} = \{x_i : i \geq n_0\}$ nào đó, cho nên toàn dãy $\{x_n\}$, trừ một số hữu hạn phần tử, nằm trong A. Vậy một lọc chứa A có thể coi là khái quát một dãy trong A.

Với khái niệm lọc ta được lại trong không gian tôpô nhiều sự kiện tương tự như trong không gian metric, chẳng hạn:

Định lý 8. *Một tập A là đóng khi và chỉ khi mọi lọc chứa A mà hội tụ thì phải có giới hạn thuộc A.*

Chứng minh. Nếu $A \in S$ và $S \to x$ thì mọi lân cận V của x đều thuộc S, cho nên $A \cap V \in S$ (điều kiện 1 trong định nghĩa lọc), do đó $A \cap V \neq \emptyset$ (vì mọi phần tử của S đều không rỗng), nghĩa là: mọi lân cận của x đều có chứa những điểm của A. Nói cách khác, x thuộc bao đóng của A. Ngược lại nếu x thuộc bao đóng của A thì mọi lân cận V của x đều có chứa những điểm của A, cho nên các tập $A \cap V \neq \emptyset$ làm thành một cơ sở lọc: đương nhiên lọc sinh bởi cơ sở này chứa A (vì $A \supset A \cap V$) và chứa tất cả các lân cận của x (vì $V \supset A \cap V$) cho nên lọc đó hội tụ tới x. Vậy x thuộc bao đóng của A khi và chỉ khi x là giới hạn của một lọc chứa A. Từ đó suy ra kết quả nói trên. □

Nếu f là một ánh xạ từ X vào Y và S là một cơ sở lọc trên X thì $f(S)$ là một cơ sở lọc trên Y, vì $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Bằng phương pháp tương tự như trên, độc giả có thể chứng minh dễ dàng:

Một ánh xạ f từ một không gian tôpô X vào không gian tôpô Y liên tục tại x khi và chỉ khi với mọi lọc $S \to x$ ta đều có $f(S) \to f(x)$.

Ta thấy rõ nhiều kết quả suy rộng những sự kiện trong không gian metric. Tuy nhiên có một vấn đề phải chú ý: trong không gian metric, giới hạn của một dãy, nếu có, bao giờ cũng là duy nhất, còn ở đây không nhất thiết như thế. Muốn bảo đảm tính duy nhất của giới hạn ta xét các không gian tôpô đặc biệt thỏa mãn *tiên đề tách* sau đây:

Với mọi cặp điểm khác nhau $x_1, x_2 \in X$ đều có hai lân cận V_1, V_2 của x_1, x_2 sao cho $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (nói cách khác hai điểm khác nhau bao giờ cũng có thể tách được bởi hai lân cận rời nhau).

Một không gian tôpô thỏa mãn điều kiện đó gọi là *không gian tách*[1], hay *không gian Hausdorff*, và tôpô của nó cũng gọi là *tôpô tách* hay *tôpô Hausdorff*.

Định lý 9. *Trong không gian tôpô Hausdorff một lọc chỉ có thể hội tụ tới nhiều nhất là một điểm.*

Chứng minh. Giả sử trái lại có một lọc S hội tụ tới hai điểm khác nhau x_1, x_2. Vì X là không gian Hausdorff nên tồn tại hai lân cận V_1, V_2 của x_1, x_2 sao cho $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Nhưng V_1, V_2 đều thuộc S (vì $S \to x_1$ và $S \to x_2$), vậy theo điều kiện 1) trong định nghĩa lọc, $V_1 \cap V_2 \in S$, nhưng $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, trái với định nghĩa lọc. □

Các không gian metric đều là không gian tôpô Hausdorff, và phần lớn các không gian tôpô cần dùng trong giải tích cũng là Hausdorff.

2.2. KHÔNG GIAN COMPAC. Trong Chương 2, tiết 4, một không gian metric X được gọi là compac nếu mọi dãy vô hạn $\{x_n\} \subset X$ đều chứa một dãy con hội tụ (trong X). Chuyển sang không gian tôpô ta có định nghĩa:

Một không gian tôpô X gọi là *compac* nếu mỗi lọc S trên X đều có một lọc mạnh hơn hội tụ.

[1] Chú ý rằng không gian tách (separated space) khác không gian tách được (separable space), đã định nghĩa ở cuối tiết 4, Chương 2.

Định lý 10. *Một không gian tôpô X là compac khi và chỉ khi nó có một trong hai điều kiện dưới đây:*

(i) *Mọi phủ mở của X đều chứa một phủ con hữu hạn, nghĩa là: nếu $\cup_\alpha G_\alpha \supset X$ và các G_α mở thì phải có các $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, sao cho $\cup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \supset X$*

(ii) *Bất kỳ họ tập đóng nào trong X mà có giao rỗng thì phải chứa một họ con hữu hạn có giao rỗng , nghĩa là nếu $\cap_\alpha F_\alpha = \emptyset$ và các F_α đóng thì phải có các $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, sao cho $\cap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \emptyset$.*

Chứng minh. Bằng cách chuyển qua phần bù ta thấy ngay (i) và (ii) tương đương. Vậy chỉ cần chứng minh rằng X compac khi và chỉ khi có (ii).

Trước hết, giả sử X compac và cho $\{F_\alpha\}$ là một họ tập đóng với $\cap_\alpha F_\alpha = \emptyset$. Nếu mọi họ con hữu hạn của họ đó đều có giao không rỗng thì các tập có dạng $\cap_{i=1}^n F_{\alpha_i}$ sẽ làm thành một cơ sở lọc, và sẽ có một lọc S mạnh hơn lọc sinh bởi cơ sở này, hội tụ tới một điểm $x \in X$. Vì các F_α đóng, mà $F_\alpha \in S$, $S \to x$, nên $x \in F_\alpha$, với mọi α, trái với giả thiết các F_α không có điểm chung. Vậy phải có một họ con hữu hạn của họ $\{F_\alpha\}$ có giao rỗng .

Ngược lại, giả sử có điều kiện (ii) và cho S là một lọc bất kỳ trên X. Ký hiệu $\bar{A}$ là bao đóng của A. Nếu $\cap_{A \in S} \overline{A} = \emptyset$ thì tồn tại $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sao cho

$$\cap_{i=1}^n \overline{A_i} = \emptyset,$$

trái với định nghĩa lọc, vì các $\overline{A_i} \supset A_i$ nên đều thuộc S. Vậy phải có một điểm x thuộc tất cả các bao đóng $\overline{A}$ của các tập $A \in S$, tức là một điểm x sao cho mỗi lân cận V của nó đều có chứa những điểm của mỗi tập $A \in S$. Khi ấy các tập có dạng $V \cap A$ đều không rỗng và làm thành một cơ sở lọc (vì họ đó kín đối với phép giao hữu hạn, như có thể kiểm tra lại dễ dàng). Lọc sinh bởi cơ sở này sẽ mạnh hơn S và mạnh hơn lọc các lân cận của x, nghĩa là hội tụ tới x. Vậy X đúng là compac. □

Hệ quả. *Đối với không gian metric, hai định nghĩa về compac* (định nghĩa mới dùng lọc, và định nghĩa cũ dùng dãy) *tương đương.*

Thật vậy, theo Định lý 9, Chương 2, một không gian metric X là compac theo nghĩa dãy khi và chỉ khi nó có một trong hai tính chất nêu trên, tức là nó compac theo nghĩa lọc.

Một tập con M của một không gian tôpô X gọi là *compac* nếu mỗi lọc chứa M đều có một lọc mạnh hơn, hội tụ tới một điểm thuộc M. Dễ thấy rằng nếu coi M là một không gian tôpô, với tôpô cảm sinh từ X, thì M là một không gian compac khi và chỉ khi nó là một tập compac, vì rằng mỗi lọc trên M đều là cơ sở của một lọc trên X chứa M, và ứng với mỗi lọc S trên X chứa M đều có một lọc trên M tạo thành bởi các tập $M \cap A$, với $A \in S$.

Từ Định lý 10 ta suy ra:

Một tập con M của một không gian tôpô X là compac khi và chỉ khi nó có một trong hai điều kiện dưới đây:

(i) *Mọi phủ mở của M đều chứa một phủ con hữu hạn.*

(ii) *Bất kỳ họ tập đóng nào trong X mà có giao không cắt M thì phải chứa một họ con hữu hạn vẫn có giao không cắt M.*

Điều kiện (ii) dĩ nhiên cũng có thể phát biểu:

(ii) Bất kỳ họ tập đóng nào mà mọi họ con hữu hạn đều có điểm chung thuộc M thì cả họ cũng phải có điểm chung thuộc M.

Một tập con M của không gian tôpô X gọi là *compac tương đối* nếu bao đóng $\overline{M}$ của nó compac. Dĩ nhiên nếu tập M compac tương đối thì mọi lọc chứa M đều có một lọc mạnh hơn, hội tụ (tới một giới hạn không nhất thiết thuộc M), vì mỗi lọc chứa M thì cũng chứa cả $\overline{M} \supset M$. Nhưng ngược lại, một tập M sao cho mọi lọc chứa M đều có một lọc mạnh hơn, hội tụ -- không nhất thiết là compac tương đối nếu X là không gian tôpô bất kỳ. Có thể chứng minh rằng nó là compac tương đối nếu X là không gian tách và chính qui, theo nghĩa: với mỗi tập đóng A và mỗi điểm $x \notin A$ đều có một tập mở $U \supset A$ và một lân cận V của x sao cho $U \cap V = \emptyset$ [1].

Định lý 11. (i) *Mỗi tập con đóng của một không gian tôpô compac đều là compac.*

(ii) *Trong một không gian Hausdorff, mỗi tập con compac đều là đóng.*

Chứng minh. (i) Nếu M là một tập con đóng của một không gian compac X, thì với mọi lọc chứa M, do X compac phải có một lọc

[1] Xem N. Bourbaki, Topologie generale, Chương 1, mục 3.3)

mạnh hơn hội tụ tới một x nào đó, mặt khác do M đóng nên $x \in M$. Vậy M compac.

2) Giả sử X là không gian Hausdorff và $M \subset X$ là một tập compac. Với mỗi lọc S chứa M và hội tụ tới một phần tử x, đều có một lọc mạnh hơn, hội tụ tới một phần tử nào đó, $y \in M$. Dĩ nhiên lọc này cũng hội tụ tới x (vì nó mạnh hơn S), nhưng trong không gian Hausdorff một lọc chỉ hội tụ tới một giới hạn là nhiều nhất (Định lý 9) nên $x = y$. Vậy $x \in M$ và theo Định lý 8, M đóng. □

Định lý 12. *Ảnh của một tập compac qua một ánh xạ liên tục cũng là một tập compac trong bản thân.*

Chứng minh. Định lý này có thể chứng minh dựa vao đặc tính của các ánh xạ liên tục $f : f(S) \to f(x)$ với mọi lọc $S \to x$. Nhưng cũng có thể chứng minh dựa vào đặc tính của tập compac, nêu ở Định lý 10. Thật vậy, cho M là một tập compac, $f(M)$ là ảnh của M qua ánh xạ liên tục f. Nếu $\mathcal{J}$ là một phủ mở của $f(M)$ thì $f^{-1}(\mathcal{J})$ là một phủ mở của M, và do đó phải chứa một phủ con hữu hạn. Các phần tử của $\mathcal{J}$ mà các nghịch ảnh thuộc phủ con này sẽ làm thành một phủ con hữu hạn của $f(M)$, chứng tỏ $f(M)$ compac. □

Hệ quả. *Một hàm số thực liên tục trên một tập M compac thì bị chặn trên tập đó và đạt một cực đại và một cực tiểu trên tập đó.*

Thật vậy, $f(M)$ sẽ là một tập con compac của không gian R^1 cho nên, như đã biết, $f(M)$ phải bị chặn và đóng, do đó $\sup\limits_{x \in M} f(x) \in f(M)$, $\inf\limits_{x \in M} f(x) \in f(M)$. □

Định lý 13. * *(Tychonoff) Tích trực tiếp của một họ không gian tôpô compac $\{X_\lambda\}(\lambda \in \Lambda)$ cũng là không gian tôpô compac.*

Chứng minh. Để đơn giản, ta xét trường hợp một họ hữu hạn không gian $X_1, \ldots, X_n$. Chứng minh có thể mở rộng dễ dàng cho trường hợp một họ vô hạn. Cho $X = \prod_i^n X_i$ là tích trực tiếp của các không gian compac $X_i, p_i : X \to X_i$ là phép chiếu từ X xuống X_i, tức là $p_i(x) = x_i$ với mọi $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$. Ta chỉ cần chứng minh rằng nếu $\{M_\alpha\}$ là một họ tập con bất kỳ của X có tính tương giao hữu hạn (tức là mọi họ con hữu hạn của nó đều có giao không rỗng) thì cả họ $\{\overline{M}_\alpha\}$ có giao không rỗng . Để làm việc ấy ta có thể giả thiết rằng $\{M_\alpha\}$ là họ

tối đại trong X có tính tương giao hữu hạn, vì dựa theo tiên đề Zorn (Chương 6, mục 1), nếu $\{M_\alpha\}$ chưa phải là tối đại thì ta có thể mở rộng nó cho thành tối đại: nếu các bao đóng của các tập trong họ tối đại này có điểm chung thì đó cũng là điểm chung cho cả họ $\{\overline{M}_\alpha\}$. Vậy giả sử $\{M_\alpha\}$ là một họ tối đại tập con của X có tính tương giao hữu hạn. Điều đó có nghĩa là:

a) $\{M_\alpha\}$ có tính tương giao hữu hạn;

b) Giao của một họ con hữu hạn bất kỳ của $\{M_\alpha\}$ phải thuộc họ $\{M_\alpha\}$ (vì nếu trái lại thì thêm tập đó vào $\{M_\alpha\}$ sẽ được một họ rộng hơn mà vẫn có tính tương giao hữu hạn);

c) Nếu một tập nào đó cắt mọi giao hữu hạn của những tập trong họ $\{M_\alpha\}$ thì nó phải thuộc họ $\{M_\alpha\}$ (vì lẽ tương tự như ở b).

Cho $M_\alpha^i = p_i(M_\alpha)$. Với mỗi i cố định, các M_α^i có tính tương giao hữu hạn, mà chúng là tập con của không gian compac X_i cho nên chúng phải có bao đóng giao nhau ở một điểm x_i nào đó. Ta sẽ chứng minh $x = (x_1, \ldots, x_n)$ là điểm chung cho mọi $\{\overline{M}_\alpha\}$, nghĩa là mọi lân cận U của x đều cắt mỗi M_α.

Thật vậy, theo định nghĩa tôpô tích, có thể giả thiết $U = \prod_{i=1}^n V_i$, trong đó V_i là lân cận của x_i trong X_i. Xét một i cố định, bất kỳ. Vì x_i thuộc mọi $\{\overline{M}_\alpha^i\}$ nên V_i cắt mọi M_α^i, tức là $U_i = p_i^{-1}(V_i)$ cắt mọi M_α. Nói riêng, theo b), U_i phải cắt mọi tập nào là giao của một họ con hữu hạn bất kỳ của $\{M_\alpha\}$. Do đó, theo c) $U_i \in \{M_\alpha\}$ và vì điều này đúng cho mọi $i = 1, \ldots, n$ nên $U = \cap_{i=1}^n U_i$ cũng thuộc họ $\{M_\alpha\}$ (theo b)). Vậy, theo a), U phải cắt mọi M_α. □

3. KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH TÔPÔ

3.1. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH TÔPÔ. Một không gian tuyến tính (thực hay phức) có thể đồng thời được trang bị một cấu trúc tôpô. Khi ấy ta có một không gian vừa tuyến tính vừa tôpô. Nhưng nếu cấu trúc tôpô hoàn toàn độc lập đối với cấu trúc đại số thì các tính chất của không gian sẽ không có gì mới, ngoài những tính chất đã biết về không gian tuyến tính đơn thuần và không gian tôpô đơn thuần. Vấn đề chỉ đáng chú ý nếu giữa hai cấu trúc ấy có một mối liên hệ nhất định làm nảy sinh nhiều tính chất mới.

Ta nói một tôpô $\mathcal{S}$ trên không gian tuyến tính X *tương hợp* với cấu trúc đại số, nếu các phép toán đại số trong X liên tục trong tôpô đó, tức là nếu:

1) $x + y$ là một hàm liên tục của hai biến x, y; nói rõ hơn, với mọi lân cận V của điểm $x + y$ đều có một lân cận U_x của x và một lân cận U_y của y sao cho nếu $x' \in U_x$, $y' \in U_y$ thì tức khắc $x' + y' \in V$.

2) αx là một hàm liên tục của hai biến α, x; nói rõ hơn, với mọi lân cận V của αx đều có một số $\varepsilon > 0$ và một lân cận U của x sao cho $|\alpha' - \alpha| < \varepsilon$, $x' \in U$ thì tức khắc $\alpha' x' \in V$.

Một không gian tuyến tính X trên đó có một tôpô tương hợp với cấu trúc đại số gọi là một *không gian tuyến tính tôpô* (hay *không gian vectơ tôpô*).

Từ điều kiện tương hợp có thể suy ra dễ dàng:

Bổ đề 2. *Các phép tịnh tiến $f(x) = x + a$ (a cố định tuỳ ý) và các phép vị tự $g(x) = \alpha x$ ($\alpha \neq 0$ cho trước tuỳ ý) là những phép đồng phôi từ X lên bản thân nó.*

Thật vậy, nếu $f(x) = x + a = y$ thì $f^{-1}(y) = x = y - a$ thành thử f là ánh xạ 1-1 từ X lên bản thân nó và cả f lẫn f^{-1} đều liên tục. Tương tự như thế, nếu $g(x) = \alpha x = y$ ($\alpha \neq 0$) thì $g^{-1}(y) = x = \frac{1}{\alpha} y$, cho nên g cũng là ánh xạ 1-1 từ X lên bản thân nó, và cả g lẫn g^{-1} đều liên tục. □

Hệ quả. (i) *V là một lân cận của gốc khi và chỉ khi $V + a$ là một lân cận của a.*

(ii) *Nếu V là một lân cận của gốc thì với mọi $\alpha \neq 0$ αV cũng là lân cận của gốc.*

Ở đây $V + a = \{x + a : x \in V\}$ (V tịnh tiến từ gốc đến a); $\alpha V = \{\alpha x : x \in V\}$ (vị tự của V đối với gốc, theo tỉ số α).

Như vậy cấu trúc tôpô của không gian được hoàn toàn xác định bởi tập các lân cận của gốc: biết tập này thì mọi lân cận của một điểm tuỳ ý sẽ suy ra bằng một phép tịnh tiến. Do đó sau đây ta thường chỉ nói về các lân cận của gốc, và để cho gọn, ta sẽ nói tắt "lân cận" (chứ không nói rõ "của gốc"), trừ trường hợp sợ nhầm lẫn. Nếu V là một lân cận (của gốc) thì $x \in V + a$ (x thuộc lân cận $V + a$ của a) có nghĩa

$x - a \in V$.

3.2. CƠ SỞ LÂN CẬN CỦA MỘT KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH TÔPÔ. Ta hãy tìm các điều kiện đặc trưng cho cơ sở lân cận của một không gian tuyến tính tôpô.

Một tập A gọi là *hấp thu* nếu với mọi $x \in A$ tồn tại một số $\lambda > 0$ sao cho hễ $|\alpha| \geq \lambda$ thì $x \in \alpha A$ (nói cách khác, nếu A nhận 0 làm điểm bọc, như đã định nghĩa ở Chương 6, mục 1.3, III); A gọi là *cân đối* nếu với mọi $x \in A$ ta có $\alpha x \in A$ khi $|\alpha| \leq 1$ (nói riêng một tập cân đối không rỗng bao giờ cũng chứa gốc).

Bổ đề 3. *Trong không gian tuyến tính tôpô, mỗi lân cận V là một tập hấp thu, và bao hàm một lân cận cân đối W sao cho $W + W \subset V$.*

(nhắc lại: $A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$).

Thật vậy, với mỗi x cố định hàm $f(\lambda) = \lambda x$ liên tục tại $\lambda = 0$ nên với lân cận V cho trước tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho hễ $|\lambda| \leq \varepsilon$ thì $\lambda x \in V$, tức là hễ $|\alpha| \geq 1/\varepsilon$ thì $x \in \alpha V$. Do đó V hấp thu. Vả lại hàm $g(x, y) = x + y$ liên tục tại $x = 0,\ y = 0$ nên tồn tại các lân cận W_1, W_2 sao cho $x + y \in V$ với mọi $x \in W_1,\ y \in W_2$. Khi ấy $U = W_1 \cap W_2$ là một lân cận, với $U + U \subset V$. Vì hàm $h(\alpha, x) = \alpha x$ liên tục tại $\alpha = 0,\ x = 0$ nên tồn tại một lân cận W_0 và một số $\varepsilon > 0$ sao cho $\alpha x \in U$ với mọi $x \in W_0$ và $|\alpha| \leq \varepsilon$. Do đó $\alpha W_0 \subset U$ với mọi $|\alpha| \leq \varepsilon$, tức là $\varepsilon W_0 \subset \lambda U$, với mọi $|\lambda| \geq 1$. Thành thử $\varepsilon W_0 \subset W = \cap_{|\lambda| \geq 1} \lambda U$, mà εW_0 là một lân cận nên W cũng là một lân cận. Nhưng rõ ràng $W \subset U$, do đó $W + W \subset V$, đồng thời W là cân đối vì rằng nếu $x \in W$, $0 < |\alpha| \leq 1$ thì $x \in \frac{\lambda}{\alpha} U$ với mọi $|\lambda| \geq 1$ (khi ấy $|\frac{\lambda}{\alpha}| \geq 1$) tức là $\alpha x \in \lambda U$ với mọi $|\alpha| \leq 1$ và mọi $|\lambda| \geq 1$ hay, nói khác đi, $\alpha x \in W$ với mọi $|\alpha| \leq 1$.

Định lý 14. *Trong mỗi không gian tuyến tính tôpô X bao giờ cũng có một cơ sở lân cận $\mathcal{B}$ của gốc, sao cho:*

(i) Mỗi $V \in \mathcal{B}$ đều cân đối và hấp thu,

(ii) Nếu $V \in \mathcal{B}$ thì $\alpha V \in \mathcal{B}$ với mọi $\alpha \neq 0$;

(iii) Mỗi $V \in \mathcal{B}$ bao hàm một $W \in \mathcal{B}$ sao cho $W + W \subset V$;

(iv) Với mỗi cặp $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ tồn tại $W \in \mathcal{B}$ sao cho $W \subset V_1 \cap V_2$.

Ngược lại, nếu trong một không gian tuyến tính X lấy một họ $\mathcal{B} (\neq \emptyset)$ các tập con của X thỏa mãn các điều kiện trên thì có một tôpô duy

nhất trên X tương hợp với cấu trúc đại số, nhận $\mathcal{B}$ làm cơ sở lân cận của gốc.

Chứng minh. Gọi $\mathcal{B}$ là tập tất cả các lân cận cân đối của gốc (tồn tại theo Bổ đề 3) thì dễ thấy rằng $\mathcal{B}$ là một cơ sở lân cận thỏa mãn cả bốn điều kiện (i)-(iv).

Ngược lại, giả sử ta lấy trong không gian tuyến tính X một họ $\mathcal{B}$ các tập con của X thỏa mãn bốn điều kiện trên. Gọi $\mathcal{V}$ là họ tất cả các tập con của X có bao hàm một phần tử của $\mathcal{B}$ và $\mathcal{V}_x$ là họ tất cả các tập có dạng $V + x$, với $V \in \mathcal{V}$.

Rõ ràng các $\mathcal{V}_x$ thỏa mãn ba điều kiện đầu nêu trong Định lý 4 (chẳng hạn nếu $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, thì $V_1 \supset V_1', V_2 \supset V_2'$ với $V_1', V_2' \in \mathcal{B}$, và theo giả thiết (iv) tồn tại $W \in \mathcal{B}$ sao cho $W \subset V_1' \cap V_2' \subset V_1 \cap V_2$, chứng tỏ $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}$). Hơn nữa với mọi $V \in \mathcal{V}$, ta có $V \supset V'$, $V' \in \mathcal{B}$ và theo giả thiết (iii) tồn tại $W \in \mathcal{B}$ sao cho $W + W \subset V'$; lúc đó, với mọi $y \in W$ ta có $y \in W \subset W + W \subset V' \subset V$, cho nên $V \in \mathcal{V}_y$, vậy các $\mathcal{V}_x$ cũng thỏa mãn cả điều kiện thứ tư trong Định lý 4. Do đó theo định lý này, có một tôpô duy nhất trên X nhận mỗi $\mathcal{V}_x$ làm họ tất cả các lân cận của điểm x.

Vấn đề còn lại là chứng minh rằng tôpô đó tương hợp với cấu trúc đại số. Nhưng, cho trước $V \in \mathcal{B}$, ta tìm được theo giả thiết (iii), $W \in \mathcal{B}$ sao cho $W + W \subset V$ và khi ấy hễ $x' \in W + x$, $y' \in W + y$ thì $x' + y' \in W + W + x + y \subset V + x + y$, chứng tỏ hàm $x + y$ liên tục. Mặt khác với x cho trước, ta có theo giả thiết (i) (W hấp thu), một $\lambda > 0$ sao cho $x \in \lambda W$, và khi ấy hễ $|\alpha' - \alpha| < 1/\lambda$, $x' \in (|\alpha| + 1/\lambda)^{-1} W + x$ thì $\alpha' x' - \alpha x = \alpha'(x' - x) + (\alpha' - \alpha)x \in (|\alpha| + 1/\lambda)(|\alpha| + 1/\lambda)^{-1} W + (1/\lambda).\lambda W = W + W \subset V$, chứng tỏ hàm αx cũng liên tục. □

Ví dụ. 1) Không gian định chuẩn là không gian tuyến tính tôpô, vì phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với số ở đây liên tục trong tôpô xác định bởi chuẩn. Họ tất cả các hình cầu mở (hoặc tất cả các hình cầu đóng) tâm ở gốc, làm thành một cơ sở lân cận của gốc thỏa mãn bốn điều kiện nêu trong định lý trước.

2) Cho $K_{[a,b]}$ là không gian các hàm số vô cùng khả vi (nghĩa là có đạo hàm mọi cấp) trên đoạn $[a, b]$. Với các phép toán đại số như thường lệ, đó là một không gian tuyến tính. Ta hãy gọi $V_{m,\varepsilon}$ là tập tất cả các

hàm $\varphi(x)$ sao cho

$$\sup_{a\le x\le b} |\varphi^{(k)}(x)| < \varepsilon \ (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

trong đó $\varphi^{(k)}$ là đạo hàm cấp k của φ ($\varphi^{(0)}$ là chính φ). Dễ kiểm tra lại rằng họ các $V_{m,\varepsilon}$ (với mọi số tự nhiên m, và mọi $\varepsilon > 0$) thỏa mãn bốn điều kiện nêu trên. Vậy nó xác định trên $K_{[a,b]}$ một tôpô tương hợp với cấu trúc đại số.

3) Cho $\mathbb{R}^\infty$ là không gian các dãy số $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ với các phép toán đại số : $x+y = (\xi_1+\eta_1,\ \xi_2+\eta_2, \ldots)$, $\alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots)$. Với mỗi bộ m số tự nhiên $k_1, k_2, \ldots, k_m$ và một số $\varepsilon > 0$, ta hãy ký hiệu $V(k_1, k_2, \ldots, k_m; \varepsilon)$ là tập tất cả các dãy $x \in \mathbb{R}^\infty$ sao cho

$$|\xi_{k_i}| < \varepsilon \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Họ tất cả các $V(k_1, k_2, \ldots, k_m; \varepsilon)$ (với mọi giá trị có thể của $k_1, k_2, \ldots, k_m$ và ε) thỏa mãn bốn điều kiện nêu trên, và lấy họ đó làm một cơ sở lân cận của gốc, ta biến $\mathbb{R}^\infty$ thành một không gian tuyến tính tôpô.

4) Cho $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, là tập các hàm $x = x(\lambda)$ trên Λ sao cho $x(\lambda) \in X_\lambda$. Nếu mỗi không gian X_λ là tuyến tính tôpô (thực hay phức) thì với tôpô tích trên X và các phép toán tuyến tính xác định bởi: $(x + y)(\lambda) = x(\lambda) + y(\lambda), (\alpha x)(\lambda) = \alpha x(\lambda)$, ta biến X thành một không gian tuyến tính tôpô.

Chú ý. Trong phần thứ nhất của Định lý 14 có thể đòi hỏi các lân cận thuộc $\mathcal{B}$ là tập đóng. Nói rõ hơn: *Trong mỗi không gian tuyến tính tôpô có một cơ sở lân cận đóng $\mathcal{B}$ với các tính chất 1)-4).*

Để thấy rõ điều đó ta dựa trên các nhận xét sau đây:

1) Nếu W là một lân cận cân đối bao hàm trong một lân cận V sao cho $W + W \subset V$, thì bao đóng $\overline{W}$ của nó cũng bao hàm trong V. Thật vậy, với mọi $x \in \overline{W}$, lân cận $W + x$ của x chứa ít nhất một điểm $y \in W$, tức là $y \in W + x$ hay $x \in y - W \subset W - W = W + W \subset V$.

2) Nếu lân cận W cân đối thì $\overline{W}$ cũng cân đối.

Thật vậy, với mọi $x \in \overline{W}$, $0 < |\alpha| \le 1$, và mọi lân cận U (của gốc), lân cận $\dfrac{1}{\alpha}U + x$ của x chứa ít nhất một điểm $y \in W$, tức là

$y \in \frac{1}{\alpha}U + x$, hay $\alpha y \in U + \alpha x$, mà W cân đối nên $\alpha y \in W$, thành thử lân cận $U + \alpha x$ của αx chứa ít nhất một điểm $\alpha y \in W$, chứng tỏ $\alpha x \in \overline{W}$.

3) Nếu $\mathcal{B}$ là một cơ sở lân cận thì mỗi lân cận $V \in \mathcal{B}$ bao hàm một lân cận $W_0 \in \mathcal{B}$ sao cho $\overline{W}_0 + \overline{W}_0 \subset V$. (Do đó các bao đóng của những phần tử của $\mathcal{B}$ cũng làm thành một cơ sở lân cận). Thật vậy, cho W_1 là lân cận cân đối sao cho $W_1 + W_1 \subset V$, W_2 là lân cận cân đối sao cho $W_2 + W_2 \subset W_1$, ta chỉ cần chọn $W_0 \in \mathcal{B}$ sao cho $W_0 \subset W_2$ thì sẽ có $\overline{W}_0 \subset \overline{W}_2 \subset W_1$ (theo nhận xét 1)) nên $\overline{W}_0 + \overline{W}_0 \subset W_1 + W_1 \subset V$.

Từ các nhận xét đó ta suy ra dễ dàng: Nếu $\mathcal{B}$ là một cơ sở lân cận có các tính chất 1)-4) thì các bao đóng của các phần tử của $\mathcal{B}$ cũng làm thành một cơ sở lân cận có các tính chất ấy.

Trong nhiều vấn đề, người ta đòi hỏi không gian tuyến tính tôpô phải thỏa mãn tiên đề tách (tức phải là không gian Hausdorff). Qua khái niệm cơ sở lân cận, điều kiện đó có thể phát biểu:

Định lý 15. *Cho $\mathcal{B}$ là một cơ sở lân cận trong không gian tuyến tính tôpô X. Không gian X là Hausdorff khi và chỉ khi với mỗi $x \neq 0$ đều có một $V \in \mathcal{B}$ không chứa x, tức là:*

$$\bigcap_{V \in \mathcal{B}} V = \{0\} \tag{1}$$

Chứng minh. Nếu X là không gian Hausdorff thì với mọi $x \neq 0$ tồn tại một lân cận U không chứa x, mà $\mathcal{B}$ là cơ sở lân cận nên tồn tại $V \in \mathcal{B}$ sao cho $V \subset U$, do đó $x \notin V$ và ta có (1). Ngược lại nếu (1) đúng thì với mọi x, y phân biệt, tức $x - y \neq 0$ tồn tại một $V \in \mathcal{B}$ sao cho $x - y \notin V$ và theo Bổ đề 2 tồn tại một lân cận cân đối W sao cho $W + W \subset V$: hai lân cận $W + x$ và $W + y$ không thể có điểm chung z vì khi ấy $x - y = (z - y) - (z - x) \in W - W = W + W \subset V$, trái với cách chọn V. □

3.3. KHÔNG GIAN THƯƠNG. Cho một không gian tuyến tính X và một không gian con M của nó, ta có thể xét không gian thương X/M như đã định nghĩa ở Chương 6, mục 2.3. Ký hiệu $\tilde{x}$ là lớp tương đương (modulo M) của x. Nếu X là một không gian tuyến tính tôpô, ta có thể xác định trên X/M một tôpô như sau: tập mở trong X/M là các

tập có dạng $\{\tilde{x} : x \in G\}$ trong đó G là một tập mở tuỳ ý trong X. Có thể chứng minh dễ dàng họ các tập đó đúng là một tôpô, và tôpô này tương hợp với cấu trúc đại số của X/M. Ta gọi nó là *tôpô tự nhiên* trên không gian thương, hoặc *tôpô thương*.

Với khái niệm không gian thương ta có thể biến mỗi không gian tuyến tính tôpô thành một không gian tuyến tính tôpô Hausdorff như sau.

Cho $\mathcal{B}$ là một cơ sở lân cận của X. Dễ thấy rằng tập

$$M = \bigcap_{V \in \mathcal{B}} V \tag{2}$$

là bao đóng của không gian con $\{0\}$, cho nên M là không gian con đóng của X.

Không gian thương X/M (với tôpô tự nhiên) *là không gian Hausdorff*. Thật vậy, nếu ξ là một phần tử khác phần tử không của X/M thì $\xi = \tilde{x}_0$ với $x_0 \neq M$ nên phải có một lân cận $V \in \mathcal{B}$ sao cho $x_0 + V$ không cắt M, và $V' = \{\tilde{x} : x \in V\}$ sẽ là lân cận của gốc $\tilde{0}$ trong X/M, không chứa ξ (vì nếu $\xi = \tilde{x}$ với $x \in V$ thì $x_0 - x \in M$, tức $(x_0 + V) \cap M \neq \emptyset$).

Thành thử, nếu một không gian tuyến tính tôpô chưa thỏa mãn điều kiện tách thì bằng cách xem đồng nhất các điểm chỉ khác nhau bởi một phần tử của tập (2) ta sẽ có một không gian thỏa mãn điều kiện ấy.

4. KHÔNG GIAN LỒI ĐỊA PHƯƠNG

4.1. TÔPÔ LỒI ĐỊA PHƯƠNG. Trong số các không gian tuyến tính tôpô, một lớp không gian đặc biệt quan trọng là các không gian lồi địa phương.

Nhắc lại rằng (theo định nghĩa ở Chương 6, mục 1.3) một tập con A của một không gian tuyến tính gọi là *lồi* nếu

$$x, y \in A,\ 0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha) y \in A.$$

Một không gian tuyến tính tôpô X gọi là *không gian lồi địa phương* (và tôpô của nó gọi là *tôpô lồi địa phương*) nếu trong X có một cơ sở lân

cận (của gốc) gồm toàn tập lồi. Vì khi tịnh tiến một tập lồi ta lại được một tập lồi nên trong không gian lồi địa phương mỗi điểm đều có một cơ sở lân cận lồi.

Đương nhiên, tất cả các không gian định chuẩn đều lồi địa phương: cơ sở lân cận lồi trong đó là tập các hình cầu tâm ở gốc. Các không gian $K_{[a,b]}, \mathbb{R}^\infty$ trong ví dụ ở mục trước cũng lồi địa phương: cơ sở lân cận lồi trong $K_{[a,b]}$ là các lân cận $V_{m,\varepsilon}$; trong $\mathbb{R}^\infty$ là các lân cận $V(k_1, \ldots, k_m; \varepsilon)$. Chẳng hạn, $V_{m,\varepsilon}$ lồi là vì với $\varphi, \psi \in V_{m,\varepsilon}$ ta có

$$\sup_{a\le x\le b} |\varphi^{(k)}(x)| < \varepsilon, \quad \sup_{a\le x\le b} |\psi^{(k)}(x)| < \varepsilon$$

$(k = 0, 1, \ldots, m)$ cho nên, nếu $0 \le \alpha \le 1$ thì

$$\sup_{a\le x\le b} |\alpha\varphi^{(k)}(x) + (1-\alpha)\psi^{(k)}(x)| \le \alpha. \sup_{a\le x\le b} |\varphi^{(k)}(x)| +$$

$$+(1-\alpha) \sup_{a\le x\le b} |\psi^{(k)}(x)| < \alpha\varepsilon + (1-\alpha)\varepsilon = \varepsilon$$

với mọi $k = 0, 1, \ldots, m$, do đó $\alpha\varphi + (1-\alpha)\psi \in V_{m,\varepsilon}$.

Định lý 16. *Trong mỗi không gian lồi địa phương có một cơ sở lân cận lồi, cân đối, và hấp thu.*

Ngược lại, nếu $\mathcal{B}_0$ là một họ tuỳ ý các tập con lồi, cân đối, và hấp thu của một không gian tuyến tính X thì có một tôpô trên X tương hợp với cấu trúc đại số, trong đó mỗi tập thuộc họ $\mathcal{B}_0$ là một lân cận. Tôpô ấy lồi địa phương và nhận làm cơ sở lân cận họ tất cả các tập có dạng

$$\varepsilon \cap_{i=1}^n V_i \quad (\varepsilon > 0,\ V_i \in \mathcal{B}_0) \tag{3}$$

Chứng minh. 1) Giả sử X là một không gian lồi địa phương, với cơ sở lân cận lồi $\mathcal{B}$. Cho $\mathcal{B}'$ là họ tất cả các tập V' có dạng $V' = V \cap -V$, với $V \in \mathcal{B}$. Rõ ràng các $V' \in \mathcal{B}'$ cũng là lân cận, và vì $V' \subset V$ nên $\mathcal{B}'$ vẫn là một cơ sở lân cận. Vì V lồi nên $-V$, và do đó V', cũng lồi. Vả lại V' cân đối, vì nếu $x \in V'$, $|\alpha| \le 1$ thì $0 \le \frac{\alpha+1}{2} \le 1$, $-x \in V'$, mà V' lồi nên $\alpha x = \frac{\alpha+1}{2}x + \left(1 - \frac{\alpha+1}{2}\right)(-x) \in V'$. Vậy $\mathcal{B}'$ là một cơ sở lân cận lồi, cân đối (và hấp thu, theo Bổ đề 2).

2) Ngược lại, giả sử $\mathcal{B}_0$ là một họ tập con lồi, cân đối, và hấp thu của một không gian tuyến tính X, và gọi $\mathcal{B}$ là họ tất cả các tập có dạng (3). Rõ ràng $\mathcal{B}$ thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iv) của Định lý 14. Nó cũng thỏa mãn cả điều kiện (iii), vì nếu $V \in \mathcal{B}$ (có dạng (3)) thì V lồi (giao của một họ tập lồi cũng là tập lồi), và lấy $W = \frac{1}{2}V$ ta có $W + W = \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = V$ (đẳng thức này là do V lồi). Do đó, áp dụng Định lý 14, ta suy ra kết quả . □

Chú ý. Có thể đòi hỏi các lân cận thuộc cơ sở nói trong phần đầu của Định lý 16 đều là *đóng*.

Thật vậy, ta hãy lấy các bao đóng của những phần tử của một cơ sở lân cận lồi, cân đối (và hấp thu), và gọi $\mathcal{B}_0$ là họ tất cả các bao đóng ấy. $\mathcal{B}_0$ cũng là một cơ sở lân cận và các phần tử của $\mathcal{B}_0$ cũng cân đối (xem chú ý 3) và 2) sau Định lý 14). Vả lại các tập đó dĩ nhiên là đóng và hấp thu. Vậy chỉ còn phải chứng minh thêm rằng các tập đó lồi, và muốn thế chỉ cần chú ý rằng *bao đóng của một tập lồi là lồi.*

Điều này có thể chứng minh đơn giản như sau:

Cho A là một tập lồi, $\overline{A}$ bao đóng của nó, x, y là hai điểm bất kỳ của bao đóng này, và α là một số thực giữa 0 và 1. Với mỗi lân cận V đều có một lân cận W sao cho $W + W \subset V$. Vì $x \in \overline{A}$ nên lân cận $\frac{1}{\alpha}W + x$ có chứa ít nhất một điểm $x_1 \in A$, và vì $y \in \overline{A}$ nên lân cận $\frac{1}{1-\alpha}W + y$ có chứa ít nhất một điểm $y_1 \in A$. Nhưng A lồi, nên $\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1 \in A$, và ta có $\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1 \in (W + \alpha x) + W + (1-\alpha)y \subset V + \alpha x + (1-\alpha)y$, chứng tỏ lân cận $V + \alpha x + (1-\alpha)y$ có chứa một điểm $\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1 \in A$. Do đó $\alpha x + (1-\alpha)y \in \overline{A}$, và bao đóng này lồi.

4.2. XÁC ĐỊNH MỘT TÔPÔ LỒI ĐỊA PHƯƠNG BỞI MỘT HỌ SƠ CHUẨN. Tôpô của một không gian định chuẩn được xác định bởi chuẩn $\|x\|$. Nếu ta ký hiệu $p(x) = \|x\|$ thì theo định nghĩa của chuẩn ta có (Chương 5, tiết 3):

1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$;
3) $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Khái quát sự kiện đó, ta sẽ chứng minh rằng tôpô của một không gian lồi địa phương được xác định bởi một họ sơ chuẩn.

Nhắc lại rằng một *sơ chuẩn* (Chương 6, mục 1.2) là một hàm số thực hữu hạn $p(x)$ xác định trên một không gian tuyến tính X và thỏa mãn hai điều kiện 1) và 2) (nhưng có thể không thỏa mãn 3)). Như vậy một chuẩn là một sơ chuẩn $p(x)$ mà $p(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$.

Bổ đề 4. *Một hàm $p : X \to \mathbb{R}$ là sơ chuẩn khi và chỉ khi nó là hàm cỡ của một tập lồi, hấp thu và cân đối; nó là một chuẩn khi và chỉ khi nó là hàm cỡ của một tập lồi hấp thu, cân đối và không chứa trọn một đường thẳng nào.*

Thật vậy, nếu C là một tập lồi, hấp thu và cân đối thì dễ thấy rằng hàm cỡ p_C của nó (Bổ đề 2, Chương 6) nghiệm đúng $p_C(-x) = p_C(x)$, do đó với mọi $\alpha < 0$: $p_C(\alpha x) = -\alpha p_C(-x) = -\alpha p_C(x)$, cho nên $p_C(\alpha x) = |\alpha| p_C(x)$ với mọi α, và p_c là một sơ chuẩn. Nếu C lại không chứa trọn đường thẳng nào cả thì với mọi $x \neq 0$ phải có $\lambda > 0$ sao cho $x \notin \lambda C$, tức là $p_C(x) \geq \lambda$ cho nên p sẽ là một chuẩn.

Ngược lại nếu p là một sơ chuẩn thì tập $C = \{x : \ p(x) < 1\}$ lồi vì với $x \in C, y \in C, 0 < \alpha < 1$ ta có $p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y) < 1$. Hơn nữa C cân đối vì $p(x) < 1$ kéo theo $p(-x) = p(x) < 1$, và C cũng hấp thu vì nếu $x \in X$ và $\lambda > p(x)$ thì $p(x/\lambda) = p(x)/\lambda < 1$. Dễ thấy $p(x) = \inf\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda C\}$ cho nên $p(x) = p_C(x)$. Sau cùng, nếu p là một chuẩn thì với mọi $x \neq 0, p(x) > 0$ cho nên $p(\alpha x) = \alpha p(x) \geq 1$ (với α đủ lớn), tức là $\alpha x \notin C$, chứng tỏ C không chứa trọn đường thẳng nào đi qua 0 và x.

Bổ đề 5. *Trong một không gian tuyến tính tôpô một sơ chuẩn $p(x)$ là liên tục khi và chỉ khi tập $V = \{x : p(x) < 1\}$ là một lân cận.*

Thật vậy, nếu $p(x)$ liên tục thì với $0 < \varepsilon < 1$ (tuỳ ý) tồn tại một lân cận U sao cho $p(x) < \varepsilon$ với mọi $x \in U$, do đó $U \subset V$, và V là một lân cận. Ngược lại, nếu V là một lân cận thì với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý, εV cũng là lân cận và với mọi $y \in \varepsilon V$ ta có $p(y) = \varepsilon p\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) < \varepsilon$. Vậy với $x \in \varepsilon V + a$ ta có $p(x-a) < \varepsilon$, do đó $|p(x) - p(a)| \leq p(x-a) < \varepsilon$, chứng tỏ $p(x)$ liên tục tại a (tuỳ ý).

Định lý 17. *Trong một không gian tuyến tính X cho một họ sơ chuẩn Γ tuỳ ý. Trên X có một tôpô tương hợp với cấu trúc đại số, trong đó mỗi sơ chuẩn thuộc họ Γ đều liên tục. Tôpô ấy lồi địa phương*

và nhận làm cơ sở lân cận của gốc họ tất cả các tập có dạng:

$$\{x : \sup_{1\le i\le n} p_i(x) < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0,\ p_i \in \Gamma). \tag{4}$$

Nó là một tôpô Hausdorff khivà chỉ khi

$$(\forall x \neq 0)\ (\exists p \in \Gamma)\ p(x) > 0. \tag{5}$$

Chứng minh. Cho $\mathcal{B}_0$ là họ tất cả các tập có dạng $V = \{x : p(x) < 1\}$, với $p \in \Gamma$. Theo Bổ đề 4 các tập V lồi, cân đối và hấp thu, cho nên theo Định lý 16 có một tôpô trên X tương hợp với cấu trúc đại số, mà trong đó mỗi tập V là một lân cận, tức là theo Bổ đề 5, mỗi sơ chuẩn $p \in \Gamma$ là liên tục. Cũng theo Định lý 16 tôpô ấy lồi địa phương, với cơ sở lân cận là họ tất cả các tập có dạng

$$\varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i \quad (\varepsilon > 0,\ V_i \in \mathcal{B}_0)$$

Nhưng rõ ràng

$$\begin{aligned} \varepsilon \cap_{i=1}^{n} V_i &= \{\varepsilon x : p_i(x) < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\} \\ &= \{x : p_i(x) < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n\} \\ &= \{x : \sup_{1\le i\le n} p_i(x) < \varepsilon\} \end{aligned}$$

nghĩa là các tập (3) chính là các tập (4).

Mặt khác, theo Định lý 15, X là không gian Hausdorff khi và chỉ khi giao của tất cả các tập (4) là $\{0\}$, mà điều này lại tương đương với: bất kỳ $x \neq 0$, tồn tại một tập (4) không chứa x, tức là tồn tại một $\varepsilon > 0$ và một $p \in \Gamma$ sao cho $p(x) \geq \varepsilon$. □

Thành thử mỗi họ sơ chuẩn Γ trên X xác định một tôpô lồi địa phương, với cơ sở lân cận là các tập (4).

Ngược lại, *bất kỳ tôpô lồi địa phương nào cũng có thể coi là được xác định bởi một họ sơ chuẩn.*

Thật vậy, cho $\mathcal{B}_0$ là một cơ sở lân cận lồi, cân đối (và hấp thu), tồn tại theo Định lý 16, và xét các hàm cỡ của các tập thuộc $\mathcal{B}_0$. Theo Bổ đề 4, các hàm số đó là những sơ chuẩn và dễ thấy rằng tôpô lồi địa

phương xác định (theo Định lý 17) bởi họ sơ chuẩn này trùng với tôpô vốn có của không gian.

Trong trường hợp họ sơ chuẩn Γ chỉ gồm một phần tử duy nhất $p(x)$ thì điều kiện tách (Hausdorff) buộc $p(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$: khi ấy $p(x)$ là một chuẩn và ta có một không gian định chuẩn.

Tôpô lồi địa phương mạnh nhất. Như vậy cùng trên một không gian tuyến tính X có thể xét nhiều tôpô lồi địa phương khác nhau, tuỳ theo cách chọn họ sơ chuẩn. Tôpô lồi địa phương xác định bởi họ tất cả các sơ chuẩn trên X dĩ nhiên là tôpô lồi địa phương mạnh nhất.

Định lý 18. (i) *Tôpô lồi địa phương mạnh nhất trên một không gian tuyến tính X là Hausdorff.*

(ii) *Trên một không gian tuyến tính hữu hạn chiều chỉ có một tôpô lồi địa phương Hausdorff duy nhất, đó là tôpô Euclide thông thường.*

Chứng minh. (i) Nếu $a \neq 0$ và $\mathbb{R}_a$ là không gian một chiều sinh bởi a, M là bù đại số của $\mathbb{R}_a$ thì mọi $x \in X$ đều có một biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = \alpha a + u$ với $\alpha \in \mathbb{R}, u \in M$. Tập $C = \{x = \alpha a + u : \alpha < 1\}$ là tập lồi, cân đối và hấp thu, cho nên hàm cỡ $p_C(x)$ là một sơ chuẩn, với $p_C(a) \geq 1$, chứng tỏ tính Hausdorff của tôpô lồi địa phương mạnh nhất trên X.

(ii) Gọi $\mathcal{G}_0$ là tôpô Euclide và $\mathcal{G}$ là tôpô lồi địa phương mạnh nhất trên X. Để chứng minh (ii) chỉ cần vạch rõ $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_0$, nghĩa là mọi tập lồi, cân đối, hấp thu V ($\mathcal{G}$-lân cận) đều cũng là $\mathcal{G}_0$-lân cận. Nếu $e_1, \ldots, e_n$ là một cơ sở (theo nghĩa đại số) của X thì do V hấp thu nên với mỗi i có một $\lambda_i > 0$ để cho $\pm\lambda_i e_i \in V$, và vì V lồi nên bao lồi U của $\{\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n\}$ nằm trong V, mà U hiển nhiên là một $\mathcal{G}_0$-lân cận. Vậy $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_0$. □

4.3. KHÔNG GIAN ĐẾM ĐƯỢC CHUẨN. Một không gian lồi địa phương mà tôpô được xác định bởi một họ sơ chuẩn Γ hữu hạn hoặc đếm được, và thỏa mãn điều kiện tách (5), gọi là một *không gian đếm được chuẩn.*

Chẳng hạn, không gian $K_{[a,b]}$ trong ví dụ ở mục 3.2 là không gian đếm được chuẩn, với họ sơ chuẩn

$$\|\varphi\|_k = \sup_{a \leq x \leq b} |\varphi^{(k)}(x)| \quad (k = 0, 1, 2 \ldots).$$

Để ý rằng mỗi sơ chuẩn này thật ra là một chuẩn và

$$\|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_2 \leq \cdots \leq \|\varphi\|_k \leq \cdots .$$

Không gian $\mathbb{R}^\infty$ cũng đếm được chuẩn, với họ sơ chuẩn

$$\|x\|_k = |\xi_k| \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

(ξ_k là toạ độ thứ k của x).

Định lý 19. *Các mệnh đề sau đây tương đương:*

(i) *X là một không gian đếm được chuẩn.*

(ii) *X là một không gian lồi địa phương Hausdorff, có một cơ sở lân cận đếm được.*

(iii) *X là một không gian lồi địa phương metric hoá được (nghĩa là trong đó có thể đưa vào một metric sao cho tôpô xác định bởi metric này trùng với tôpô vốn có của không gian).*

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii) rõ, và (iii) $\Rightarrow$ (ii) cũng rõ, vì trong một không gian metric họ các hình cầu bán kính $1/n$ ($n = 1, 2, \ldots$) là một cơ sở lân cận đếm được. Cho nên chỉ cần chứng minh (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Giả sử X là một không gian lồi địa phương Hausdorff có một cơ sở lân cận đếm được. Vì mỗi lân cận đều bao hàm một lân cận lồi cân đối, nên sẽ có một cơ sở lân cận $\{V_k\}$ lồi, cân đối. Cho $p(x)$ là hàm cỡ của V_k và

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min\{p_k(x), 1\}. \tag{6}$$

Khi ấy $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, $\rho(-x) = \rho(x)$, và nếu $\rho(x) = 0$ thì $p_k(x) = 0$ do đó $x \in V_k$ với mọi k, và theo Định lý 15, $x = 0$, vì theo giả thiết X là không gian Hausdorff. Vậy nếu đặt

$$\rho(x, y) = \rho(x - y)$$

thì ρ sẽ là một metric. Trong tôpô xác định bởi metric này, các tập

$$U_k = \{x : \rho(x) < \frac{1}{2^k}\}$$

làm thành một cơ sở lân cận. Nhưng trong tôpô vốn có của X, mỗi $p_k(x)$ là liên tục (Bổ đề 5), cho nên $\rho(x)$ cũng liên tục (với $\varepsilon > 0$ cho

trước tồn tại một n đủ lớn để $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon/2$, và một lân cận V sao cho $p_k(x) < \varepsilon/2$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$: khi ấy với mọi $x \in V$ sẽ có $\rho(x) < \varepsilon$). Do đó các tập U_k đều là mở trong tôpô vốn có của X. Mặt khác $U_k \subset V_k$ vì rõ ràng nếu $\rho(x) < \frac{1}{2^k}$ thì phải có $p_k(x) < 1$. Vậy $\{U_k\}$ là một cơ sở lân cận của tôpô vốn có của X, nói cách khác tôpô này trùng với tôpô xác định bởi metric ρ. □

Vì một không gian đếm được chuẩn là metric hoá được nên có thể nói tới tính đủ của nó (với tư cách là không gian metric). Một không gian đếm được chuẩn và đủ gọi là *một không gian Fréchet*. Như vậy *mọi không gian Banach (không gian định chuẩn đủ) đều là không gian Fréchet.*

Không gian $K_{[a,b]}$ là không gian Frechet. Thật vậy, nó là giao của tất cả các $D^n_{[a,b]}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, trong đó $D^n_{[a,b]}$ là không gian Banach tạo thành bởi các hàm số $\varphi(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n, với chuẩn

$$\|\varphi\|_n = \sup_{a \le x \le b} |\varphi^{(k)}(x)| \ (k = 0, 1, \ldots, n)$$

Giả sử $\{\varphi_i\}$ là một dãy cơ bản của $K_{[a,b]}$ tức là $\rho(\varphi_i, \varphi_j) \to 0$ $(i, j \to +\infty)$, trong đó theo (6) metric ρ được xác định bởi

$$\rho(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \min\{\|\varphi_i - \varphi_j\|_n \ , \ 1\}.$$

Rõ ràng, với mỗi n, ta cũng có $\|\varphi_i - \varphi_j\|_n$ $(i, j \to \infty)$, nên $\{\varphi_i\}$ cũng là dãy cơ bản của mỗi $D^n_{[a,b]}$, và do đó có một phần tử $\varphi_{0,n} \in D^n_{[a,b]}$ sao cho $\|\varphi_i - \varphi_{0,n}\|_n \to 0$ $(i \to \infty)$. Nhưng dễ thấy rằng $\varphi_{0,n}$ như nhau cho mọi n, vì nếu $m < n$ thì $\varphi_{0,n} \in D^m_{[a,b]}$ và $\|\varphi_i - \varphi_{0,n}\|_m \le \|\varphi_i - \varphi_{0,n}\|_n \to 0$ $(i \to \infty)$ nên $\varphi_{0,n} = \varphi_{0,m}$. Do đó $\varphi_{0,n} \equiv \varphi_0$ (không phụ thuộc n) và $\varphi_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} D^n_{[a,b]} = K_{[a,b]}$. Vì $\|\varphi_i - \varphi_0\|_n \to 0$ $(i \to \infty)$ với mọi n nên dễ dàng suy ra $\rho(\varphi_i, \varphi_0) \to 0$ $(i \to \infty)$. Vậy $K_{[a,b]}$ là không gian đủ.

Bổ đề 6. *Trong một không gian Frechet X, mỗi tập V lồi, cân đối, đóng và hấp thu là một lân cận của gốc.*

Giả sử V không chứa trọn bất cứ hình cầu nào của không gian metric X. Thế thì nV (bất kỳ n) cũng có tính chất ấy. Ta hãy lấy một điểm

$x_1 \notin V$. Do V đóng nên có một hình cầu đóng S_1, tâm x_1, bán kính r_1 không cắt V (X là không gian metric !). Trong hình cầu này có ít nhất một điểm $x_2 \notin 2V$, và vì $2V$ cũng đóng, nên có một hình cầu đóng S_2, tâm x_2 bán kính $r_2 < r_1/2$ không cắt $2V$. Tiếp tục cách xây dựng đó ta được một dãy hình cầu đóng thắt dần $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$ có bán kính $r_n \to 0$. Vì X là không gian metric đủ nên dãy hình cầu đó có một điểm chung x_0, và vì hình cầu S_n không cắt nV nên x_0 không thuộc bất cứ tập nV nào, trái với tính hấp thu của V. Vậy phải có một hình cầu U (tâm a, bán kính r) nằm trọn trong V. Do V cân đối nên hình cầu $-U$ cũng nằm trọn trong V, rồi do V lồi nên bao lồi của U và $-U$ cũng nằm trọn trong V. Nhưng bao lồi này phải chứa trọn hình cầu tâm ở gốc, và bán kính r, vì nếu $\rho(x) < r$ thì $a+x \in U$, $-a+x \in -U$, do đó $x = \frac{1}{2}(a+x) + \frac{1}{2}(-a+x)$ phải thuộc bao lồi nói trên. Vậy V bao hàm một hình cầu tâm ở gốc, do đó là một lân cận của gốc. □

Một tập lồi, cân đối, đóng và hấp thu trong một không gian lồi địa phương cũng gọi là một *thùng* (tôn-nô), và một không gian lồi địa phương trong đó mọi thùng đều là lân cận của gốc gọi là một *không gian thùng*. Như vậy bổ đề trên cho biết: *mọi không gian Fréchet là không gian thùng.*

5. TOÁN TỬ VÀ PHIẾM HÀM TUYẾN TÍNH TRÊN KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH TÔPÔ

5.1. TẬP BỊ CHẶN. Trong không gian định chuẩn một tập M gọi là bị chặn (giới nội) nếu nó chứa trong một hình cầu nào đó. Rõ ràng điều này tương đương với: cho trước bất cứ hình cầu V nào cũng có một số $\alpha > 0$ sao cho M hoàn toàn chứa trong hình cầu αV. Dưới dạng đó, muốn mở rộng khái niệm tập bị chặn cho không gian tuyến tính tôpô chỉ cần thay hình cầu bởi lân cận.

Nói rõ hơn, một tập con M của một không gian tuyến tính tôpô gọi là *bị chặn* (*giới nội*) nếu với mỗi lân cận V cho trước tồn tại một số $\alpha > 0$ sao cho $M \subset \alpha V$ (người ta cũng nói: tập M được hấp thu bởi mọi lân cận).

Đương nhiên, tập chỉ gồm một điểm (và nói rộng hơn một tập hữu hạn) bao giờ cũng bị chặn, vì trong không gian tuyến tính tôpô mọi lân cận đều có tính hấp thu.

Trong trường hợp không gian lồi địa phương ta có sự kiện sau:

Bổ đề 7. *Cho một không gian lồi địa phương X, có tôpô xác định bởi một hệ sơ chuẩn Γ. Điều kiện cần và đủ để cho một tập $M \subset X$ bị chặn là với mỗi sơ chuẩn $p(x) \in \Gamma$ tập số $p(M) = \{p(x) : x \in M\}$ bị chặn.*

Thật vậy, với mỗi $p \in \Gamma$ tập $\{x : p(x) < 1\}$ là một lân cận, cho nên nếu M bị chặn thì phải có một số $\alpha > 0$ để $M \subset \alpha\{x : p(x) < 1\} = \{x : p(x) < \alpha\}$, tức là $p(x) < \alpha$ với mọi $x \in M$. Ngược lại, nếu $p(M)$ bị chặn với mọi $p \in \Gamma$ và V là một lân cận bất kỳ cho trước thì lấy $p_i \in \Gamma$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và $\varepsilon > 0$ sao cho $\{x : p_i(x) < \varepsilon\ (i = 1, 2, \ldots, n)\} \subset V$ ta sẽ có, theo giả thiết, $p_i(M) < \alpha\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ với một $\alpha > 0$ nào đó, tức là với mọi $x \in M$ ta có $p_i(x) < \alpha$ hay $p_i(\frac{\varepsilon}{\alpha}x) < \varepsilon\ (i = 1, 2, \ldots, n)$, do đó $\frac{\varepsilon}{\alpha}M \subset V$ hay $M \subset \frac{\alpha}{\varepsilon}V$.

5.2. TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH. Cho một toán tử tuyến tính A từ một không gian tuyến tính tôpô X vào một không gian tuyến tính tôpô Y. Theo định nghĩa chung về ánh xạ liên tục, toán tử A gọi là *liên tục tại* x_0 nếu với mọi lân cận U cho trước trong Y tồn tại một lân cận V trong X sao cho

$$x \in V + x_0 \Rightarrow Ax \in U + Ax_0$$

Toán tử A là *liên tục* nếu nó liên tục ở mọi điểm.

Cũng như trong không gian định chuẩn: *muốn cho toán tử tuyến tính A là liên tục, chỉ cần nó liên tục tại điểm gốc.*

Thật vậy, nếu A liên tục tại $x = 0$ thì với mọi lân cận U trong Y, có một lân cận V trong X sao cho $x \in V \Rightarrow Ax \in U$ tức là $x - x_0 \in V \Rightarrow Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in U$, chứng tỏ A liên tục tại mọi điểm x_0.

Một toán tử A gọi là *bị chặn* nếu nó biến mọi tập bị chặn thành tập bị chặn, nghĩa là: nếu M bị chặn thì tập $\{Ax : x \in M\}$ bị chặn. Trong không gian định chuẩn, điều này có nghĩa là có một hằng số $K > 0$ để cho $\|Ax\| \leq K\|x\|$ với mọi x, và như đã biết (Chương 5, tiết 5), điều đó tương đương với tính liên tục.

Trong không gian tuyến tính tôpô tổng quát, sự liên hệ giữa tính liên tục và tính bị chặn của toán tử được mô tả trong định lý sau:

Định lý 20. *Cho hai không gian tuyến tính tôpô X, Y. Mọi toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y đều bị chặn. Nếu X có một cơ sở lân cận đếm được thì ngược lại mọi toán tử tuyến tính bị chặn từ X vào Y đều liên tục.*

Chứng minh. 1) Giả sử toán tử tuyến tính A từ X vào Y là liên tục, và cho một tập bị chặn $M \subset X$. Với mọi lân cận U cho trước trong Y, vì A liên tục nên có một lân cận V trong X sao cho $A(V) = \{Ax : x \in V\} \subset U$, và vì M bị chặn nên có một $\alpha > 0$ sao cho $M \subset \alpha V$, do đó $A(M) = \{Ax : x \in M\} \subset A(\alpha V) = \alpha[A(V)] \subset \alpha U$, chứng tỏ rằng $A(M)$ bị chặn.

2) Giả sử X có một cơ sở lân cận đếm được $\{V_n\}$. Bao giờ cũng có thể cho rằng các V_n cân đối và

$$V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n \supset \cdots$$

vì nếu chưa có điều kiện đó thì ta có thể thay V_1 bởi V_1' cân đối, bao hàm trong V_1 (Bổ đề 2), rồi thay V_2 bởi V_2' cân đối bao hàm trong $V_1' \cap V_2$, thay V_3 bởi V_3' cân đối, bao hàm trong $V_2' \cap V_3$, v.v... Nếu toán tử A không liên tục thì có một lân cận U trong Y sao cho mọi lân cận trong X đều chứa ít nhất một điểm có ảnh không thuộc U, nói riêng, vì $\frac{1}{n}V_n$ là lân cận, nên với mỗi n có một $x_n \in \frac{1}{n}V_n$ sao cho $Ax_n \notin U$. Khi ấy $\{nx_n\}$ là một tập bị chặn vì với mọi lân cận V cho trước có một $V_{n_0} \subset V$ (do đó $V_n \subset V$ với mọi $n \geq n_0$) và chọn $\alpha > 0$ để cho $kx_k \in \alpha V$ (với mọi $k = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$) ta sẽ có $\{nx_n\} \subset \beta V$, trong đó $\beta = \max\{\alpha, 1\}$. Nhưng tập $\{nAx_n\}$ không bị chặn, vì nếu W là một lân cận cân đối bao hàm trong U ta có với mọi $\alpha > 0$ và $n \geq \alpha : \alpha W \subset nW \subset nU$, cho nên $nAx_n \notin \alpha W$, chứng tỏ tập $\{nAx_n\}$ không được hấp thu bởi lân cận W. Vậy nếu A không liên tục thì A cũng không bị chặn. □

Một không gian lồi địa phương X sao cho mọi toán tử tuyến tính bị chặn từ X vào một không gian lồi địa phương khác, đều liên tục, gọi là một không gian *giới nội đóng (hay boocnôlôgic)*. Từ định lý trên có thể suy ra:

Mọi không gian đếm được chuẩn (nói riêng, mọi không gian Fréchet) đều giới nội đóng.

5.3. PHIẾM HÀM TUYẾN TÍNH. Một phiếm hàm tuyến tính f trên một không gian định chuẩn X là liên tục khi và chỉ khi nó bị chặn, tức là có một số $K > 0$ để cho

$$(\forall x) \quad |f(x)| \leq K\|x\|$$

(Chương 5, tiết 6). Trong không gian tuyến tính tôpô, và cả trong không gian lồi địa phương, tuy tính bị chặn không tương đương với tính liên tục (như trên đã thấy), nhưng chú ý rằng $K.\|x\|$ là một sơ chuẩn, ta có thể mở rộng sự kiện trên như sau:

Định lý 21. *Cho một không gian lồi địa phương X, và một hệ sơ chuẩn Γ ứng với một cơ sở lân cận lồi, cân đối $\mathcal{B}$ của nó. Muốn cho một phiếm hàm tuyến tính f trên X là liên tục, điều kiện cần và đủ là có một sơ chuẩn $p \in \Gamma$ sao cho*

$$(\forall x) \quad |f(x)| \leq p(x). \tag{7}$$

Chứng minh. Điều kiện (7) là đủ, vì $f(0) = 0$ và nếu có (7) thì với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước

$$x \in V := \{x : p(x) < \varepsilon\} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon,$$

mà V là một lân cận nên điều này có nghĩa là f liên tục tại $x = 0$, do đó liên tục tại mọi điểm.

Ngược lại, nếu f liên tục thì có một lân cận $V \in \mathcal{B}$ sao cho $|f(x)| < 1$ với mọi $x \in V$. Gọi $p(x)$ là sơ chuẩn ứng với V, ta có $\{x : p(x) < 1\} \subset V$. Với x cho trước tuỳ ý, nếu lấy $\lambda > 0$ sao cho $\lambda p(x) < 1$, thì $p(\lambda x) < 1$ nên $\lambda x \in V$, do đó $|f(\lambda x)| < 1$, tức là $\lambda|f(x)| < 1$. Vậy $|f(x)| < \dfrac{1}{\lambda}$ với mọi $\lambda > 0$ nghiệm đúng $\dfrac{1}{\lambda} > p(x)$. Do đó $|f(x)| \leq p(x)$. □

Từ định lý này ta suy ra:

Hệ quả 1. *Một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ xác định trên một không gian con M của một không gian lồi địa phương X bao giờ cũng có thể khuếch thành một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên toàn X.*

Thật vậy, các hàm $p(x) \in \Gamma$ thu hẹp trên M dĩ nhiên là một hệ sơ chuẩn trên M, ứng với cơ sở lân cận lồi, cân đối $\mathcal{B}_M = \{V \cap M : V \in \mathcal{B}\}$ của X. Vậy theo định lý trước tồn tại $p \in \Gamma$ sao cho

$$(\forall x \in M) \quad |f(x)| \leq p(x)$$

và theo Định lý Hahn-Banach (Chương 5, tiết 1), $f(x)$ có thể khuếch thành một phiếm hàm tuyến tính $F(x)$ trên toàn X sao cho

$$(\forall x \in X) \quad |F(x)| \leq p(x),$$

mà điều này, theo định lý trước, chứng tỏ $F(x)$ liên tục.

Hệ quả 2. *Với mỗi điểm $x_0 \neq 0$ của một không gian lồi địa phương Hausdorff X, có một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ sao cho $f(x_0) \neq 0$.*

Thật vậy, do X là không gian Hausdorff nên hệ sơ chuẩn Γ thỏa mãn điều kiện tách (5) nêu trong Định lý 17, và có một $p \in \Gamma$ sao cho $p(x_0) > 0$. Trên không gian con M sinh bởi điểm x_0, đặt $f(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$, ta được một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ trên M, mà ta có thể khuếch thành một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên toàn X.

Hệ quả 2 cho thấy rằng trên mỗi không gian lồi địa phương Hausdorff có "khá đủ" phiếm hàm tuyến tính liên tục theo nghĩa: nếu với mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục f ta có $f(x_0) = 0$ thì chỉ có thể $x_0 = 0$.

6. TÔPÔ YẾU VÀ TÔPÔ YẾU*

6.1. CẶP ĐỐI NGẪU. Khi X là một không gian tuyến tính tôpô thì tập các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X gọi là *không gian liên hợp* (hay *đối ngẫu*) của X và được ký hiệu X^*. Đó là một không gian tuyến tính, với các phép toán tự nhiên:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \ (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x).$$

Nếu X là không gian định chuẩn thì ta biết rằng (Chương 5, mục 4) có thể đưa vào trong X^* một chuẩn để biến nó thành một không gian định chuẩn đủ (Banach). Trong trường hợp tổng quát ta sẽ chứng minh

rằng bao giờ cũng có thể đưa vào trong X^* một tôpô lồi địa phương Hausdorff để cho với tôpô ấy, đối ngẫu của X^* trở lại là chính X. Hơn nữa sự đối ngẫu giữa X và X^* cho phép xây dựng nhiều tôpô khác nhau trên mỗi không gian, và sự phong phú ấy là một thuận lợi lớn trong các ứng dụng (chẳng hạn trong việc nghiên cứu các phương trình vi phân thường và riêng, hay trong các bài toán biến phân).

Một nhận xét quan trọng là khi ta cố định một phần tử $x \in X$ và cho $f \in X^*$ chạy trên X^* thì bằng cách đặt $x(f) = f(x)$ ta sẽ có một phiếm hàm x xác định trên X^*, và phiếm hàm ấy cũng tuyến tính vì $x(f_1 + f_2) = x(f_1) + x(f_2)$, $x(\alpha f) = \alpha x(f)$. Thành thử, mỗi phần tử $y \in X^*$ là một phiếm hàm tuyến tính trên X và ngược lại mỗi phần tử $x \in X$ cũng có thể xem là một phiếm hàm tuyến tính trên X^*. Để nêu rõ sự đối xứng ấy người ta có thể dùng ký hiệu $(x, f) = f(x)$. Như vậy (x, f) là một dạng song tuyến tính trên $X \times X^*$. Vấn đề đã nêu (xây dựng trên X^* một tôpô lồi địa phương để cho với tôpô ấy X trở lại là đối ngẫu của X^*) chuyển thành trường hợp riêng của bài toán tổng quát sau đây.

Cho hai không gian tuyến tính X, Y và một dạng song tuyến tính $B(x, y)$ trên $X \times Y$. Với những điều kiện nào có thể xây dựng được những tôpô lồi địa phương trên X, Y để cho với các tôpô ấy thì X là đối ngẫu của Y và ngược lại Y là đối ngẫu của X? (ở đây mỗi $x \in X$ được coi là một phiếm hàm tuyến tính trên Y theo quy tắc $y \mapsto B(x, y)$; và tương tự, mỗi $y \in Y$ được coi là một phiếm hàm tuyến tính trên X theo quy tắc $x \mapsto B(x, y)$).

May mắn là vấn đề này được giải đáp khá gọn đẹp.

Nói chung khi có hai không gian tuyến tính X, Y thì có thể có nhiều dạng song tuyến tính khác nhau trên $X \times Y$. Dạng song tuyến tính $B(x, y)$ đã được chọn để xét sẽ gọi là dạng song tuyến tính *chính tắc* và để cho gọn ta sẽ ký hiệu $B(x, y) = (x, y)$. Khi ấy ta cũng nói: *X, Y được đặt đối ngẫu theo dạng song tuyến tính* (x, y).

Thông thường ta giả thiết:

(i) Với mỗi $x \neq 0$ trong X có một $y \in Y$ sao cho $(x, y) \neq 0$.
(ii) Với mỗi $y \neq 0$ trong Y có một $x \in X$ sao cho $(x, y) \neq 0$.

Nếu có giả thiết (i) ta cũng nói Y *tách* X; nếu có giả thiết (ii), ta

nói X *tách* Y. Nếu có cả hai giả thiết, ta nói có một *cặp đối ngẫu tách* (nhiều tác giả hiểu ngầm đối ngẫu là đối ngẫu tách).

Mỗi phần tử $x \in X$ xác định một phiếm hàm tuyến tính $x(.)$ theo quy tắc $y \mapsto (x, y)$. Vậy ta có một họ phiếm hàm tuyến tính $\{x(.),\ x \in X\}$ trên Y cho nên (xem mục 1.6) có một tôpô yếu nhất trên Y đảm bảo sự liên tục của tất cả các phiếm hàm ấy. Ta gọi tôpô đó là X-*tôpô* trên Y và ký hiệu nó là $\sigma(Y, X)$ (hay σ, nếu không sợ nhầm lẫn).

Định lý 22. *Cho một cặp (X, Y) đối ngẫu theo dạng (x, y). Tôpô $\sigma(Y, X)$ lồi địa phương và cũng là tôpô tuyến tính [1] yếu nhất trên Y đảm bảo cho đối ngẫu của Y theo tôpô ấy là chính X. Nếu X tách Y thì tôpô ấy là Hausdorff.*

Chứng minh. Mỗi hàm $|x(f)|$ hiển nhiên là một sơ chuẩn trên Y nên theo Định lý 17 họ sơ chuẩn $|x(y)|$, $x \in X$, xác định trên Y một tôpô lồi địa phương σ_0 nhận làm cơ sở lân cận của gốc họ tất cả các tập có dạng

$$\{y : |x_i(y)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\} \tag{8}$$

trong đó n là một số tự nhiên bất kỳ, ε là một số dương bất kỳ, và x_i là những phần tử bất kỳ của X. Ta hãy chứng minh $\sigma_0 = \sigma(Y, X)$. Rõ ràng mỗi tập có dạng (8) là một lân cận trong tôpô $\sigma(Y, X)$ nên $\sigma_0 \subset \sigma(Y, X)$. Mặt khác trong tôpô σ_0 mọi hàm $|x(y)|$ (và do đó mọi hàm $x(y)$) đều liên tục, nên theo định nghĩa của $\sigma(Y, X)$ ta phải có $\sigma(Y, X) \subset \sigma_0$. Vậy $\sigma_0 = \sigma(Y, X)$.

Nếu g là một phiếm hàm tuyến tính liên tục (bất kỳ) trên Y thì tập $\{y : |g(y)| < 1\}$ mở và chứa gốc nên phải chứa một lân cận của gốc có dạng (8), tức là phải có những $x_i \in X$ $(i = 1, \ldots, n)$ và $\varepsilon > 0$ sao cho $|x_i(y)| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ kéo theo $|g(y)| < 1$. Từ đó $x_i(y) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ kéo theo $g(y) = 0$. Cho Φ là trường số (thực hay phức, tuỳ theo). Đặt $A(y) = (x_1(y), \ldots, x_n(y))$, ta có một ánh xạ tuyến tính từ Y vào Φ^n với tính chất: $A(y) = 0$ kéo theo $g(y) = 0$. Ta hãy xác định như sau một phiếm hàm π trên không gian con $\mathrm{Im}A \subset \Phi^n$. Với mỗi $c \in \mathrm{Im}A$ lấy một y sao cho $c = A(y)$ và $\pi(c) = g(y)$. Nếu y' cũng nghiệm đúng $c = A(y')$ thì $A(y - y') = 0$, cho nên $g(y - y') = 0$, tức là $g(y) = g(y')$.

[1] Tôpô tuyến tính (hay tôpô vectơ) là tôpô tương hợp với cấu trúc đại số của không gian tuyến tính được xét.

Vậy $\pi(c)$ xác định đơn trị. Vì π tuyến tính nên $\pi(c) = \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n$ với $\alpha_i \in \Phi$, và ta suy ra $g(y) = \alpha_1 x_1(y) + \cdots + \alpha_n x_n(y) \in X$, vì X là một không gian tuyến tính.

Thành thử X vừa đúng là tập tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên Y. Nói cách khác, $X = Y^*$ (Y xét với tôpô $\sigma(Y, X)$).

Giả sử $\mathcal{G}$ là một tôpô tuyến tính trên Y sao cho đối ngẫu của Y theo tôpô ấy là X. Thế thì $\mathcal{G}$ đảm bảo sự liên tục của tất cả các phiếm hàm $x(.) \in X$. Nhưng $\sigma(Y, X)$ là tôpô yếu nhất trên Y đảm bảo được điều đó. Vậy $\sigma(Y, X) \subset \mathcal{G}$.

Sau cùng, nếu X tách Y (giả thiết (ii) được thoả mãn) thì $(\forall y \neq 0)\ (\exists x \in X)\ |x(y)| > 0$, cho nên theo Định lý 17, tôpô $\sigma_0 = \sigma(Y, X)$ là Hausdorff. □

Đương nhiên, trên X ta cũng có một tôpô $\sigma(X, Y)$ với những tính chất tương tự. Thành thử khi (X, Y) được đặt đối ngẫu theo dạng (x, y) thì ta có thể biến chúng thành hai không gian lồi địa phương $(X, \sigma(X, Y))$ và $(Y, \sigma(Y, X))$ *đối ngẫu* lẫn nhau, và nếu có các giả thiết tách (i) và (ii) thì đó là hai không gian Hausdorff.

Trở lại vấn đề ban đầu, giả sử cho trước một không gian tuyến tính tôpô X, với đối ngẫu là X^*. Đặt (X, X^*) đối ngẫu theo dạng song tuyến tính $(x, f) = f(x)$ $(x \in X,\ f \in X^*)$, và áp dụng Định lý 21 ta đi tới kết quả (chú ý rằng X bao giờ cũng tách X^*): tôpô $\sigma(X^*, X)$ là tôpô lồi địa phương Hausdorff, yếu nhất trong tất cả các tôpô tuyến tính trên X^* đảm bảo cho đối ngẫu của X^* là chính X. Ta gọi nó là *tôpô yếu** trên X^*. Đồng thời tôpô $\sigma(X, X^*)$ là tôpô lồi địa phương trên X, yếu nhất trong tất cả các tôpô tuyến tính đảm bảo cho đối ngẫu của X chính là X^*. Nếu X^* tách X (theo các kết quả ở tiết trước điều này chắc chắn xảy ra nếu X là không gian lồi địa phương Hausdorff) thì $\sigma(X, X^*)$ là tôpô Hausdorff. Ta gọi nó là *tôpô yếu* trên X. Vì tôpô vốn có trên X cũng đảm bảo cho đối ngẫu của X là X^* (hiển nhiên!) nên tôpô yếu bao giờ cũng yếu hơn tôpô vốn có (vì lẽ đó nhiều khi người ta cũng gọi nó là *tôpô suy yếu*).

Sau đây ta sẽ lần lượt khảo sát một số tính chất của tôpô yếu (trên X) và tôpô yếu* (trên X^*): đó là hai tôpô có vai trò rất quan trọng trong nhiều vấn đề giải tích.

Để chuẩn bị cho việc đó, ta cần một số khái niệm và sự kiện liên quan tới các tập "đối cực", thường dùng khi nghiên cứu các tính chất đối ngẫu.

6.2. ĐỐI CỰC VÀ SONG ĐỐI CỰC. Xét một cặp (X, Y) đối ngẫu theo dạng song tuyến tính (x, y). Với mỗi tập $M \subset X$, *đối cực* của M được định nghĩa là tập

$$M^\circ = \{y \in Y : |(x, y)| \leq 1 \ (\forall x \in M)\}.$$

Bổ đề 8. *Đối cực của $M \subset X$ bao giờ cũng là một tập lồi, cân đối và đóng trong tôpô $\sigma(Y, X)$ của Y. Nếu M bị chặn trong tôpô $\sigma(X, Y)$ thì M° cũng là tập hấp thu.*

Chứng minh. Ta có

$$M^\circ = \cap_{x \in M}\{y : |(x, y)| \leq 1\}$$

mà mỗi tập $\{y : |(x, y)| \leq 1\}$ đều là lồi, cân đối và đóng trong tôpô $\sigma(Y, X)$ (vì trong tôpô này phiếm hàm $x(.) : y \mapsto (x, y)$ liên tục). Do đó M° lồi, cân đối và đóng. Với $y \in Y$ cho trước, tập $\{x : |(x, y)| \leq 1\}$ là một lân cận trong tôpô $\sigma(X, Y)$ (do phiếm hàm $y(.) : x \mapsto (x, y)$ liên tục trong tôpô này), cho nên nếu M bị chặn trong tôpô $\sigma(X, Y)$ thì phải có $\lambda > 0$ để

$$M \subset \lambda\{x : |(x, y)| \leq 1\} = \{x : |(x, \frac{1}{\lambda}y)| \leq 1\}.$$

Khi ấy với $|\alpha| \geq \lambda$ ta sẽ có $|(x, \frac{1}{\alpha}y)| \leq |(x, \frac{1}{\lambda}y)| \leq 1$ với mọi $x \in M$, do đó $y \in \alpha M^\circ$, chứng tỏ M° hấp thu. □

Do vai trò đối xứng của X và Y ta cũng có thể định nghĩa tương tự đối cực N° của một tập $N \subset Y$. Nếu xuất phát từ M, ta có thể lấy đối cực M° của nó, rồi lấy đối cực của M° tức là $M^{\circ\circ} = (M^\circ)^\circ$ (song đối cực). Mệnh đề sau đây là một dạng của Định lý Hahn-Banach.

Định lý 23. (Định lý song đối cực) *Song đối cực $M^{\circ\circ}$ của $M \subset X$ bao giờ cũng bằng bao lồi cân đối đóng của M (trong tôpô $\sigma(X, Y)$).*

(Bao lồi cân đối đóng của một tập M là tập nhỏ nhất lồi, cân đối, đóng mà chứa được M).

Chứng minh. Trước hết ta để ý rằng: nếu trong một không gian lồi địa phương X có một tập lồi đóng M_1 và một điểm $x_0 \notin M_1$ thì bao giờ cũng có một phiếm hàm tuyến tính liên tục $y \in X^*$ và một số thực α sao cho

$$(\forall x \in M_1)\ \ \mathrm{Re}\, y(x) \leq \alpha < \mathrm{Re}\, y(x_0). \tag{9}$$

Thật vậy, cho X_1 là không gian X trong đó ta chỉ xét phép nhân vectơ với số thực (X_1 trùng với X nếu X là không gian thực). Vì M_1 đóng nên phải có một lân cận lồi V của x_0 không cắt M_1, và theo Định lý tách tập lồi (Định lý 2, Chương 6) phải có một phiếm hàm $f \not\equiv 0$ tuyến tính liên tục trên X_1 nghiệm đúng $f(x) \leq \alpha \leq f(x')$ với mọi $x' \in V$, $x \in M_1$ (α là một số thực nào đó). Ta phải có $f(x_0) > \alpha$ vì nếu $f(x_0) = \alpha$ thì do V là một lân cận của x_0 nên theo Bổ đề 2, Chương 6, $f \equiv 0$. Đặt

$$y(x) = f(x) - if(ix)$$

ta sẽ có một phiếm hàm tuyến tính liên tục $y \in X^*$ thỏa mãn (9).

Bây giờ ta chứng minh định lý. Vì $M^{\circ\circ} = (M^\circ)^\circ$ nên theo bổ đề trước nó phải lồi, cân đối, đóng trong $\sigma(X, Y)$. Cũng hiển nhiên là $M \subset M^{\circ\circ}$. Cho M_1 là một tập bất kỳ, lồi cân đối, đóng trong tôpô $\sigma(X, Y)$ và chứa M. Ta phải chứng minh $M^{\circ\circ} \subset M_1$. Giả sử $x_0 \notin M_1$. Theo nhận xét trên, phải có một phiếm hàm $y \in X^* = Y$ (đối ngẫu của X theo tôpô $\sigma(X, Y)$ là Y), nghiệm đúng (9). Vì $0 \in M_1$ nên $\alpha \geq 0$, và bằng cách thay α bởi một số lớn hơn α nhưng nhỏ hơn $y(x_0)$ ta có thể cho rằng $\alpha > 0$; sau đó, bằng cách chia y cho α (nếu cần) ta có thể coi như $\alpha = 1$. Vậy $(\forall x \in M_1)\ \mathrm{Re}\, y(x) \leq 1 < \mathrm{Re}\, y(x_0)$. Lấy λ sao cho $|\lambda| \leq 1$ và $\lambda y(x) = |y(x)|$ (cụ thể là $\lambda = e^{-i\theta}$ nếu $y(x) = \rho e^{i\theta}$) và để ý rằng với mọi $x \in M_1$ ta cũng có $\lambda x \in M_1$ (do M_1 cân đối), cho nên $\mathrm{Re}\, y(\lambda x) \leq 1$, tức là $|y(x)| \leq 1$ (vì $y(\lambda x) = \lambda y(x) = |y(x)|$). Mà $M \subset M_1$ vậy $|y(x)| \leq 1\ \forall x \in M$, do đó $y \in M^\circ$. Mặt khác $|y(x_0)| > 1$, chứng tỏ $x_0 \notin M^{\circ\circ}$. Vậy $M^{\circ\circ} \subset M_1$ và do đó $M^{\circ\circ}$ là bao lồi cân đối đóng của M. □

6.3. TÔPÔ YẾU. Bây giờ ta khảo sát một số tính chất của tôpô yếu trên một không gian lồi địa phương X.

I. Như đã thấy trong chứng minh Định lý 22 một cơ sở lân cận của gốc trong tôpô yếu $\sigma(X, X^*)$ gồm các tập có dạng

$$\{x : |f_i(x)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\} \tag{10},$$

trong đó n là số tự nhiên bất kỳ, ε là số dương bất kỳ và f_i là những phần tử bất kỳ của X^*.

Từ đó dễ dàng suy ra: sự *hội tụ yếu* (hội tụ trong tôpô yếu) của một dãy phần tử : $x_m \to x$ (yếu) có nghĩa là

$$(\forall f \in X^*)\ f(x_m) \to f(x) \tag{11}$$

Thật vậy, vì f liên tục trong tôpô yếu (do X^* vẫn là đối ngẫu của X trong tôpô yếu), nên nếu $x_m \to x$ (yếu) ta phải có $f(x_m) \to f(x)$. Ngược lại nếu có (11) thì với mọi *lân cận yếu* V (lân cận trong tôpô yếu) có dạng (10) ta sẽ có, với m đủ lớn, $|f_i(x_m) - f_i(x)| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$, tức là $x_m - x \in V$, chứng tỏ $x_m \to x$ (yếu).

II. Vì tôpô yếu là yếu hơn tôpô vốn có nên một *tập đóng* yếu (đóng theo tôpô yếu) bao giờ cũng đóng (theo tôpô vốn có). Nhưng ngược lại, một tập đóng có thể không đóng yếu. Tuy nhiên đối với các tập lồi ta có:

Định lý 24. *Trong một không gian lồi địa phương X, nếu một tập lồi C mà đóng thì nó cũng đóng yếu.*

Chứng minh. Giả sử $x_0 \notin C$. Vì C lồi đóng nên theo nhận xét trong phần đầu chứng minh Định lý 22, phải có một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \in X^*$ và một số thực α sao cho

$$(\forall x \in C)\quad \mathrm{Re} f(x) \le \alpha < \mathrm{Re} f(x_0).$$

Khi ấy $V = \{x :\ \mathrm{Re} f(x) > \alpha\}$ sẽ là một lân cận yếu của x_0 không cắt C. Vậy C đóng yếu. □

Hệ quả. *Cho X là một không gian lồi địa phương metric hoá được. Nếu $\{x_n\}$ là một dãy trong X hội tụ yếu tới một phần tử $x \in X$ thì bao giờ cũng tìm được trong X một dãy $\{y_k\}$ sao cho $y_k \to x$ trong tôpô vốn có và mỗi y_k là tổ hợp lồi của một số hữu hạn phần tử x_n.*

Chứng minh. Ta chỉ việc áp dụng định lý trên cho tập $C =$ bao đóng yếu của bao lồi của $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Khi ấy C sẽ là bao đóng (trong tôpô vốn có) của bao lồi của $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mà theo giả thiết $x \in C$ và tôpô vốn có là metric hoá được, cho nên phải có một dãy $y_k \to x$ sao cho mọi $y_k \in \mathrm{conv}\,\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Điều này cũng có

nghĩa $y_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} x_n$, $\alpha_{kn} \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} = 1$, trong đó chỉ một số hữu hạn các α_{kn} là $\neq 0$ (Chương 6, mục 1.3, tính chất II). □

III. Cũng do tôpô yếu là yếu hơn tôpô vốn có nên một tập bị chặn (trong tôpô vốn có) thì phải *bị chặn yếu*. Thật vậy, một tập bị chặn thì bị hấp thu bởi mọi lân cận (trong tôpô vốn có), cho nên, nói riêng cũng bị hấp thu bởi mọi lân cận yếu và do đó là bị chặn yếu. Tuy nhiên, đáng chú ý là:

Định lý 25. *Trong một không gian lồi địa phương X, họ các tập bị chặn yếu trùng với họ các tập bị chặn.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh thêm rằng mọi tập M bị chặn yếu thì cũng bị chặn. Trước hết hãy xét trường hợp X là không gian định chuẩn. Theo Bổ đề 8, đối cực [1] M° của M là một tập lồi, cân đối, đóng (trong tôpô yếu, do đó càng đóng trong tôpô chuẩn) và hấp thu, mà X^* là không gian Banach (Chương 5, tiết 4), nên theo Bổ đề 6, M° là một lân cận của gốc trong X^* và do đó phải bao hàm một hình cầu bán kính n nào đó: $\{\|f\| < n\} \subset M^\circ$, hay $\{\|f\| \leq 1\} \subset \frac{1}{n} M^\circ$. Nhưng với mỗi $x_0 \in M$, $x_0 \neq 0$ phải có một phiếm hàm tuyến tính liên tục f sao cho $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\|$ (Hệ quả 2, Định lý 1, Chương 6). Ta có $f \in \frac{1}{n} M^\circ$, cho nên $|nf(x_0)| \leq 1$ do đó $n\|x_0\| \leq 1$ tức là $\|x_0\| \leq \frac{1}{n}$. Vì điều này đúng cho mọi $x_0 \in M$, cho nên M là tập bị chặn.

Trong trường hợp tổng quát, gọi Γ là họ sơ chuẩn ứng với một cơ sở lân cận $\mathcal{B}$ của x. Với mỗi $p \in \Gamma$, tập $N_p = \{x : p(x) = 0\}$ là một không gian con của X, nên ta có thể xét không gian X/N_p. Trên không gian thương này có thể xác định tôpô tự nhiên, cảm sinh bởi tôpô của X. Nhưng cũng có thể xác định trên đó một chuẩn bằng cách đặt cho mỗi phần tử x (lớp tương đương modulo N_p của x):

$$\|\tilde{x}\| = p(x). \tag{12}$$

Nếu $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ thì $x_1 - x_2 \in N_p$ và ta có $p(x_1 - x_2) = 0$ do đó $p(x_1) \leq p(x_1 - x_2) + p(x_2)$, và cũng tương tự, $p(x_2) \leq p(x_1)$, cho nên $p(x_1) = p(x_2)$. Vậy $\|\tilde{x}\|$ hoàn toàn xác định với mỗi x, và rõ ràng đó là một

[1] Cặp đối ngẫu ở đây là (X, X^*), với dạng song tuyến tính chính tắc là $(x,f) = f(x) (x \in X, f \in X^*)$.

chuẩn trên X/N_p. Cho X_p là không gian định chuẩn có được bằng cách ấy.

Nếu F là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X_p thì rõ ràng phiếm hàm

$$f(x = F(\tilde{x})$$

là tuyến tính liên tục trên X. Ngược lại, nếu $f(x)$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X thì theo Định lý 21 phải có $p \in \Gamma$ sao cho $(\forall x)\ f(x) \leq p(x)$, cho nên đặt

$$F(\tilde{x}) = f(x)$$

ta sẽ có một phiếm hàm tuyến tính $F(\tilde{x})$ nghiệm đúng

$$|F(\tilde{x})| \leq p(x) = \|\tilde{x}\|, \text{ do đó liên tục trên } X_p.$$

Đến đây có thể hoàn thành chứng minh dễ dàng. Giả sử tập $M \subset X$ bị chặn yếu, tức là với mọi $f \in X^*$ tập $f(M)$ bị chặn, chẳng hạn $|f(x)| \leq \alpha\ \forall x \in M$. Như thế, đặt $M_p = \{\tilde{x} : x \in M\}$ ta có, với mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục F trên X_p : $|F(\tilde{x})| \leq \alpha\ (\forall \tilde{x} \in M_p)$, chứng tỏ M_p bị chặn yếu trên X_p. Mà X_p là không gian định chuẩn nên theo trên, M_p bị chặn trong X_p, tức là có một số $\beta > 0$ để cho $\|\tilde{x}\| \leq \beta$ với mọi $\tilde{x} \in M_p$. Vậy theo (12) $p(x) \leq \beta$ với mọi $x \in M$, và do đó (vì p tuỳ ý), theo Bổ đề 7 tập M bị chặn trong X. □

Hệ quả. *Trong không gian Banach, mọi dãy hội tụ yếu là bị chặn.*

Thật vậy, giả sử $x_n \to x$ (yếu), tức là với mọi $f \in X^*$ $f(x_n) \to f(x)$. Khi ấy tập $\{f(x_n)\}$ $n = 1, 2, \ldots,$ bị chặn, mà điều này đúng với mọi $f \in X^*$ nên tập $\{x_n\}$ $n = 1, 2 \ldots$ bị chặn yếu; do đó theo định lý trên nó phải bị chặn. □

6.4. TÔPÔ YẾU*. Nhắc lại rằng tôpô yếu trên không gian X^* (đối ngẫu của không gian tuyến tính X) là tôpô $\sigma(X^*, X)$ lồi địa phương và bao giờ cũng là Hausdorff. Theo chứng minh Định lý 22, một cơ sở lân cận yếu* của gốc gồm tất cả các tập có dạng

$$\{f \in X^* : |f(x_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$$

trong đó n là số tự nhiên bất kỳ, ε là số dương bất kỳ, x_i là những phần tử bất kỳ của X. Vậy sự *hội tụ yếu** của một dãy phiếm hàm : $f_m \to f$

(yếu*) có nghĩa là $f_m(x) \to f(x)$ với mọi $x \in X$. Nói khác đi, đó là sự *hội tụ từng điểm* (hay hội tụ đơn giản).

Sau đây là một tính chất quan trọng của tôpô yếu*.

Định lý 26. (Banach-Alaoglu) *Nếu V là một lân cận của gốc trong một không gian tuyến tính tôpô X thì đối cực của nó, tức là tập*

$$V^\circ = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1 \ \forall x \in V\}$$

là compac yếu (X^* là không gian đối ngẫu của X).*

Chứng minh. Theo tính chất hấp thu của lân cận V, với mỗi $x \in V$ có một số thực $\alpha(x)$ $(x < \alpha(x) < \infty)$ sao cho $x \in \alpha(x).V$. Vậy $(\forall x \in V)\ (\forall f \in V^\circ) \quad |f(x)| \leq \alpha(x)$.

Cho A_x là tập các số t (thực hay phức, tuỳ theo) nghiệm đúng $|t| \leq \alpha(x)$. Gọi A là tích tôpô của tất cả các A_x, $x \in V$. Vì các A_x đều compac nên theo Định lý 13 (Tychonoff), A cũng compac. Ta sẽ chứng minh rằng:

a) V° là một tập con của $A \cap X^*$:

b) Tôpô trên V° cảm sinh từ tôpô yếu* trên X^* trùng với tôpô cảm sinh từ tôpô tích (ký hiệu là $\mathcal{G}$) trên A;

c) V° là một tập con đóng của A. Từ đó dĩ nhiên sẽ suy ra ngay V° là compac yếu*.

Điều a) rõ ràng vì A chính là tập tất cả các hàm số f xác định trên X và nghiệm đúng $|f(x)| \leq \alpha(x)$ $(\forall x \in X)$. Để chứng minh b) ta chú ý rằng vì $\mathcal{G}$ là tôpô yếu nhất đảm bảo sự liên tục của mọi ánh xạ $p_x : f \in A \mapsto f(x)$ $(x \in X)$, cho nên một cơ sở lân cận của $\mathcal{G}$ tại một điểm $f_0 \in V^\circ$ gồm tất cả các tập có dạng

$$\{f \in A : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$$

(n là số tự nhiên bất kỳ, ε là số dương bất kỳ, x_i là những phần tử bất kỳ của X). Do đó tôpô trên V° cảm sinh từ $\mathcal{G}$ có một cơ sở lân cận tại f_0 gồm tất cả các tập có dạng

$$\{f \in V^\circ : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \ \ i = 1, \ldots, n\}$$

Nhưng đây cũng chính là những tập làm thành một cơ sở lân cận tại f_0 trong tôpô cảm sinh từ tôpô yếu* trên X^*. Vậy ta phải có b).

Sau cùng để chứng minh c) ta xét một điểm bất kỳ f_0 thuộc bao đóng (trong tôpô $\mathcal{G}$) của V°. Lấy tuỳ ý hai phần tử $u, v \in X$, hai số λ, μ và một số $\varepsilon > 0$. Khi ấy tập

$$\{f \in A : |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad \text{tại } x = u, v, \lambda u + \mu v\}$$

là một $\mathcal{G}$ lân cận của f_0, cho nên phải chứa ít nhất một phần tử $f \in V^\circ$. Vì f tuyến tính ta có

$$\begin{aligned} f_0(\lambda u + \mu v) \quad &- \quad \lambda f_0(u) - \mu f_0(v) = \\ = (f_0 - f)(\lambda u + \mu v) \quad &+ \quad \lambda(f - f_0)(u) + \mu(f - f_0)(v), \end{aligned}$$

do đó

$$|f_0(\lambda u + \mu v) - \lambda f_0(u) - \mu f_0(v)| < (1 + |\lambda| + |\mu|)\varepsilon$$

Mà $\varepsilon > 0$ nhỏ tuỳ ý, nên điều này chứng tỏ

$$f_0(\lambda u + \mu v) = \lambda f_0(u) + \mu f_0(v),$$

nghĩa là f_0 tuyến tính. Tương tự như thế với $x \in V$, $\varepsilon > 0$ tuỳ ý, tập

$$\{f \in A : |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon\}$$

là một $\mathcal{G}$ lân cận của f_0 nên phải chứa một $f \in V^\circ$ và ta có

$$|f_0(x)| \leq |f_0(x) - f(x)| + |f(x)| < 1 + \varepsilon,$$

từ đó suy ra (vì $\varepsilon > 0$ nhỏ tuỳ ý) $|f_0(x)| \leq 1$ với mọi $x \in V$. Điều này kéo theo sự liên tục của f_0, vì rằng cho trước $\varepsilon > 0$, ta sẽ có $|f_0(x)| \leq \varepsilon$ $(\forall x \in \varepsilon V)$. Vậy $f_0 \in V^\circ$, và V° quả là tập đóng. □

Hệ quả. *Mọi hình cầu đóng trong không gian liên hợp của một không gian định chuẩn là compac yếu*.*

Thật vậy, nếu r là bán kính hình cầu đó thì ta chỉ việc áp dụng định lý trước cho V là hình cầu trong X có tâm ở gốc, bán kính $1/r$. □

6.5. $\mathcal{M}$-TÔPÔ TRÊN KHÔNG GIAN LIÊN HỢP. Trên không gian X^*, ngoài tôpô yếu* còn có thể đưa vào nhiều tôpô lồi địa phương khác. Ta dựa vào sự kiện:

Bổ đề 9. *Nếu M là một tập con bị chặn của X thì $p_M(f) = \sup_{x\in M}|f(x)|$ là một sơ chuẩn trên X^*.*

Thật vậy, vì M bị chặn nên $f(M)$ bị chặn (Định lý 19), nghĩa là $p_M(f) < \infty$ với mỗi $f \in X^*$, và rõ ràng $p_M(f_1 + f_2) \leq p_M(f_1) + p_M(f_2)$, $p_M(\alpha f) = |\alpha| p_M(f)$ (vì $|f_1 + f_2| \leq |f_1|$ và $|\alpha f| = |\alpha|.|f|$).

Do bổ đề này, ứng với mỗi họ con (bất kỳ) $\mathcal{M}$ của họ các tập bị chặn trong X, ta có một họ sơ chuẩn $\{p_M(f) : M \in \mathcal{M}\}$, họ này theo Định lý 17 xác định một tôpô lồi địa phương trên X^*, nhận làm cơ sở lân cận họ các tập có dạng

$$\{f : \sup_{x\in M_i} |f(x)| < \varepsilon \ (i = 1, 2, \ldots, n)\},$$

tức là các tập có dạng

$$\{f : |f(x)| < \varepsilon \text{ với mọi } x \in \cup_{i=1}^{n} M_i\}, \tag{15}$$

trong đó n là số tự nhiên bất kỳ, ε là số dương bất kỳ, M_i là những tập bất kỳ trong họ $\mathcal{M}$. Ta gọi những tôpô này là $\mathcal{M}$-*tôpô* trên X^*.

Thông thường người ta giả thiết:

(i) Họ $\mathcal{M}$ kín đối với phép hợp hữu hạn, nghĩa là nếu $M_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ thì $\cup_{i=1}^{n} M_i \in \mathcal{M}$.

(ii) Họ $\mathcal{M}$ phủ X, tức là $\cup\{M : M \in \mathcal{M}\} = X$.

Định lý 27. *Với các giả thiết* (i) *và* (ii), *họ $\mathcal{M}$ xác định trên X^* một tôpô lồi địa phương Hausdorff, mà một cơ sở lân cận là họ tất cả các tập có dạng*

$$\{f : |f(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in M\} \tag{16}$$

với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý, và $M \in \mathcal{M}$.

Chứng minh. Do giả thiết (i) họ các tập (15) trùng với họ (16), và do giả thiết (ii) họ sơ chuẩn $\{p_M(f);\ M \in \mathcal{M}\}$ thỏa mãn điều kiện tách: nếu $f \equiv 0$ thì có một $x \in X$ sao cho $f(x) \neq 0$, và lấy $M \in \mathcal{M}$ chứa x ta sẽ có $p_M(f) > 0$. Vì vậy tôpô lồi địa phương xác định bởi họ sơ chuẩn ấy là tôpô Hausdorff. □

Sự hội tụ trong $\mathcal{M}$-tôpô của một dãy phiếm hàm: $f_m \to f$, có nghĩa là: với mọi tập $M \in \mathcal{M}$ và mọi $\varepsilon > 0$ cho trước có một n_0 sao cho

$(\forall m \geq n_0)\ (\forall x \in M)\ |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$. Nói cách khác, f_m hội tụ đều tới f trên tập M. Vì vậy $\mathcal{M}$-tôpô còn được gọi là *tôpô hội tụ đều trên các tập thuộc họ* $\mathcal{M}$.

Vì có thể chọn họ $\mathcal{M}$ theo nhiều cách nên nói chung trên không gian liên hợp X^* có thể xét tới nhiều tôpô lồi địa phương Hausdorff khác nhau. Hai cách chọn $\mathcal{M}$ cực đoan là:

1) $\mathcal{M}$ *là họ tất cả các tập con hữu hạn của* X. Tôpô thu được trong trường hợp hợp này chính là tôpô yếu*. Dễ thấy đó là tôpô yếu nhất trong tất cả các tôpô trên X^* xác định theo kiểu trên.

2) $\mathcal{M}$ *là họ tất cả các tập bị chặn của* X. Tôpô thu được trong trường hợp này dĩ nhiên là mạnh nhất trong tất cả các tôpô xác định theo kiểu trên cho nên được gọi là *tôpô mạnh trên* X^*, và cũng được ký hiệu $\beta(X^*, X)$. Như đã thấy trên, đó là tôpô hội tụ đều trên mọi tập bị chặn. Trong trường hợp riêng X là không gian định chuẩn, tôpô mạnh trên X^* chính là tôpô xác định bởi chuẩn

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}$$

(có thể kiểm nghiệm dễ dàng).

Theo Bổ đề 6, muốn cho một tập $N \subset X^*$ là $\mathcal{M}$-*bị chặn* (bị chặn trong $\mathcal{M}$-tôpô), điều kiện cần và đủ là với mọi $M \in \mathcal{M}$ tập số

$$p_M(N) = \{p_M(f) : f \in N\} = \{\sup_{x \in M} |f(x)| : f \in N\}$$

bị chặn, hay nói cách khác, các tập số

$$\{f(x) : f \in N,\ x \in M\}$$

bị chặn, tức là

$$(\forall M \in \mathcal{M})\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall f \in N)\ (\forall x \in M)\ |f(x)| < \alpha.$$

Nói riêng:

1) N *là tập bị chặn yếu** (bị chặn trong tôpô yếu*) khi và chỉ khi với mỗi $x \in X$ tập số $\{f(x) : f \in N\}$ bị chặn.

2) N *là tập bị chặn mạnh* (bị chặn trong tôpô mạnh) khi và chỉ khi với mỗi tập bị chặn $M \subset X$ tập số $\{f(x) : f \in N,\ x \in M\}$ bị chặn.

Dĩ nhiên một tập bị chặn mạnh thì cũng bị chặn yếu, nhưng ngược lại nói chung không đúng. Tuy nhiên:

Định lý 28. *Nếu X là không gian thùng (không gian Frechet, nói riêng) thì mọi tập bị chặn yếu* trong X^* cũng bị chặn mạnh.*

Nói cách khác: nếu tập $\{f(x) : f \in N\}$ bị chặn tại mỗi $x \in X$ thì tập $\{f(x) : f \in N,\ x \in M\}$ bị chặn trên mọi tập bị chặn $M \subset X$.

Chứng minh. Giả sử $N \subset X^*$ là tập bị chặn yếu*. Khi ấy theo Bổ đề 8, đối cực N° của N là lồi, cân đối, đóng (trong tôpô yếu, do đó càng đóng trong tôpô vốn có) và hấp thu, cho nên nó là một lân cận của gốc trong X. Nếu M bị chặn trong X thì phải có $\alpha > 0$ để cho $M \subset \alpha N^\circ$, tức là $(\forall x \in M)\ (\forall f \in N)\ |f(x)| \leq \alpha$. Vậy quả N bị chặn mạnh. □

Từ định lý này có thể suy ra ngay những trường hợp riêng sau đây của Định lý Banach-Steinhaus (Định lý 12, Chương 6):

1) *Cho một họ phiếm hàm tuyến tính liên tục $\{f : f \in N\}$ trên một không gian Banach. Nếu tập $\{f(x) : f \in N\}$ bị chặn với mọi x thì tập $\{\|f\| : f \in N\}$ cũng bị chặn.*

2) *Nếu một dãy phiếm hàm tuyến tính liên tục $\{f_n\}$ trên một không gian Banach mà hội tụ yếu thì có một hằng số C sao cho $(\forall n)\ \|f_n\| \leq C$.*

6.6. TÔPÔ PHÙ HỢP ĐỐI NGẪU. Ta trở lại xét một cặp đối ngẫu tách (X, Y). Sau khi đưa vào trong X tôpô $\sigma(X, Y)$ ta biến nó thành một không gian lồi địa phương Hausdorff có đối ngẫu là Y và từ đó, ứng với mỗi họ $\mathcal{M}$ những tập con bị chặn của X, ta có thể xây dựng, theo phương pháp trình bày ở mục trước, một $\mathcal{M}$-tôpô trên Y.

Đương nhiên ta hoàn toàn có thể thay đổi vai trò của X và Y. Sau khi đưa vào trong Y tôpô $\sigma(Y, X)$ thì ứng với mỗi họ $\mathcal{N}$ những tập con bị chặn của Y ta có một $\mathcal{N}$-*tôpô* trên X. Tôpô này nhận làm cơ sở lân cận của gốc tất cả các tập có dạng

$$\{x : |(x, y)| < \varepsilon \quad (\forall y \in N)\} \tag{17}$$

trong đó $\varepsilon > 0$ tuỳ ý, và $N \in \mathcal{N}$ (với giả thiết $\mathcal{N}$ thỏa mãn hai điều kiện (i) và (ii) đã nêu về $\mathcal{M}$ ở mục trước).

Chẳng hạn, lấy $\mathcal{N}$ là họ *tất cả các tập con hữu hạn* của Y thì $\mathcal{N}$-tôpô sẽ là tôpô mà một cơ sở lân cận của gốc gồm các tập có dạng

$$\{x : |(x, y_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

tức là $\mathcal{N}$-tôpô này chẳng qua là $\sigma(X, Y)$. Còn nếu lấy $\mathcal{N}$ là họ *tất cả các tập con bị chặn* của Y thì $\mathcal{N}$-tôpô sẽ có cơ sở lân cận của gốc gồm tất cả các tập (17), với $\varepsilon > 0$ bất kỳ và với N là một tập bị chặn bất kỳ trong Y. Tôpô này dĩ nhiên là mạnh nhất trong tất cả các tôpô xây dựng như trên, và thường được ký hiệu $\beta(X, Y)$.

Như vậy, khi có một cặp đối ngẫu (X, Y) ta có thể xây dựng trên X cả một thang các tôpô lồi địa phương khác nhau, từ yếu nhất là $\sigma(X, Y)$ cho đến mạnh nhất là $\beta(X, Y)$. Ta nói rằng một tôpô lồi địa phương $\mathcal{G}$ trên X là *phù hợp với đối ngẫu* (X, Y) (nói gọn : phù hợp đối ngẫu) nếu đối ngẫu của không gian $(X, \mathcal{G})$ là chính Y. Ta đã biết $\sigma(X, Y)$ là tôpô yếu nhất phù hợp đối ngẫu (Định lý 21). Vấn đề đặt ra là: còn những tôpô nào khác trên X cũng phù hợp đối ngẫu, và đặc trưng của chúng như thế nào?

Để trả lời câu hỏi này trước hết ta nhận xét rằng mọi tập $C \subset Y$ mà là $\sigma(Y, X)$-compac thì đều bị chặn trong Y. Thật vậy, với mỗi $x \in X$, hàm $|x(\cdot)| : \ y \mapsto |(x, y)|$ liên tục (trong tôpô nói trên) cho nên theo Định lý 12, tập số $|x|(C)$ là compac, do đó bị chặn và theo Bổ đề 7, C bị chặn. Vậy nếu ta gọi $\mathcal{N}$ là họ gồm:

1) tất cả các tập lồi, cân đối và $\sigma(Y, X)$-compac trong Y;

2) tất cả các tập con của những tập trên

thì $\mathcal{N}$ là một họ tập con bị chặn của Y, xác định trên X một $\mathcal{N}$-tôpô. Tôpô này gọi là *tôpô Mackey* (theo đối ngẫu (X, Y)) và ký hiệu $\mu(X, Y)$.

Bổ đề 10. *Tôpô $\mu(X, Y)$ có một cơ sở lân cận của gốc gồm tất cả các đối cực của những tập lồi, cân đối và $\sigma(Y, X)$-compac trong Y.*

Chứng minh. Họ $\mathcal{N}$ thỏa mãn cả hai điều kiện (i) và (ii) đã nêu cho $\mathcal{M}$ ở mục trước. Thật vậy, điều kiện (ii) hiển nhiên. Mặt khác, nếu $N_i \in \mathcal{N}$ $(i = 1, \ldots, n)$ thì không giảm tổng quát có thể cho rằng các N_i lồi, cân đối và compac. Khi ấy bao lồi của chúng sẽ lồi, cân đối và compac (hệ quả Định lý Tychonoff), cho nên hợp của các N_i $(i = 1, \ldots, n)$ thuộc $\mathcal{N}$.

Vậy $\mu(X,Y)$ có một cơ sở lân cận gồm tất cả các tập có dạng (17), với $N \subset C$, C lồi, cân đối và compac. Nhưng với $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ ta có $V \supset (\frac{1}{\varepsilon}N)^\circ \supset (\frac{1}{\varepsilon'}C)^\circ$. Từ đó suy ra kết luận của bổ đề.

Dĩ nhiên: $\sigma(X,Y) \subset \mu(X,Y) \subset \beta(X,Y)$ và nói chung $\mu(X,Y)$ yếu hơn thực sự $\beta(X,Y)$. Kết quả sau đây giải đáp trọn vẹn vấn đề nêu ra ở trên.

Định lý 29. *Tôpô yếu $\sigma(X,Y)$ và tôpô Mackey $\mu(X,Y)$ là tôpô yếu nhất và mạnh nhất phù hợp đối ngẫu. Muốn cho một tôpô lồi địa phương $\mathcal{G}$ trên X phù hợp đối ngẫu, điều kiện cần và đủ là*

$$\sigma(X,Y) \subset \mathcal{G} \subset \mu(X,Y).$$

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh phần thứ hai của định lý.

Cần. Theo Định lý 22, $\sigma(X,Y) \subset \mathcal{G}$, nếu $\mathcal{G}$ phù hợp đối ngẫu. Mặt khác, xét một lân cận V lồi, cân đối và đóng, của gốc trong tôpô $\mathcal{G}$. Theo Định lý Banach-Alaoglu (Định lý 26), tập V° compac trong tôpô $\sigma(Y,X)$, và theo Bổ đề 8 nó lồi, cân đối. Mà theo Định lý song đối cực (Định lý 23), $V^{\circ\circ} = V$. Vậy $V = (V^\circ)^\circ$ là một lân cận của gốc trong tôpô $\mu(X,Y)$, và do đó $\mathcal{G} \subset \mu(X,Y)$.

Đủ. Ta chỉ cần chứng minh rằng $\mu(X,Y)$ phù hợp đối ngẫu. Cho f_0 là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X theo tôpô $\mu = \mu(X,Y)$. Vấn đề là chứng minh rằng $f_0 \in Y$. Vì f_0 liên tục (theo tôpô μ) nên tập $\{x : |f_0(x)| \leq 1\} = V$ là một μ-lân cận, tức là phải bao hàm một tập có dạng W°, với W là một tập lồi, cân đối và $\sigma(Y,X)$-compac. Nhưng W đã là $\sigma(Y,X)$-compac, thì phải đóng theo tôpô này và vì vậy cũng đóng theo tôpô $\sigma(X',X)$, trong đó X' là không gian tất cả các phiếm hàm tuyến tính trên X. Vậy nếu ta lấy đối cực trong cặp đối ngẫu (X,X') thì $W^{\circ\circ} = W$ (Định lý 23). Mà $V \supset W^\circ$, cho nên $V^{\circ\circ} \subset W^{\circ\circ} = W \subset Y$. Vả lại $f_0 \in V^\circ$. Do đó $f_0 \in Y$. □

Một không gian lồi địa phương X sao cho tôpô của nó trùng với tôpô Mackey theo đối ngẫu (X,X^*), gọi là một *không gian Mackey*. Có thể chứng minh rằng một số khá lớn các không gian thường gặp: không gian thùng, không gian boocnôlôgic (không gian Fréchet, nói riêng) đều là không gian Mackey.

7*. GIỚI HẠN XẠ ẢNH VÀ GIỚI HẠN QUI NẠP

Sau đây sẽ nói về hai phương pháp thông dụng đưa tôpô lồi địa phương vào một không gian tuyến tính.

7.1. GIỚI HẠN XẠ ẢNH. Giả sử cho trước:
1) Một không gian tuyến tính X;
2) Một họ không gian lồi địa phương X_λ ($\lambda \in \Lambda$);
3) Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, một ánh xạ tuyến tính $u_\lambda : X \to X_\lambda$.

Trong nhiều trường hợp ta muốn có trên X một tôpô lồi địa phương sao cho trong đó tất cả các ánh xạ u_λ đều liên tục. Gọi Φ là họ tất cả các tôpô có tính chất ấy. Nếu $\mathcal{G} \in \Phi$ và $\mathcal{G}'$ là một tôpô lồi địa phương trên X mạnh hơn $\mathcal{G}$ thì dĩ nhiên $\mathcal{G}' \in \Phi$. Vì vậy ta quan tâm đến tôpô yếu nhất trong họ Φ: tôpô ấy được gọi là *tôpô lồi địa phương khởi đầu* của họ các tôpô của các X_λ, đối với họ các ánh xạ tuyến tính u_λ. Không gian X, với tôpô ấy, còn gọi là *giới hạn xạ ảnh* của các không gian lồi địa phương X_λ đối với họ ánh xạ u_λ. Sự tồn tại của tôpô khởi đầu được xác lập bởi:

Định lý 30. *Cho $\mathcal{B}$ là họ các tập $V \subset X$ có dạng*

$$V = \cap_{\lambda \in I} u_\lambda^{-1}(V_\lambda),\ I \subset \Lambda,\ I \text{ hữu hạn},\ V_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda \qquad (18)$$

trong đó $\mathcal{V}_\lambda$ là một cơ sở lân cận lồi cân đối của X_λ. Tôpô lồi địa phương khởi đầu chính là tôpô lồi địa phương nhận $\mathcal{B}$ làm cơ sở lân cận .

Chứng minh. Trước hết ta chú ý rằng theo Định lý 7 điều kiện cần và đủ để cho một ánh xạ tuyến tính $u : X \to Y$ liên tục là : nghịch ảnh bởi u của mỗi lân cận (của gốc) trong Y phải là một lân cận (của gốc) trong X (nhớ rằng một ánh xạ tuyến tính là liên tục khi và chỉ khi nó liên tục tại gốc). Từ đó suy ra rằng: điều kiện cần và đủ để cho một tôpô lồi địa phương $\mathcal{G}$ thuộc họ Φ (tức là bảo đảm sự liên tục của mọi ánh xạ u_λ) là họ các lân cận (của gốc) trong $\mathcal{G}$ phải chứa tất cả các tập có dạng $u_\lambda^{-1}(V_\lambda)$, với $V_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$). Nhưng mặt khác các tập có dạng này đều là lồi, cân đối và hấp thu (vì các V_λ đều như thế) cho nên theo Định lý 16 có một tôpô lồi địa phương trên X nhận họ $\mathcal{B}$ (họ các tập có dạng (17)) làm cơ sở lân cận. Vậy tôpô này là tôpô yếu nhất thuộc họ Φ. □

Hệ quả. *Nếu* $\cap_{\lambda\in\Lambda}u_\lambda^{-1}(0) = \{0\}$ *và mỗi không gian* X_λ *đều là không gian Hausdorff thì giới hạn xạ ảnh cũng là không gian Hausdorff.*

Thật vậy, đó là hệ quả của Định lý 15, vì

$$\cap_{V\in\mathcal{B}}V = \cap_{\lambda\in\Lambda}\cap_{V_\lambda\in\mathcal{V}_\lambda} u_\lambda^{-1}(V_\lambda) = \cap_{\lambda\in\Lambda}u_\lambda^{-1}(0) = \{0\}.$$

Định lý 31. *Cho* X *là giới hạn xạ ảnh của các không gian lồi địa phương* X_λ *đối với các ánh xạ* u_λ, Y *là một không gian lồi địa phương và* f *là một ánh xạ tuyến tính từ* Y *vào* X. *Ánh xạ* f *liên tục khi và chỉ khi mỗi ánh xạ phức hợp* $u_\lambda \circ f$ *là liên tục.*

Chứng minh. Ánh xạ f liên tục khi và chỉ khi với mỗi $V \in \mathcal{B}$ tập $f^{-1}(V)$ là một lân cận (của gốc) trong Y, hay nói cách khác, với mỗi $\lambda \in \Lambda$ và mỗi $V_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$ tập $f^{-1}(u_\lambda^{-1}(V_\lambda)) = (u_\lambda \circ f)^{-1}(V_\lambda)$ là một lân cận trong Y. Nhưng điều này có nghĩa là $u_\lambda \circ f$ liên tục. □

Định lý 32. *Mỗi không gian lồi địa phương là giới hạn xạ ảnh của một họ không gian định chuẩn.*

Chứng minh. Cho X là một không gian lồi địa phương bất kỳ, Γ là họ sơ chuẩn ứng với một cơ sở lân cận $\mathcal{B}$ của X. Trong chứng minh Định lý 25 ta đã thấy rằng với mỗi $p \in \Gamma$ tập $p^{-1}(0)$ là một không gian con của X và p xác định một chuẩn trên không gian thương $X_p = X/p^{-1}(0)$. Khi ấy, gọi u_p là ánh xạ chọ tương ứng với $x \in X$ phần tử $\tilde{x} \in X_p$ ($\tilde{x}$ là lớp các $x' \in X$ với $p(x' - x) = 0$), và dựa vào các Định lý 25 và 17 ta thấy ngay rằng X chính là giới hạn xạ ảnh của các X_p đối với các u_p. □

Ví dụ đơn giản nhất về tôpô lồi địa phương khởi đầu là tôpô cảm sinh trong một không gian tuyến tính con M của một không gian lồi địa phương X; tôpô đó (xem mục 1.6) chính là tôpô lồi địa phương yếu nhất trong tất cả các tôpô lồi địa phương bảo đảm sự liên tục của ánh xạ đồng nhất từ M vào X.

Một ví dụ khác là tôpô yếu của một không gian lồi địa phương Hausdorff X. Như đã định nghĩa ở mục 6.1 tôpô yếu đó là tôpô mà cơ sở lân cận gồm các tập có dạng $\cap_{i=1}^n\{x : |f_i(x)| < \varepsilon\}$, trong đó n là số tự nhiên tuỳ ý, f_i là những phiếm hàm tuyến tính liên tục bất kỳ trên X, ε là số dương tuỳ ý. Vậy nó chính là tôpô lồi địa phương yếu nhất

trong tất cả các tôpô lồi địa phương bảo đảm sự liên tục của mọi ánh xạ $f \in X^*$.

Định lý 25 thật ra là trường hợp riêng của mệnh đề tổng quát sau đây:

Định lý 33. *Cho X là giới hạn xạ ảnh của các không gian lồi địa phương X_λ đối với các ánh xạ u_λ. Một tập $M \subset X$ bị chặn khi và chỉ khi mỗi tập $u_\lambda(M)$ cũng bị chặn.*

Chứng minh. Nếu M bị chặn thì mỗi tập $u_\lambda(M)$ cũng bị chặn, vì các u_λ đều là ánh xạ liên tục (Định lý 20). Ngược lại giả sử mỗi $u_\lambda(M)$ đều bị chặn, và cho V_λ là một lân cận lồi cân đối trong X_λ. Vì $u_\lambda(M)$ bị chặn nên nó được hấp thu bởi V_λ, do đó M được hấp thu bởi $u_\lambda^{-1}(V_\lambda)$. Vậy theo Định lý 30, M sẽ được hấp thu bởi mọi lân cận trong X, nghĩa là M bị chặn. □

7.2. GIỚI HẠN QUI NẠP. Giả sử cho trước :

1) Một không gian tuyến tính X;

2) Một họ không gian lồi địa phương X_λ ($\lambda \in \Lambda$);

3) Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, một ánh xạ tuyến tính $v_\lambda : X_\lambda \to X$.

Gọi Ψ là tập tất cả các tôpô lồi địa phương trên X sao cho trong mỗi tôpô ấy, tất cả các ánh xạ v_λ đều trở thành liên tục. Nếu $\mathcal{G} \in \Psi$ và $\mathcal{G}'$ là một tôpô lồi địa phương yếu hơn $\mathcal{G}$ thì rõ ràng $\mathcal{G}'$ cũng thuộc Ψ. Vì vậy ta quan tâm đến tôpô mạnh nhất trong họ Ψ: tôpô đó được gọi là *tôpô lồi địa phương tận cùng* của họ các tôpô của các X_λ, đối với họ các ánh xạ tuyến tính v_λ. Không gian X, với tôpô đó, còn được gọi là *giới hạn qui nạp* của các không gian lồi địa phương X_λ, đối với các ánh xạ v_λ. Định lý sau đây khẳng định sự tồn tại của tôpô tận cùng:

Định lý 34. *Cho $\mathcal{B}$ là họ các tập $V \subset X$ lồi, cân đối và hấp thu sao cho mỗi $v_\lambda^{-1}(V)$ là lân cận trong X_λ. Tôpô lồi địa phương tận cùng chẳng qua là tôpô nhận $\mathcal{B}$ làm cơ sở lân cận.*

Chứng minh. Theo Định lý 15 có một tôpô lồi địa phương $\mathcal{J}$ trên X nhận $\mathcal{B}$ làm cơ sở lân cận. Vì nghịch ảnh $v_\lambda^{-1}(V)$ của mọi lân cận $V \in \mathcal{B}$ đều là lân cận trong X_λ, nên mỗi v_λ đều liên tục trong tôpô $\mathcal{J}$; vậy $\mathcal{J} \in \Psi$. Mặt khác, nếu $\mathcal{G} \in \psi$ thì với mỗi lân cận V lồi, cân đối, trong $\mathcal{G}$ và với mỗi $\lambda \in \Lambda$ tập $v_\lambda^{-1}(V)$ đều là lân cận trong X_λ nghĩa là $V \in \mathcal{B}$, do đó $\mathcal{G} \subset \mathcal{J}$. Vậy $\mathcal{J}$ là tôpô mạnh nhất trong họ Ψ. □

Giả sử không gian tuyến tính sinh bởi $\cup_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda(X_\lambda)$ trùng với X, và với mỗi λ cho $\mathcal{V}_\lambda$ là một cơ sở lân cận lồi cân đối của X_λ. Từ định lý trên suy ra: nếu với mỗi λ ta lấy một tập $V_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$ rồi lấy tập lồi cân đối nhỏ nhất V bao hàm $\cup_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda(V_\lambda)$, thì họ $\mathcal{V}$ tất cả các tập V xây dựng theo cách đó sẽ cho một cơ sở lân cận của giới hạn qui nạp. Thật vậy, vì V_λ hấp thu X_λ nên $v_\lambda V_\lambda)$ hấp thu $v_\lambda(X_\lambda)$ và vì không gian tuyến tính sinh bởi $\cup_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda(X_\lambda)$ trùng với X, nên $\cup_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda(V_\lambda)$, và do đó V, là tập hấp thu. Đương nhiên với mọi λ ta có $v_\lambda^{-1}(V) \supset V_\lambda$. Vậy $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$. Mặt khác, với mọi $W \in \mathcal{B}$, tập $v_\lambda^{-1}(W)$ bao hàm một $V_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$ và tập lồi cân đối nhỏ nhất chứa $\cup_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda(V_\lambda)$ sẽ thuộc $\mathcal{V}$ và bao hàm trong W. Mà $\mathcal{B}$ là cơ sở lân cận của giới hạn qui nạp nên $\mathcal{V}$ cũng là cơ sở lân cận.

Từ định lý trên ta cũng suy ra:

Hệ quả. *Giới hạn quy nạp của những không gian thùng cũng là không gian thùng.*

Thật vậy, nếu B là một thùng trong X (nghĩa là B lồi cân đối, đóng và hấp thu) thì $v_\lambda^{-1}(B)$ là một thùng trong X_λ, cho nên $v_\lambda^{-1}(B)$ là một lân cận trong X_λ. Do đó $B \in \mathcal{B}$ và B là lân cận trong X. □

Định lý 35. *Cho X là giới hạn quy nạp của các không gian lồi địa phương X_λ đối với các ánh xạ v_λ, Y là một không gian lồi địa phương, và f là một ánh xạ tuyến tính từ X vào Y. Ánh xạ f liên tục khi và chỉ khi mỗi ánh xạ phức hợp $f \circ v_\lambda$ là liên tục.*

Chứng minh. Ánh xạ f liên tục khi và chỉ khi với mỗi lân cận lồi cân đối W trong Y, tập $f^{-1}(W)$ là một lân cận trong X, tức là, theo Định lý 32, mỗi tập $v_\lambda^{-1}(f^{-1}(W))) = (f \circ v_\lambda)^{-1}(W)$ là một lân cận trong X_λ. Điều này có nghĩa là $f \circ v_\lambda$ liên tục. □

Hệ quả. *Giới hạn quy nạp của những không gian giới nội đóng (boocnôlôgic) cũng là không gian giới nội đóng.*

Thật vậy, cho X là một giới hạn quy nạp đó, Y là một không gian lồi địa phương, và f là một ánh xạ tuyến tính bị chặn từ X vào Y. Với mỗi λ, $f \circ v_\lambda$ biến tập bị chặn thành tập bị chặn, cho nên phải liên tục, vì X_λ là không gian giới nội đóng. Do đó f liên tục. □

Định lý 36. *Đối với một không gian lồi địa phương Hausdorff X bốn tính chất sau là tương đương:*

(i) *X là không gian giới nội đóng;*

(ii) *Trong X không thể đưa vào một tôpô lồi địa phương mạnh hơn thực sự tôpô (vốn có) của X mà họ các tập bị chặn vẫn như cũ;*

(iii) *Bất kỳ tập nào lồi cân đối mà hấp thu mọi tập bị chặn thì đều là lân cận;*

(iv) *X là giới hạn quy nạp của một họ không gian định chuẩn.*

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii) Giả sử X là giới nội đóng, và cho $\mathcal{G}$ là tôpô (vốn có) của X, $\mathcal{J}$ là một tôpô lồi địa phương trên X sao cho họ các tập $\mathcal{J}$-bị chặn trùng với họ các tập $\mathcal{G}$-bị chặn. Khi ấy ánh xạ đồng nhất f từ $(X, \mathcal{G})$ vào $(X, \mathcal{J})$ sẽ biến mỗi tập bị chặn thành tập bị chặn, cho nên phải là ánh xạ liên tục. Do đó mọi tập mở trong $\mathcal{J}$ cũng là mở trong $\mathcal{G}$, nghĩa là $\mathcal{J} \subset \mathcal{G}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Giả sử X có tính chất (ii) và gọi $\mathcal{B}$ là họ tất cả các tập $B \subset X$ có tính chất: B lồi, cân đối, B hấp thu mọi tập bị chặn. Theo Định lý 16, có một tôpô lồi địa phương $\mathcal{J}$ trên X nhận $\mathcal{B}$ làm cơ sở lân cận. Vì mỗi lân cận trong $\mathcal{G}$ (tôpô vốn có) đều thuộc $\mathcal{B}$ nên $\mathcal{J} \supset \mathcal{G}$, và rõ ràng họ các tập $\mathcal{J}$-giới nội trùng với họ các tập $\mathcal{G}$-bị chặn. Vậy $\mathcal{J} = \mathcal{G}$, nghĩa là mọi $B \in \mathcal{B}$ đều là lân cận.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Giả sử X có tính chất (iii). Với mỗi $B \subset X$ đóng, bị chặn, lồi và cân đối, ta ký hiệu X_B là không gian tuyến tính con sinh bởi B, p_B là hàm cỡ của B, xác định trong X_B một tôpô lồi địa phương $\mathcal{J}_B$. Vì B bị chặn nên với mỗi lân cận V trong X tồn tại $\mu > 0$ sao cho $\mu B \subset V$, từ đó $\mu B \subset V \cap X_B$, chứng tỏ $V \cap X_B$ là một lân cận trong $\mathcal{J}_B$. Vậy trên X_B tôpô $\mathcal{J}_B$ mạnh hơn tôpô cảm sinh từ X, mà X là không gian Hausdorff nên $\mathcal{J}_B$ càng là tôpô Hausdorff. Do đó $p_B(x) > 0$ với mọi $x \in X_B$, $x \neq 0$, tức là p_B là một chuẩn trên X_B, và $(X_B, \mathcal{J}_B)$ là một không gian định chuẩn.

Dễ thấy rằng X là giới hạn qui nạp của các $(X_B, \mathcal{J}_B)$ đối với các ánh xạ đồng nhất u_B từ X_B vào X. Thật vậy, cho V là một tập lồi cân đối và hấp thu sao cho mỗi $u_B^{-1}(V) = V \cap X_B$ là lân cận trong X_B. Gọi M là một tập bị chặn bất kỳ trong X và lấy B là tập lồi, cân đối, đóng, nhỏ nhất, bao hàm M. Khi ấy B cũng là tập bị chặn, nên $V \cap X_B$ là lân cận trong X_B, nghĩa là $V \cap X_B \supset \{x \in X_B : p_B(x) < \varepsilon\} = \varepsilon B$ với một tập bị chặn, Do đó theo giả thiết V phải là một lân cận trong X, và theo Định lý 34, X chính là giới hạn qui nạp nói trên.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Do hệ quả của Định lý 35.

Định lý 36 đã được chứng minh đầy đủ. □

Ví dụ đơn giản và quan trọng về giới hạn qui nạp là *không gian thương*. Cho X_0 là một không gian lồi địa phương, M là một không gian tuyến tính con của X_0, và $X = X_0/M$. Gọi V là ánh xạ chính tắc từ X_0 vào X (tức là ánh xạ cho tương ứng với mỗi $x \in X_0$ lớp tương đương $\tilde{x}$ chứa nó), thì dễ thấy rằng tôpô thương (mục 3.3) chính là tôpô lồi địa phương mạnh nhất bảo đảm sự liên tục của v.

Trường hợp thường gặp về giới hạn qui nạp là các không gian X_λ là không gian tuyến tính con của X, có hợp sinh ra X, và các v_λ là thu hẹp trên X của ánh xạ đồng nhất từ X vào chính nó. Khi ấy tôpô lồi địa phương tận cùng là tôpô lồi địa phương trên X mạnh nhất cảm sinh trong mỗi X_λ một tôpô yếu hơn tôpô vốn có của X_λ. Một tập lồi cân đối V là lân cận trong X khi và chỉ khi mỗi tập $V \cap X_\lambda$ đều là lân cận; một ánh cạ tuyến tính f từ X vào một không gian lồi địa phương là liên tục khi và chỉ khi nó liên tục trên từng X_λ.

7.3. KHÔNG GIAN TÍCH VÀ KHÔNG GIAN TỔNG. Cho X_λ ($\lambda \in \Lambda$) là những tập bất kỳ. Như đã định nghĩa ở mục 1.6, tích trực tiếp của các X_λ, ký hiệu $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, là tập tất cả các hàm $x = x(\lambda)$ xác định trên Λ sao cho $x(\lambda) \in X_\lambda$ với mỗi λ. Phần tử $x(\lambda)$ là toạ độ thứ λ của x, và ánh xạ $p_\lambda : x \to x(\lambda)$ là phép chiếu từ X xuống X_λ.

Nếu mỗi X_λ là một không gian tuyến tính (thực cả hay phức cả) thì bằng cách xác định $(x+y)(\lambda) = x(\lambda) + y(\lambda)$, $(\alpha x)(\lambda) = \alpha x(\lambda)$, ta biến tích trực tiếp $X = \prod_\lambda X_\lambda$ thành một không gian tuyến tính. Nếu mỗi X_λ lại là không gian lồi địa phương thì bằng cách coi X là giới hạn xạ ảnh của các X_λ đối với các ánh xạ p_λ ta biến nó thành một không gian lồi địa phương, gọi là *tích tôpô* của các không gian X_λ. Tôpô của tích là tôpô yếu nhất đảm bảo sự liên tục của các phép chiếu p_λ; một cơ sở lân cận của tôpô ấy gồm tất cả các giao của những họ hữu hạn tập $p_\lambda^{-1}(V_\lambda)$, trong đó $V_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$, $\mathcal{V}_\lambda$ là một cơ sở lân cận lồi cân đối trong X_λ; nói cách khác, cơ sở ấy gồm tất cả các tập có dạng $\prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$, trong đó $V_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$ với một số hữu hạn các λ và $V_\lambda = X_\lambda$ với mọi λ khác. Theo Định lý 13 (Tychonoff), tích tôpô cuả một họ không gian tôpô compac thì cũng compac.

Ta hãy định nghĩa một phép ánh xạ $j_\lambda : X_\lambda \to X$ bằng cách cho tương ứng với mỗi phần tử $x_\lambda \in X_\lambda$ phần tử $x \in X$ có $x(\lambda) = x_\lambda$ và $x(\mu) = 0$ với mọi $\mu \in \Lambda$, $\mu \neq \lambda$. Rõ ràng phép ánh xạ j_λ là tuyến tính, 1-1 từ X_λ lên $j_\lambda(X_\lambda)$. Vì mỗi $p_\mu \circ j_\lambda$ ($\mu \in \Lambda$) là liên tục nên j_λ liên tục, hơn nữa vì $j_\lambda^{-1} = p_\lambda$ (thu hẹp trên $j_\lambda(X_\lambda)$) nên j_λ^{-1} cũng liên tục. Như vậy j_λ là một ánh xạ tuyến tính 1-1 và liên tục theo hai chiều từ X_λ lên $j_\lambda(X_\lambda)$, nghiã là một phép đẳng cấu giữa X_λ và $j_\lambda(X_\lambda)$. Vì thế người ta thường đồng nhất X_λ với $j_\lambda(X_\lambda)$, và coi X_λ là một không gian con của tích $\prod X_\lambda$.

Không gian tuyến tính con của $\prod X_\lambda$ sinh bởi $\cup X_\lambda$ (hay chính xác hơn, bởi $\cup j_\lambda(X_\lambda)$) gọi là tổng các không gian tuyến tính X_λ và được ký hiệu $\sum_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Đó chẳng qua là tập các phần tử của $\prod X_\lambda$ chỉ có một số hữu hạn toạ độ khác 0. Như thế tổng các X_λ trùng với tích của chúng khi Λ là tập hữu hạn.

Nếu mỗi X_λ là một không gian lồi địa phương thì tổng $\sum X_\lambda$ có thể được trang bị tôpô cảm sinh từ tích tôpô $\prod X_\lambda$; ở trên vừa thấy rằng tôpô ấy cảm sinh trong mỗi X_λ tôpô vốn có của X_λ. Nhưng ta cũng có thể coi $\sum X_\lambda$ là giới hạn qui nạp của các X_λ đối với các ánh xạ j_λ: khi ấy $\sum X_\lambda$ gọi là *tổng tôpô* của các X_λ, và tôpô của nó gọi là *tôpô tổng*.

Vì theo định nghĩa giới hạn qui nạp, tôpô tổng là tôpô lồi địa phương mạnh nhất bảo đảm sự liên tục của các j_λ, mà tôpô tích cũng bảo đảm sự liên tục của các j_λ, nên tôpô tổng trong $\sum X_\lambda$ mạnh hơn tôpô tích. Mặt khác, nếu V là một lân cận lồi cân đối trong tôpô tổng thì mỗi $V \cap X_\lambda$ phải là lân cận trong X_λ. Vậy tôpô tổng cũng cảm sinh trong mỗi X_λ tôpô vốn có của X_λ.

BÀI TẬP

Không gian tôpô

1. Chứng minh rằng một họ $\mathcal{M}$ là cơ sở của tôpô khi và chỉ khi $\mathcal{M} \subset \mathcal{G}$ và với mọi x của không gian và mọi lân cận U của x, bao giờ cũng có $G \in \mathcal{M}$ sao cho $x \in G \subset U$.

2. Một *cơ sở con* (hay tiền cơ sở) của một tôpô là một họ $\mathcal{S}$ sao cho họ tất cả các giao hữu hạn của những tập thuộc họ đó làm thành một cơ sở của tôpô đã cho ("giao hữu hạn" của những tập thuộc $\mathcal{S}$ có nghĩa là giao của một số hữu hạn (bất kỳ) các tập thuộc họ $\mathcal{S}$). Chứng minh rằng một họ không rỗng những tập con của X là cơ sở con cho tôpô yếu nhất trên X chứa họ ấy.

3. Một không gian tôpô gọi là *liên thông* nếu nó không phải là hợp của hai tập không rỗng A, B, tách rời nhau (A, B gọi là tách rời nhau nếu $\overline{A} \cap B$ và $A \cap \overline{B}$ đều là tập rỗng). Một không gian tôpô X là liên thông khi và chỉ khi trong không gian đó chỉ có X và $\emptyset$ là vừa mở vừa đóng.

Giới hạn. Tính compac

4. Một tập A được sắp một phần (bởi quan hệ $\prec$) được gọi là *định hướng* nếu với mọi $\alpha, \beta \in A$ đều có $\gamma \in A$ sao cho $\alpha \prec \gamma, \beta \prec \gamma$. Nếu $(A, \prec)$ là một tập định hướng và với mỗi $\alpha \in A$ ứng một phần tử x_α của một không gian tôpô X, thì ta nói có một *dãy suy rộng* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (hay *lưới* trong X. Dãy suy rộng $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ gọi là hội tụ tới $x \in X$ nếu với mọi lân cận V của x có một α_0 (phụ thuộc V) sao cho: $x_\alpha \in V$ với mọi $\alpha \succ \alpha_0$. Ký hiệu $x_\alpha \underset{A}{\longrightarrow} x$ hay $x = \lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$.

Với mỗi dãy suy rộng $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ta có thể xét họ $\mathcal{B}$ gồm tất cả các tập $S_\alpha = \{x_\beta : \beta \succ \alpha\}$. Kiểm tra lại $\mathcal{B}$ là một cơ sở lọc. Lọc $\mathcal{S}$ tương ứng gọi là *lọc sinh bởi dãy suy rộng* $\{x_\alpha\}$. Chứng minh rằng nếu $x_\alpha \underset{A}{\longrightarrow} x$ thì $\mathcal{S} \to x$, và ngược lại.

5. Một tập $F \subset X$ là đóng khi và chỉ khi với mọi dãy suy rộng $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset F$ sao cho $x_\alpha \underset{A}{\longrightarrow} x$ ta đều có $x \in F$.

6. Một lọc $\mathcal{U}$ gọi là một siêu lọc nếu không có lọc $\mathcal{S} \neq \mathcal{U}$ nào mịn hơn nó, nghĩa là sao cho $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$. Chứng minh rằng mọi lọc đều có một siêu lọc $\mathcal{U} \supset \mathcal{S}$ (dùng tiên đề Zorn).

7. Một không gian tôpô X là compac khi và chỉ khi mọi siêu lọc trong X đều hội tụ.

Chỉ dẫn. Giả sử X compac, và $\mathcal{U}$ là một siêu lọc trong X. Xét họ các tập $\overline{F}$, với mọi $F \in \mathcal{U}$. Họ đó có tính tương giao hữu hạn (nghĩa là giao của một số hữu hạn tập trong họ đó bao giờ cũng $\neq \emptyset$). Vậy họ đó có một điểm chung x. Chứng minh rằng $\mathcal{U} \to x$.

Ngược lại, giả sử mọi siêu lọc trong X hội tụ. Xét một họ tập đóng $F_\alpha \subset X$ $(\alpha \in A)$ có tính tương giao hữu hạn. Tìm một siêu lọc $\mathcal{U}$ chứa họ đó. $\mathcal{U} \to x$ nào đó. Suy ra x chung cho tất cả các F_α.

Không gian tuyến tính tôpô.

8. Cho X là không gian tuyến tính thực làm thành do tất cả các hàm số thực liên tục trên đoạn $[0,1]$. Với mỗi cặp (δ, ε) $(\delta > 0,\ 0 < \varepsilon < 1)$ cho $V_{\delta\varepsilon}$ là tập tất cả các $x \in X$ sao cho $|x(t)| \leq \delta$ tại mọi điểm t ở ngoài một tập mở (phụ thuộc x), mà các khoảng cấu thành có độ dài tổng cộng $\leq \varepsilon$.

a) Chứng minh rằng họ các tập $V_{\delta\varepsilon}$ sinh trên X một tôpô tương hợp với cấu trúc không gian tuyến tính, và tôpô ấy là Hausdorff.

b) Chứng minh rằng với mỗi $(\delta\varepsilon)$ như trên có một số nguyên $n > 0$ sao cho $X = \cup_{i=1}^{n} A_i$, trong đó mọi $A_i = V_{\delta\varepsilon}$ (xét một phân hoạch thích hợp của đơn vị trên $I = [0,1]$).

c) Từ đó suy ra mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên X đều phải đồng nhất bằng 0. (Chú ý rằng nếu một hàm số liên tục x bằng 0 tại mọi điểm ở ngoài một khoảng $J \subset I$ có độ dài $< \varepsilon$ thì $\lambda x \in V_{\delta\varepsilon}$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}^1$).

9. Cho M, N là hai không gian con của không gian tuyến tính tôpô X, sao cho mọi $x \in X$ đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $x = u + v$, $u \in M$, $v \in N$. Nếu các ánh xạ $p : x \mapsto u$ và $q : x \mapsto v$ đều liên tục thì X gọi là *tổng tôpô* của M, N và M (hay N) được gọi là *bù tôpô* của N (hay M, tương ứng). Chứng minh rằng điều đó xảy ra khi và chỉ khi ánh xạ $\varphi : X/M \to N$ chuyển mỗi lớp tương đương modulo M tới phần tử duy nhất của lớp đó thuộc N, là một đẳng cấu.

10. Một không gian con hữu hạn chiều của một không gian tuyến tính tôpô bao giờ cũng có bù tôpô.

Không gian lồi địa phương.

11. Cho một không gian tuyến tính bất kỳ X. Tôpô lồi địa phương mạnh nhất trên X là tôpô trong đó tất cả các sơ chuẩn đều liên tục. Chứng minh rằng đó cũng là tôpô lồi địa phương xác định bởi họ tất cả các tập con của X, lồi, cân đối và hấp thu.

12. Trong không gian tuyến tính hữu hạn chiều chỉ có một tôpô lồi địa phương Hausdorff, đó là tôpô trong đó mọi tập lồi, cân đối và hấp thu đều là lân cận của gốc.

13. Cho Ω là một tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ là không gian tuyến tính lập thành bởi tất cả các hàm số thực vô cùng khả vi, và triệt tiêu ngoài $\overline{\Omega}$. Chứng minh rằng họ các sơ chuẩn p_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ xác định bởi

$$f \mapsto p_k(f) = \sup |D^k f|,$$

$$D^k = D_1^{k_1} \ldots D_n^{k_n},\ D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$k_1 + \cdots + k_n = k$$

(sup lấy theo mọi $t \in \mathbb{R}^n$ và mọi đạo hàm cấp k), xác định trên $\mathcal{D}(\Omega)$ một tôpô lồi địa phương , trong đó $\mathcal{D}(\Omega)$ trở thành một không gian Frechet.

Toán tử và phiếm hàm tuyến tính.

14. Cho một không gian tuyến tính X. Chứng minh rằng tôpô lồi địa phương mạnh nhất trên X (xem bài tập 11) có các tính chất sau đây:

a) Mọi toán tử tuyến tính từ X vào một không gian lồi địa phương bất kỳ Y đều là liên tục. Nói riêng, mọi phiếm hàm tuyến tính trên X đều liên tục. Mọi không gian con của X là đóng.

b) Một tập $M \subset X$ là bị chặn khi và chỉ khi nó nằm trong không gian con hữu hạn chiều và bị chặn trong không gian đó.

15. Chứng minh rằng trong một không gian tuyến tính tôpô:

a) Một tập M là bị chặn khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\} \subset M$ và mọi dãy số dương ε_n dần tới 0, dãy $\varepsilon_n x_n$ cũng dần tới 0.

b) Nếu $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ thì $\{x_n\}$ là tập bị chặn.

a) Một phiếm hàm tuyến tính f trên X là liên tục khi và chỉ khi có một tập mở $U \subset X$ và một số t, sao cho $t \notin f(U)$.

b) Một phiếm hàm tuyến tính f trên X là liên tục khi và chỉ khi $\mathrm{Ker} f$ là không gian con đóng của X.

17. Cho X là một không gian đếm được chuẩn, với họ sơ chuẩn

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \cdots \leq \|x\|_m \leq \cdots$$

Chứng minh rằng nếu f là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X thì phải có một số nguyên k và một hằng số $C > 0$ sao cho

$$|f(x)| \leq C\|x\|_k \quad \forall x \in X.$$

Tôpô yếu và tôpô yếu*.

18. Cho X là một không gian lồi địa phương, X^* là đối ngẫu của nó.

a) Một tập $M \subset X$ là bị chặn khi và chỉ khi nó là bị chặn trong mọi tôpô phù hợp đối ngẫu giữa X và X^*.

b) Một tập lồi $C \subset X$ là đóng khi và chỉ khi nó là đóng trong mọi tôpô phù hợp đối ngẫu giữa X và X^*.

c) Họ các tập lồi, cân đối, đóng và hấp thu (tức là các thùng) trùng với họ các đối cực của các tập đóng yếu trong X^*.

19. Nếu một không gian lồi địa phương Hausdorff X là metric hoá được, thì tôpô Mackey $\mu(X, X^*)$ trùng với tôpô vốn có.

DANH MỤC CÁC TỪ KHÓA

Ánh xạ
đóng, 280
đa trị co, 286
đồng phôi, 58
mở, 275
Ánh xạ khả vi, 216
chặt, 283
Ánh xạ liên tục, 57
Ánh xạ co, 59.
Bài toán biến phân cơ bản, 232+
Bất đẳng thức tứ giác, 51
Bất đẳng thức tam giác, 186
Bất đẳng thức
Bessel, 321
Minkowski, 191
Schwarz-Buniakowski, 191
Bản số, 17
Bao lồi, 262
Bao tuyến tính, 185
Bổ sung không gian metric, 50
Bông tuyết von Kock, 71
Bổ đề
Dubois-Raymond, 235
Fatou, 146
Cấu trúc tôpô, 272
Chuẩn của một vectơ, 186
Chuẩn cuả phiếm hàm, 212
Chuẩn của toán tử, 201
Chuỗi Neumann, 355
Cơ sở của một tôpô, 374
Cơ sở lọc, 383
Cơ sở lân cận, 376
Công thức De Morgan, 5
Công thức số gia giới nội, 283
Dàn hàm số, 64
Dãy cơ bản, 13
Đại số tập hợp, 28
Đạo hàm
cấp hai, 223
của một ấnh xạ, 217
riêng, 285
theo phương, 218
Gateaux, 219
Đệm Sierpinski, 71
Điểm
biên, 38
tụ, 40
trong, 38
Điểm bọc, 263
Điểm dừng, 226
Điều kiện bình hành, 314
Điều kiện cắt ngang (hoành), 247
Điều kiện Legendre, 237
Định lý ánh xạ mở, 276
Định lý Banach-Alaoglu, 412
Định lý Caratheodory, 91
Định lý điểm bất động
(Nguyên lý) Brouwer, 301

Định lý điểm bất động
Caristi, 286
Kakutani, 307
Ky Fan, 307
Nadler, 289
Schauder, 308
Định lý ánh xạ mở, 276
Định lý đồ thị đóng, 280
Định lý Egorov, 111
Định lý Ekeland, 288
Định lý Farkas-Minkowski, 270
Định lý Fredhom, 350
Định lý Fubini, 157
Định lý Hahn-Banach, 259
Định lý hàm ẩn, 282, 294
Định lý Hilbert, 337
Định lý hội tụ chặn, 146
Định lý hội tụ đơn điệu, 144
Định lý Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, 301
Định lý Lyusternik, 297
Định lý Lusin, 112
Định lý phạm trù (Baire-Hausdorff), 275
Định lý Riesz-Fischer, 323
Định lý song đối cực, 408
Định lý Stone, 65
Định lý tách tập lồi, 265
Định lý Tychonoff, 385
Định lý Weierstrass, 66
Độ đo, 86+
Độ đo đủ, 95
Độ đo Hausdorff, 114
Độ đo hữu hạn, σ-hữu hạn, 87
Độ đo Lebesgue, 96+
Độ đo ngoài, 91
Độ đo Peano-Jordan, 84
Độ đo trong, 121
Độ đo Lebesgue-Stieljes, 171
Đối cực, 408
Đơn ánh, 6
Đồng phôi, 59
Đường cong Peano, 68
Đường cực trị, 236
Đờng von Kock, 71
ε-lưới, 55
Fractal, 68
Giả thuyết continum, 28
Giao của hai tập, 2
Giới hạn dưới, 13
trên, 13
Giới hạn đều, 64
Giới hạn quy nạp, 422
Giới hạn xạ ảnh, 420
Hàm khả tích (R), khả tích (L), 137
Hầu khắp nơi, 109
Hàm cỡ, 265
Hàm dưới tuyến tính, 258
Hàm đơn giản, 132
Hàm lồi, 227
Hàm fractal, 78
Hàm số Borel, 102
Hàm số có biến phân bị chặn, 166
Hàm số đo được, 102
Hàm số đơn điệu, 160
Hàm số thực liên tục, 62+
Hàm số tương đương, 108
Hàm số tuyệt đối liên tục, 167
Hàm tập cộng tính, σ-cộng tính, 863
Hạt nhân của toán tử A, Ker A, 202
Hệ cơ bản lân cận, 376
Hệ trực chuẩn, 321

Hệ trực chuẩn đầy đủ, 322
Hiệu của hai tập, 3
Hiệu đối xứng, 3
Hội tụ theo độ đo, 109
Hội tụ trung bình, 195
Hợp của hai tập, 2
Khoảng cách Hausdorff, 71
Không gian
Banach, 189
$C_{[a,b]}, C^L_{[a,b]}$, 35
boocnologic, 419
compac, 383
đếm được chuẩn, 397
định chuẩn, 186
đủ, 47
đẳng cự, 36
đối ngẫu , 404
Fréchet, 399
Hausdorff, 382
Hilbert, 316
Hilbert phức, 360
lồi địa phương, 392
Mackey, 419
thương, 278, 392
thùng, 400
tách (khả ly), 382
tiền Hilbert (unita), 314
tích, 206, 425
tổng, 425
tuyến tính (vectơ), 181
tuyến tính topo, 388
Khuếch độ đo, 91
Khuếch phiếm hàm , 259
Lân cận của một điểm
trong không gian metric, 38
trong không gian topo, 375
Liên tục đồng bậc, 280
Lọc, 381
Lực lượng một tập hợp, 17
Lực lượng c, 2^α, 27
Lực lượng continum, 22
Lược đồ hàm lặp, 74
Lượng hóa phổ cập, tồn tại, 7
$\mathcal{M}$-topo trên X^*, 415
Metric, 34
Metric bất biến, 35
Metric rời rạc, 35
Miền trị, 6
Miền trị của toán tử A, ImA, 199
Nghịch ảnh, 6
Nguyên lý Archimede, 12
Nguyên lý bất động Banach, 59
Nguyên lý Bolzano-Weiertrass, 13
Nguyên lý Cantor, 12, 49
Nguyên lý Cauchy, 13
Nguyên lý chặn đều (Banach-Steinhaus, 281
Nguyên lý supremum, 11
Nguyên lý Weierstrass, 12
Phần bù, 5
Phần bù trực giao, 319
Phần trong, 41
Phép đồng dạng, 74
Phiếm hàm Minkowski, 265
Phiếm hàm
tuyến tính, 211
song tuyến tính, 215
toàn phương, 216
tuyến tính bị chặn, 212
Phương pháp trực hóa, 325
Phương trình Euler, 233
Phương trình tích phân, 399+
Siêu phẳng, 262
Sơ chuẩn, 394

Song ánh, 6
Song đối cực, 408
Tập bất biến, 76
Tập bị chặn, 400
Tập bị chặn trong không gian metric, 52
Tam giác phân, 299 Tập Borel, 45
Tập Cantor, 44
Tập compac, 53
Tập đếm được, 19
Tập đo được, đo được Lebesgue, đo được Borel, 98
Tập đóng, tập mở, 38
Tập hoàn toàn bị chặn, 53
Tập không đâu trù mật, 275
Tập lồi, 257
Tập phạm trù (1, 2), 275
Tập trù mật, 42
Tập tự đồng dạng, 70
Tập tương đương, 16
Thang Cantor, 68
Thứ nguyên Hausdorff, thứ nguyên Kolmogorov, 116
Tích độ đo. 157
Tích của hai không gian, 207
Tích của hai toán tử, 206
Tích phân Lebesgue, 131+
Tích phân Lebesgue-Stieljes, 171
Tích phân Riemann-Stieljes, 174
Tiên đề Zorn, 255
Tiên đề chọn (Zermelo), 19
Tiêu chuẩn khả tích Riemann, 128
Tính chất Heine-Borel, 55
Tính tương giao hữu hạn, 57
Toàn ánh, 6
Toán tử Fredhom, 340
Toán tử
đối xứng, 331
nghịch đảo, 202
tích phân, 200
hoàn toàn liên tục, 333
liên hợp (phó), 331
thoái hóa, 338
tuyến tính bị chặn, 200
tuyến tính liên tục, 200
vi phân, 200
Toán tử toàn phương, 209
Toán tử tuyến tính, 198
Tổng Lebesgue của một hàm, 176
Tô pô rời rạc, 373

Tôpô tương đối, 379
tích, thương , 379, 392
thô, 373
yếu, yếu*, 409
Tôpô lồi địa phương khởi đầu, 420
Tôpô lồi địa phương tận cùng, 422
Tô pô Mackey (μ-topo), 418
Tô pô mạnh trên X^*, 416
Tô pô phù hợp đối ngẫu, 418
Tô pô σ (Y, X), 405
Trường (σ- đại số) tập hợp, 29
Vành hàm số, 65
Vectơ độc lập tuyến tính, 183
Vectơ riêng, trị riêng, 331-332
Vi phân
cấp hai, 223
toàn phần, 216
của ánh xạ phức hợp, 219
Gateaux, 219
Vi phôi địa phương, 291

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH

Tổ chức và chịu trách nhiệm bản thảo:
Phó Tổng biên tập ĐẶNG THANH HẢI
Giám đốc Công ty CP Sách ĐH – DN NGÔ THỊ THANH BÌNH

Biên tập nội dung và sửa bản in:
ĐỖ HỮU PHÚ – NGUYỄN DUY MẠNH

Thiết kế mỹ thuật và trình bày bìa:
ĐINH XUÂN DŨNG

Thiết kế sách và chế bản:
NGUYỄN QUANG MINH

Công ty CP Sách Đại học – Dạy nghề, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

HÀM THỰC VÀ GIẢI TÍCH HÀM

Mã số: 7B993Y7-DAI

In 800 bản (QĐ in số : 108), khổ 16 x 24 cm.

Đơn vị in : In tại Xí nghiệp in Lao động xã hội – Công ty TNHHMTV NXB Lao động xã hội.

Ngõ Hòa Bình 4 , phố Minh Khai, Hai Bà Trưng, Hà Nội.

Số ĐKXB : 3373-2017/CXBIPH/4-1323/GD.

Số QĐXB : 6257/QĐ-GD-HN ngày 25 tháng 12 năm 2017.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 02 năm 2018.

Mã số ISBN : 978-604-0-11193-7